1) Halla la expresión de todas las matrices A que satisfagan la ecuación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) Considera la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ a) Halla una matriz B tal que A·B=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ b) Resuelve, si es posible, el sistema $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left(\boldsymbol{A}^t - \boldsymbol{A}\right)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

3) Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \\ -\boldsymbol{a} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, A^4, A^{88}

4) Consideremos las matrices $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$. Hallar la expresión de las matrices A tales que multiplicadas por B a la derecha y sumadas con C den como resultado 2A.

5)¿Existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de tres filas, siendo $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

6) Calcula la potencia n-ésima de la matriz A= $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

7) Dada la matriz A= , $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcular A^n

8) Hallar matrices A y B que verifiquen: 2A+B= $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; 3A-B= $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9) Averiguar cómo debe ser la matriz X que permute con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

10) Sea A una matriz tal que $A^2+A=I$. Calcular $(A+I)^2-(A+I)$.

11) Sea A= $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 25 \end{pmatrix}$ Hallar matrices B, triangulares, que cumplan $A=B.B^t$.

12) Una cadena de grandes almacenes tiene cuatro tiendas T_1, T_2, T_3 y T_4. Vende tres tipos de DVDs V_1, V_2, y V_3 a 12, 25 y 18 euros, respectivamente. En un momento determinado, la tienda T_1 tiene 24 DVDs del tipo V_1, 12 del tipo V_2 y 14 del tipo V_3. La tienda T_2 16, 12 y 32, respectivamente. Las cifras correspondientes a T_3 son 40, 10, 30 y las de T_4 28, 18 y 26. Expresa estos datos matricialmente mediante dos matrices A y P. ¿Qué relación hay entre la matriz S de ingresos en cada tienda y las matrices A y P?.

13) Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

a) Representar la información en dos matrices.
b) Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

① $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$x + 2z = 2x + 2y \qquad y + 2t = 3x + 3y$$
$$x + \cancel{2z} = \cancel{2z} + 2t \qquad y + 2t = 3z + 3t$$

$E_1:\ -x - 2y + 2z = 0 \qquad E_2:\ -3x - 2y + 2t = 0$

$E_3:\ \boxed{x = 2t} \qquad E_4:\ y - 3z - t = 0$

$E_1:\ -2t - 2y + 2z = 0 \Rightarrow -t - y + z = 0$

$E_2:\ -3(2t) - 2y + 2t = 0 \Rightarrow -6t - 2y + 2t = 0 \quad -4t - 2y = 0$

$2y = -4t \Rightarrow y = \frac{-4t}{2} = -2t \qquad \boxed{y = -2t}$

$E_4:\ y - 3z - t = 0 \Rightarrow -2t - 3z - t = 0 \Rightarrow -3t - 3z = 0 \Rightarrow$

$z = \frac{-3t}{3} = -t \qquad \boxed{z = -t}$

Comprobamos en E_1: $-t - (-2t) - t = 0$ cieta

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2t & -2t \\ -t & t \end{pmatrix}}$$

② $A_{2\times 2}\, B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$x - a = 1 \qquad y - b = 1 \qquad z - c = 0$

$2x - a = 0 \qquad 2y - b = 1 \qquad 2z - c = 0$

$-x + \cancel{a} = -1,\ 2x - \cancel{a} = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$; $\ x - 1 = a \Rightarrow \boxed{a = -2}$

$-y + \cancel{b} = -1,\ 2y - \cancel{b} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 0}$, $\boxed{b = -1}$

$-z + \cancel{c} = 0,\ 2z - \cancel{c} = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$, $\boxed{c = 0}$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

③ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a^3 \\ a^3 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -a^3 \\ a^3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} = a^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= a^4 I$

$A^{88} = \left[A^4\right]^{22} = \left[a^4 I\right]^{22} = a^{88}\, I^{22} = a^{88} I = a^{88}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{88} & 0 \\ 0 & a^{88} \end{pmatrix}$

4

$$A \cdot B + C = 2A$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x - y - 1 = 2x & x + 3y + 1 = 2y \\ z - t + 2 = 2z & z + 3t - 2 = 2t \end{array}\right\} \begin{array}{ll} -x - y = 1 & \cancel{x+y=-1} \\ -z - t = -2 & \cancel{z+t=2} \end{array}$$

$x + y = -1 \Rightarrow y = -1 - x$

$z + t = 2 \Rightarrow z = 2 - t$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} x & -1-x \\ 2-t & t \end{pmatrix}}$$

5

$$\underset{\underset{=}{2\times 4}}{A} \cdot \underset{4\times n}{B} = C_{3\times n}$$

No existe B que verifique esta igualdad porque C tiene que tener tantas filas como A que son 2 y no 3

6

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^2 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}}$

7

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8

$$2A + \cancel{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$3A - \cancel{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$5A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/5 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/5 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4/5 & 0 \end{pmatrix}}$$

9

$$X \cdot A = A \cdot X.$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\cancel{2x} + 2y = \cancel{2x} + 3z \qquad 3x + 3y = 2y + 3t$$
$$2z + 2t = 2x + 3z \qquad 3z + 3\cancel{t} = 2y + \cancel{3t}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2y = 3z \\ -2x - z + 2t = 0 \end{array}\right\} \qquad 3x + y - 3t = 0 \qquad \cancel{2y = 3z}$$

$$\boxed{y = \frac{3z}{2}} \qquad E_2 \quad 3x + \frac{3z}{2} - 3t = 0 \Rightarrow 6x + 3z - 6t = 0$$
$$2x + z - 2t = 0$$

$$E_3 = E_2 \qquad \cancel{-2x - z + 2t = 0}$$

$$E_1: \ y = \frac{3z}{2} \qquad E_2 \quad x = \frac{-z + 2t}{2}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{-z+2t}{2} & \frac{3z}{2} \\ z & t \end{pmatrix}}$$

10 $\quad A^2 + A = I$

$$(A + I)^2 - (A + I) = (A + I)(A + I) - (A + I) =$$
$$= A^2 + AI + IA + I^2 - A - I = A^2 + A + \cancel{A} + \cancel{I} - \cancel{A} - \cancel{I} =$$
$$= A^2 + A = I$$

11

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \quad B.B^t = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & yz \\ yz & z^2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^t = A \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ \cancel{yz = -5} \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} yz = -5 \\ z^2 = 25 \end{array}\right\} \ z^2 = 25 \Rightarrow z = \pm 5$$

Si $z = 5$ y $z = -5 \Rightarrow y \cdot 5 = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{5} = -1$

$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$\boxed{B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

Si $z = -5$ $y(-5) = -5 \Rightarrow y = \frac{-5}{-5} = 1$

$x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$\boxed{B_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}$$

12

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \varepsilon & \begin{pmatrix} 12 & 25 & 18 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 24 & 16 & 40 & 28 \\ 12 & 12 & 10 & 18 \\ 14 & 32 & 30 & 26 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \varepsilon & \begin{pmatrix} 720 & 1068 & 1270 & 1254 \end{pmatrix} \end{array}$$

$P = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 40 & 28 \\ 12 & 12 & 10 & 18 \\ 14 & 32 & 30 & 26 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} 720 & 1068 & 1270 & 1254 \end{pmatrix}$

$$\boxed{P \cdot A = S}$$

13

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} N & L & S \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} TA & AD \end{array} \\ \begin{array}{c} N \\ L \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1,2 \\ 33 & 1,3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} TA & AD \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix} \end{array}$$