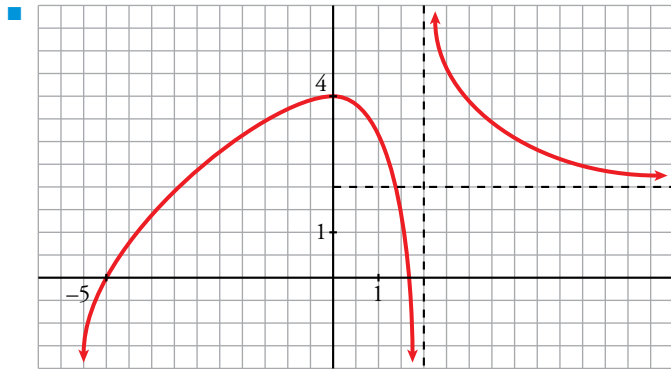


8 Representación de funciones

Página 193

Límites y derivadas para representar una función



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0$; $f'(0) = 0$; $f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(4) = 4$; $f'(4) = 0$

Página 195

1 a) *Dominio* = \mathbb{R}

Es continua y derivable en todo su dominio.

b) *Dominio* = $\mathbb{R} - \{1, 4\}$.

Es continua y derivable en su dominio.

c) *Dominio* = $\mathbb{R} - \{k\pi\}$.

Es continua y derivable en todo su dominio.

d) *Dominio* = \mathbb{R} . Es continua y derivable en \mathbb{R} .

e) *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

Es continua en todo su dominio, $\mathbb{R} - (0, 2)$, pero solo es derivable en $\mathbb{R} - [0, 2]$.

f) *Dominio* = $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Es continua y derivable en todo su dominio.

g) *Dominio* = \mathbb{R}

Es derivable y continua en \mathbb{R} .

h) *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

Es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

2 a) *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Es continua y derivable en su dominio.

b) Es continua en todo \mathbb{R} . En $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$ no es derivable.

c) La función es continua en $[3, 5]$ y derivable en $(3, 5)$.

d) Es continua en $[-13, -12) \cup (12, 13]$. Es derivable en $(-13, -12) \cup (12, 13)$.

Página 196

3 a) Es una función par: simétrica respecto al eje Y .

No es periódica.

b) No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

c) Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

d) No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

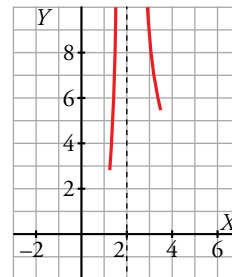
e) Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas. Es periódica de período 2π .

f) La función es par.

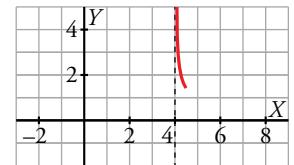
Es periódica de período 2π .

Página 197

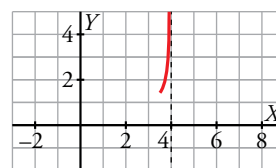
4 a) $x = 2$ es asíntota vertical.



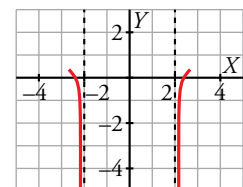
b) $x = 4$ es asíntota vertical.



c) $x = 4$ es asíntota vertical.



d) $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.



Página 199

5 a) Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

b) Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

c) La función tiene una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y es la recta $y = x + 4$.

d) $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

e) Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

f) Tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \rightarrow +\infty$. La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

g) No tiene asíntotas ni ramas parabólicas.

h) No tiene asíntotas ni ramas parabólicas.

6 a) Tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

b) Tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

c) Tiene una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

d) Tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

e) Tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

Tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \rightarrow -\infty$.

f) Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento.

g) Tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más lento cuando $x \rightarrow +\infty$.

h) No tiene asíntotas ni ramas parabólicas en el infinito.

Página 200

7 a) Hay un máximo en (1, 9) y un mínimo en (3, 5).

Hay un punto de inflexión en (2, 7).

b) Hay un mínimo en (0, 0).

Hay un punto de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y otro en $(1, \ln 2)$.

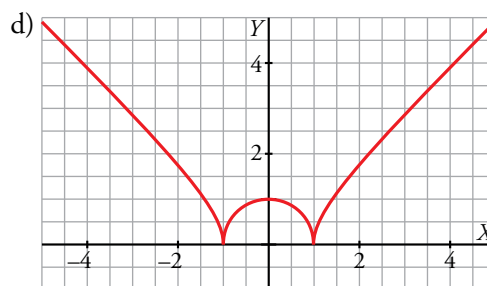
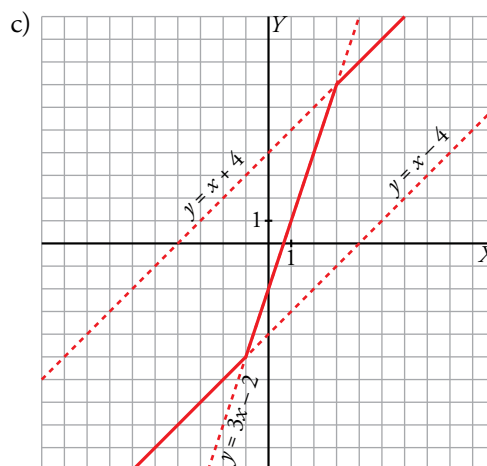
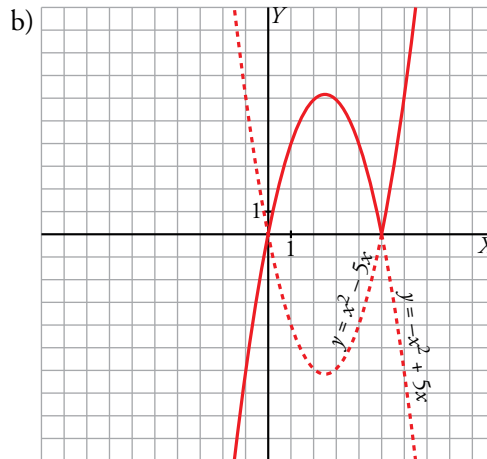
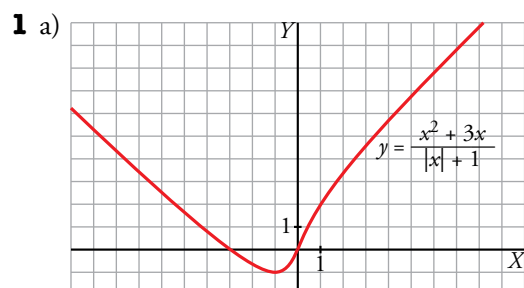
8 a) Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en (0, 0).

b) Hay un máximo en (0, 0).

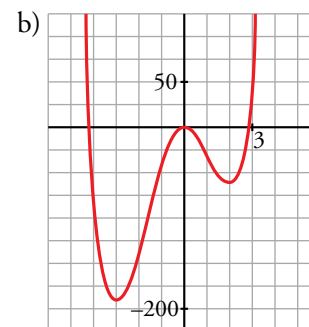
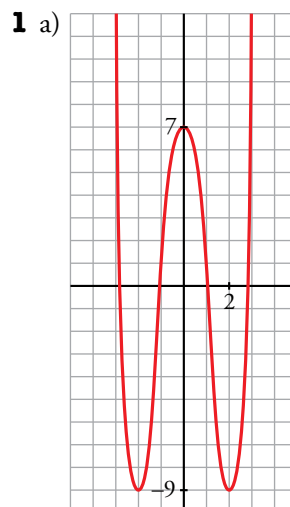
c) Hay un punto de inflexión en (0, 0) y un mínimo en $(6, \frac{27}{2})$.

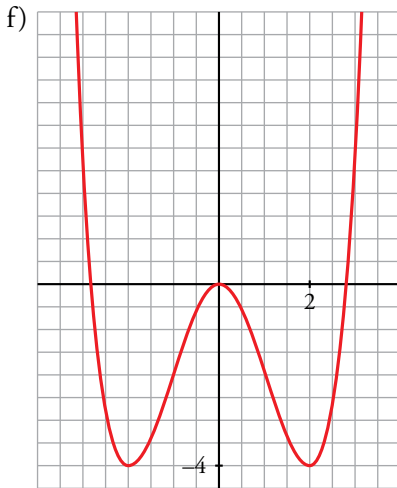
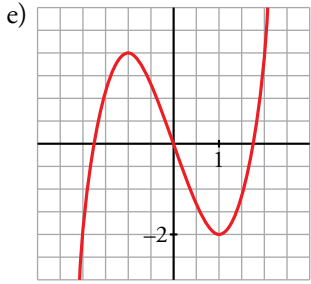
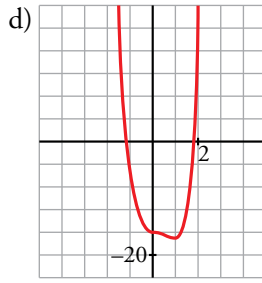
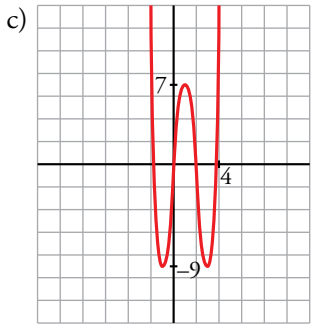
d) No hay puntos singulares.

Página 201

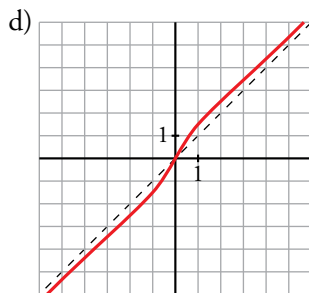
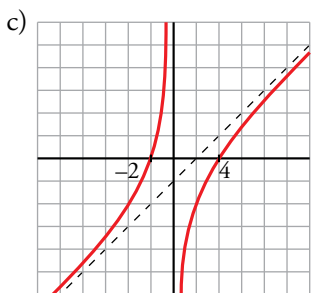
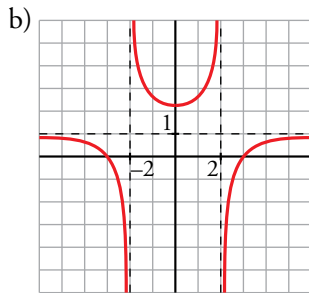
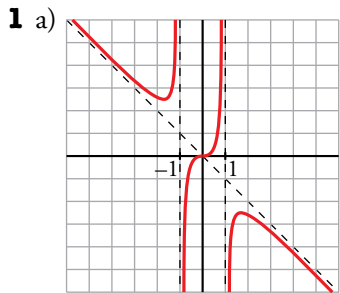


Página 203

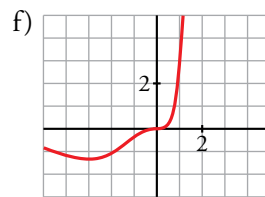
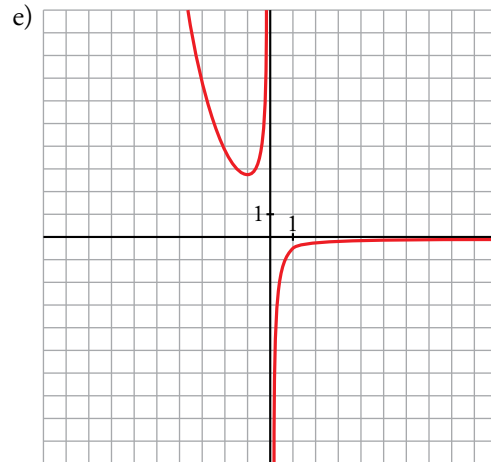
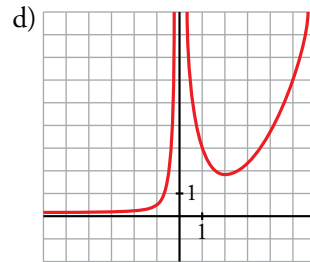
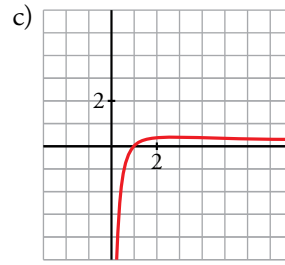
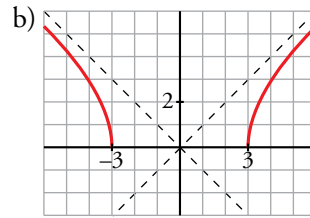
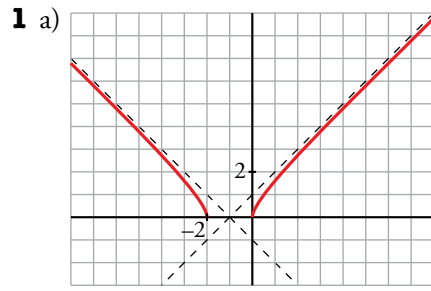




Página 205

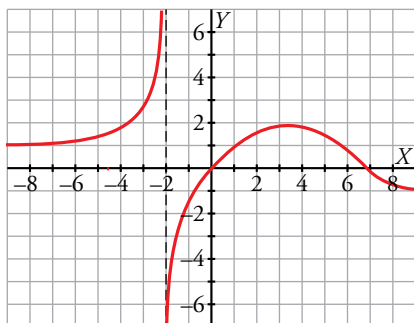


Página 207

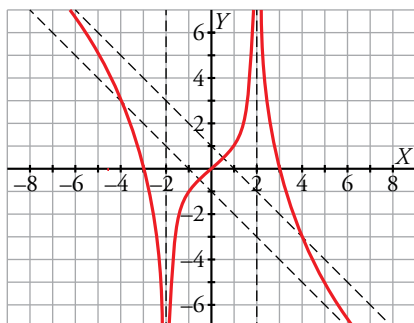


Página 208

1 Hazlo tú.

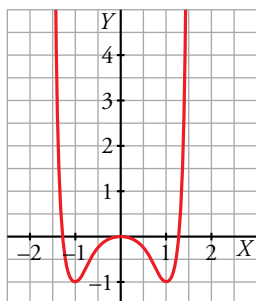


2 Hazlo tú.

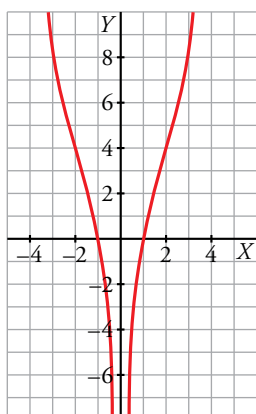


Página 209

3 Hazlo tú.

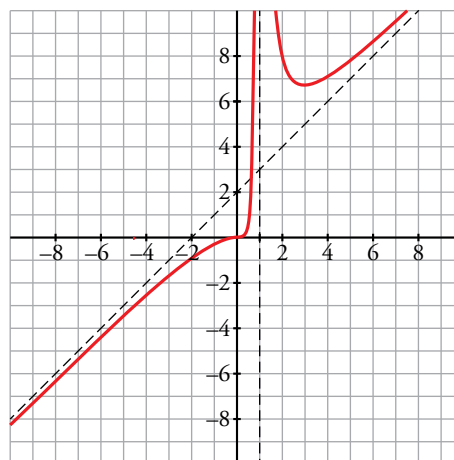


4 Hazlo tú.

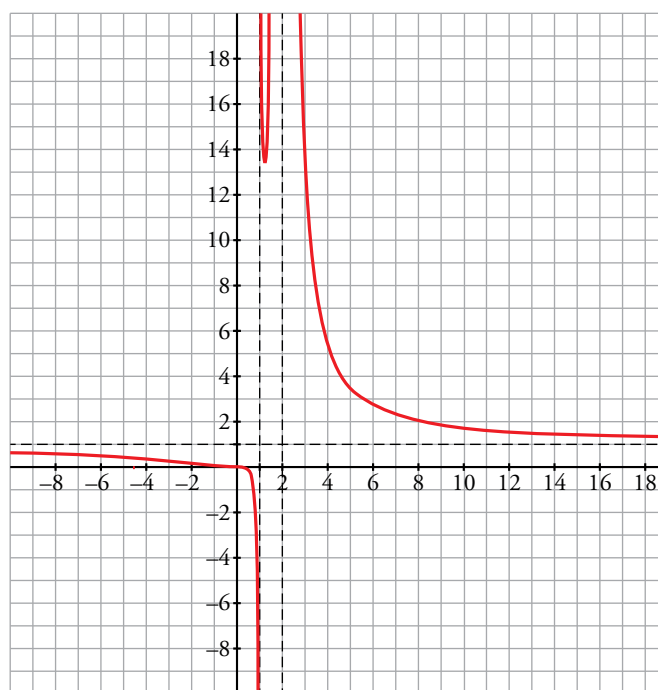


Página 210

5 Hazlo tú.

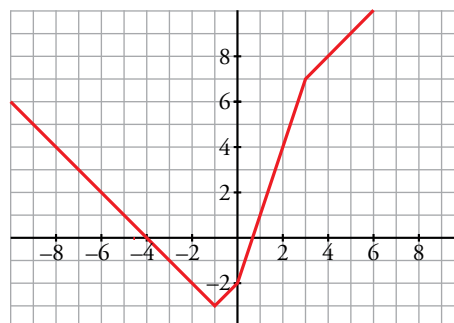


6 Hazlo tú.

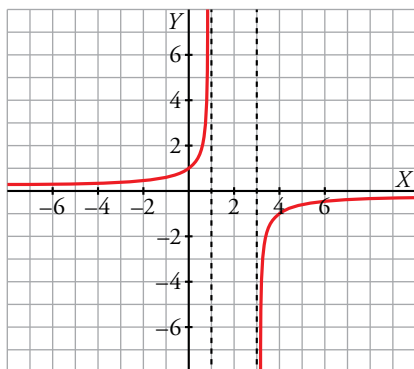


Página 211

7 Hazlo tú.

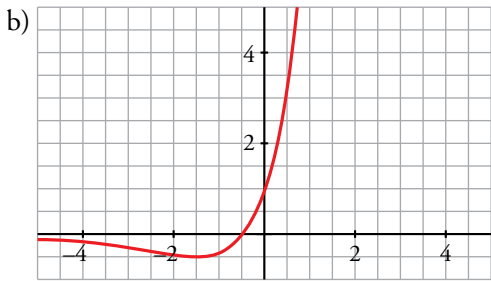
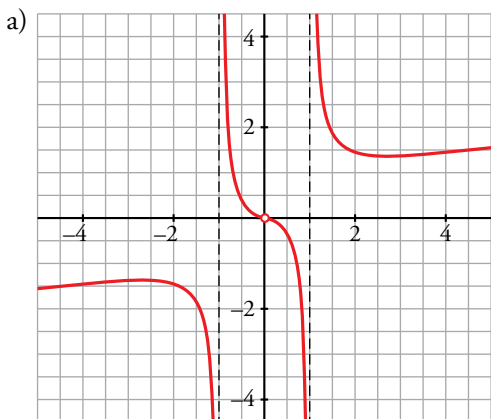


8 Hazlo tú.



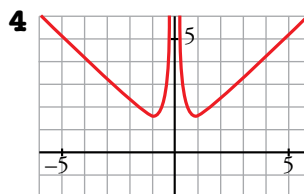
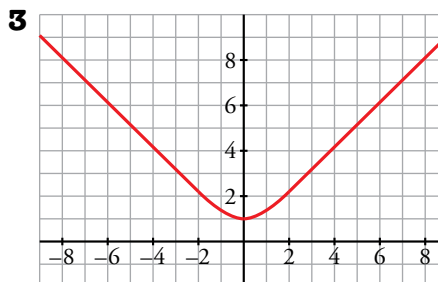
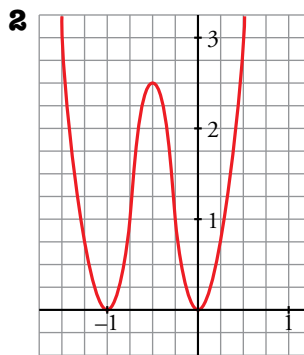
Página 212

9 Hazlo tú.

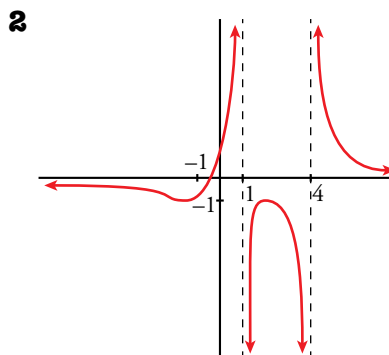
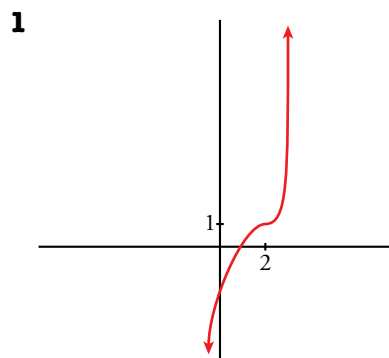


Página 213

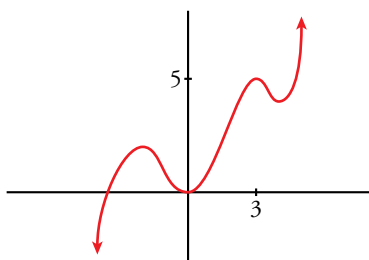
- 1** • Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$. Es derivable en su dominio.
- La recta $y = 4$ es la asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.
La recta $x = 1$ es la asíntota vertical de la función.
 - La recta $y = x - 2$ es la asíntota oblicua de la función cuando $x \rightarrow +\infty$.
 - Los puntos $(-1, -1)$ y $(5, -2)$ son mínimos relativos de la función.
Solo tiene un máximo relativo, que se encuentra en el punto $(3, 2)$.
 - Finalmente, la función corta a los ejes coordenados en los puntos: $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ y $(6, 0)$.



Página 214



3



4 a) • Asíntota horizontal: $y = 2$.

Asíntota vertical: $x = 0$.

- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Decece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) • Asíntota horizontal: $y = -2$.

Asíntota vertical: $x = -2$.

- Puntos singulares:
Máximo en $(0, -1)$.
- Crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decece en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal: si $x \rightarrow +\infty, y = 0$.

- Punto singulares:
Mínimo en $(0, 0)$.
Máximo en $(2, 1)$.
- Decece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$.

- Asíntota oblicua: $y = x$.
- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

5 a) $[-1, 4]$ b) $(7, +\infty)$ c) $[0, 16]$

d) $\mathbb{R} - \{(2n + 1)\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ e) $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

f) $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$

6 a) Par b) Impar c) Impar

d) Par e) No es simétrica f) Par

7 a) $\frac{2\pi}{3}$ b) 1 c) 1

d) No es periódica. e) 4 f) π^2

8 a) Tiene dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

b) Tiene dos asíntotas verticales: $x = 3$ y $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}} = +\infty$$

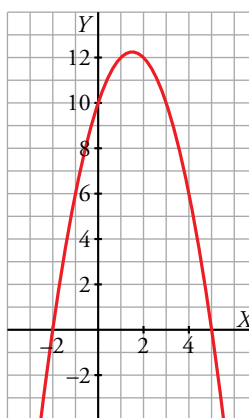
c) En $x = 2$ tiene una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 1}{x - 2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{x - 2} = +\infty$$

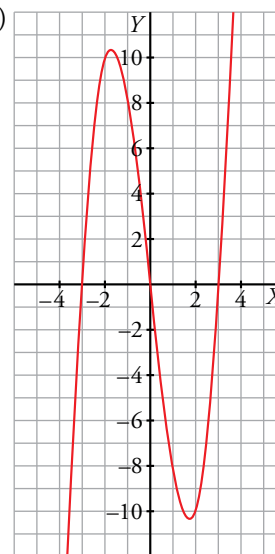
d) La recta $x = 1$ es la asíntota vertical de la función.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \rightarrow$$

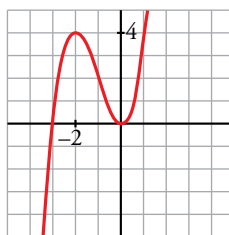
9 a)



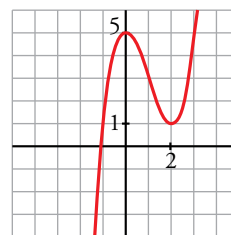
b)



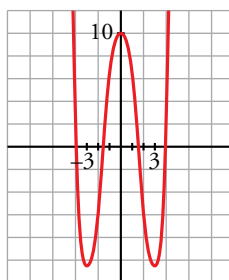
c)



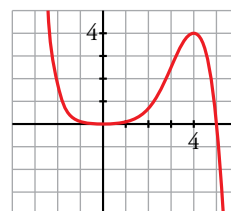
d)



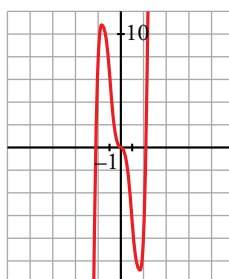
e)



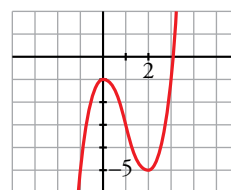
f)

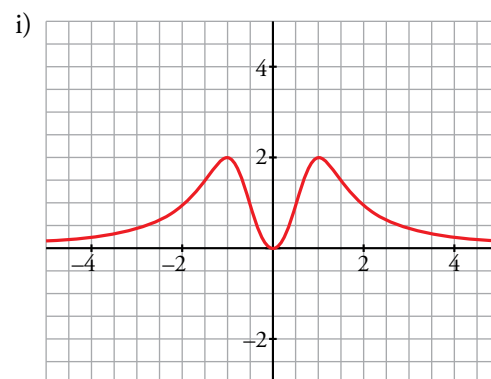
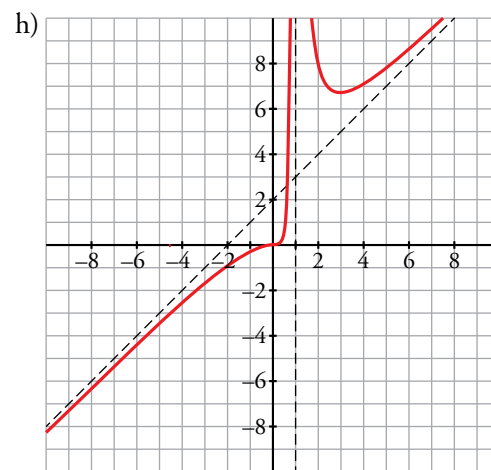
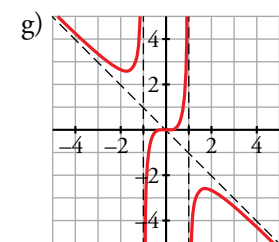
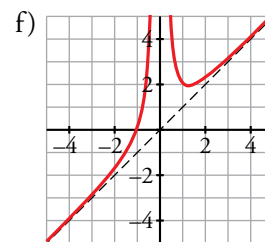
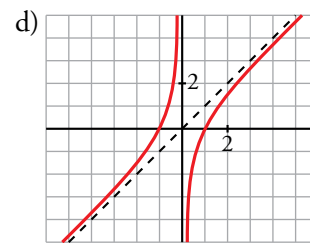
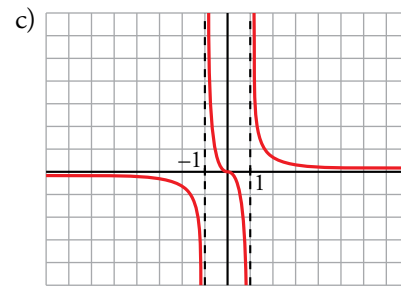
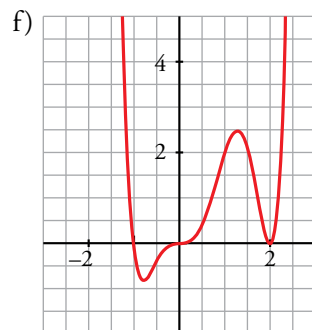
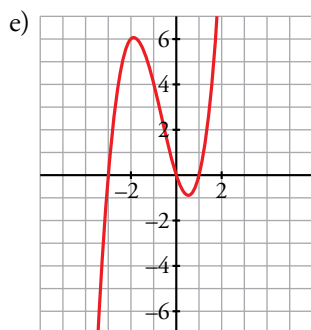
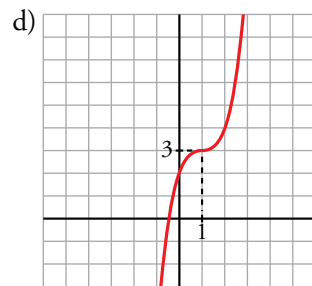
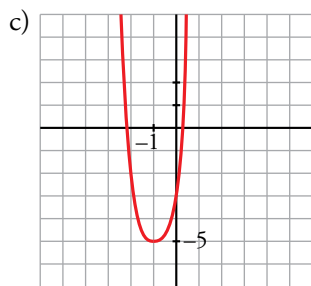
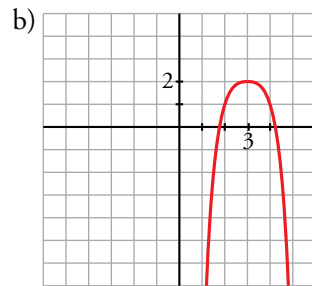
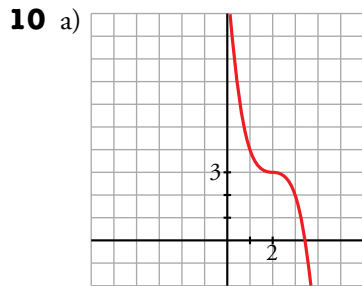
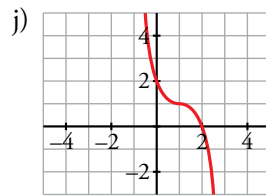
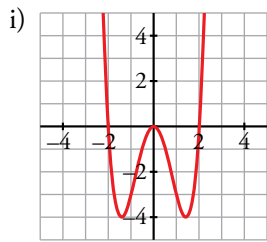


g)

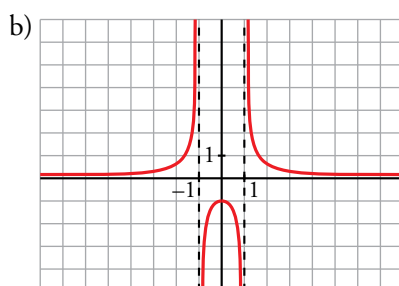
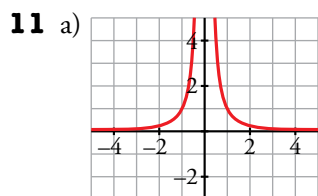


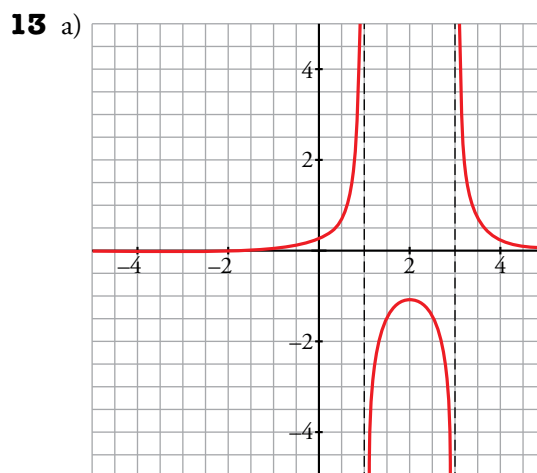
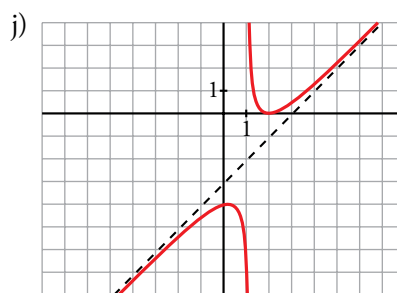
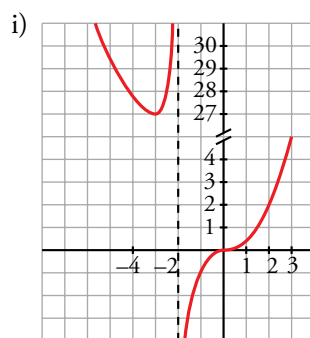
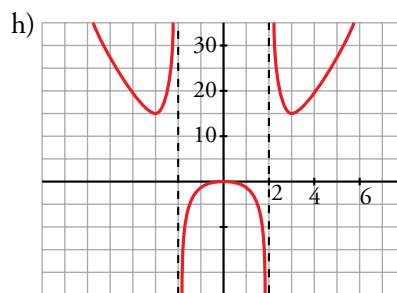
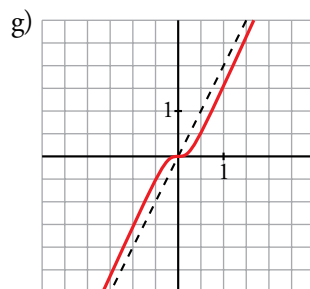
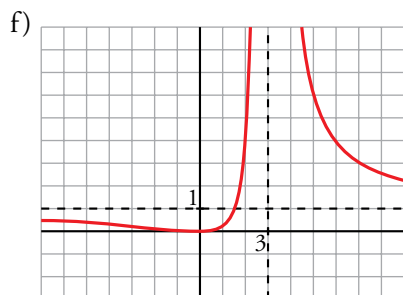
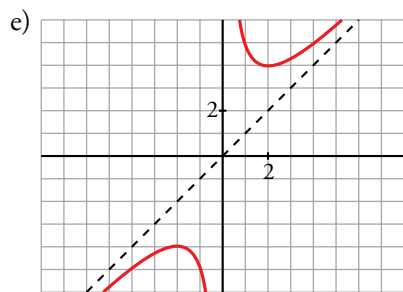
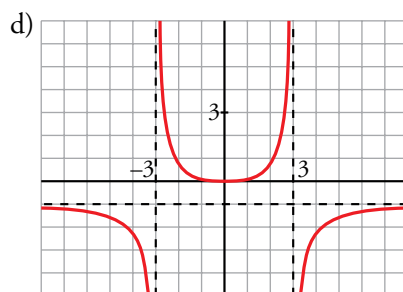
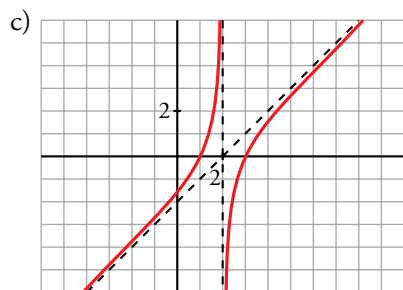
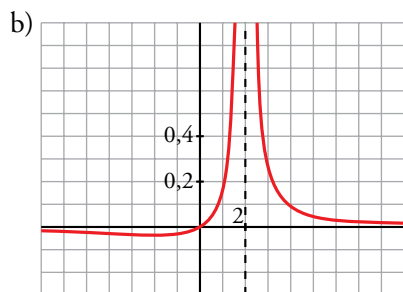
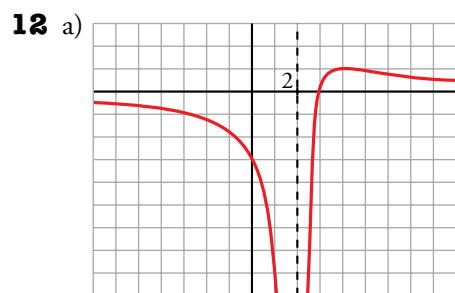
h)

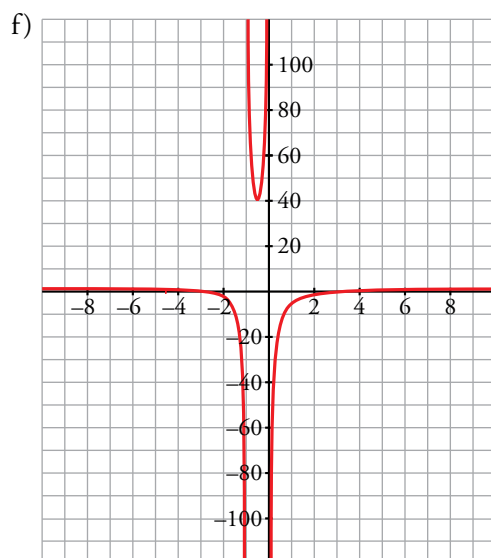
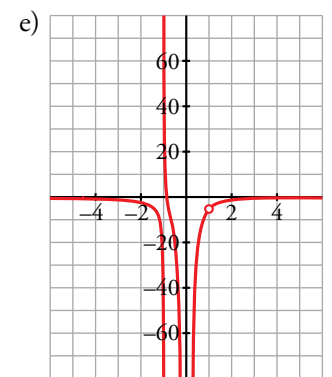
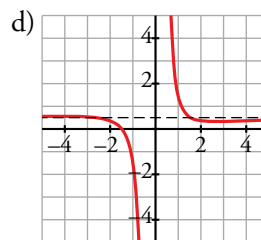
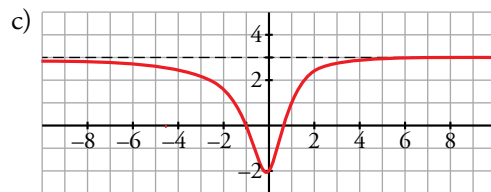
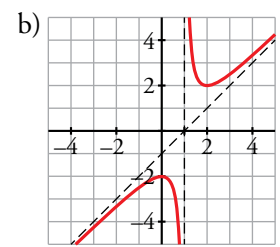
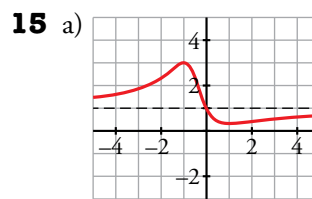
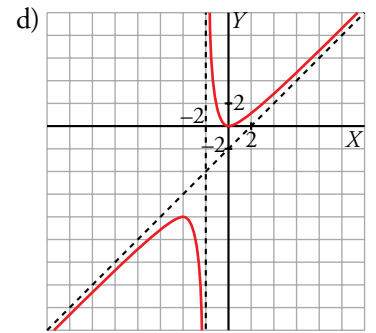
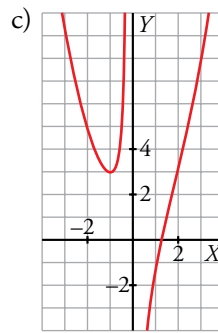
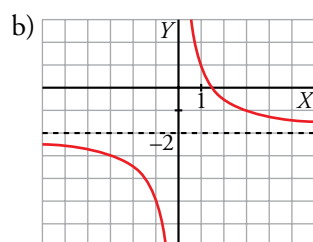
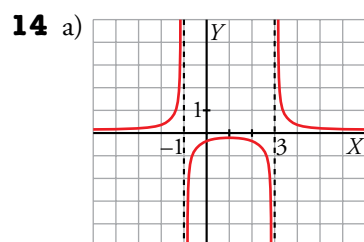
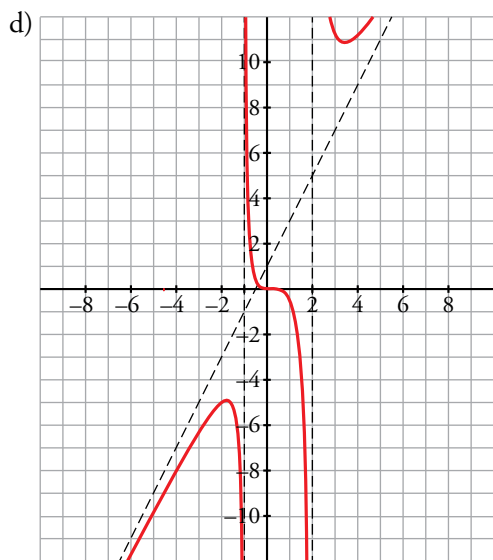
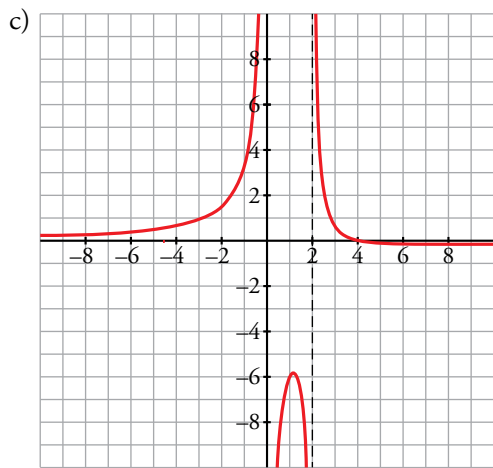
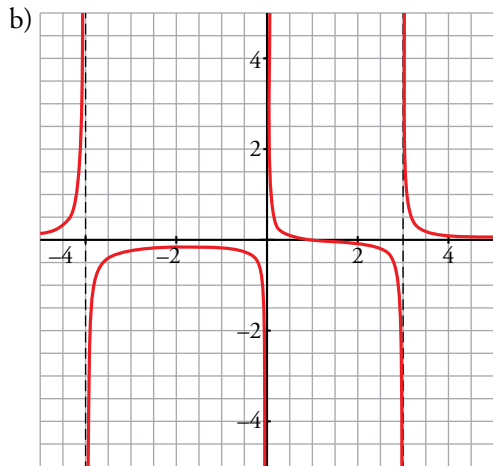


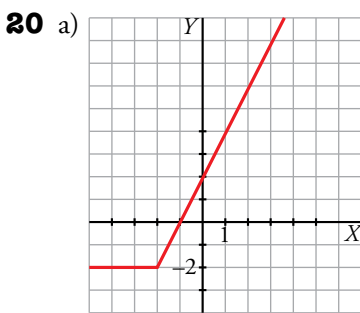
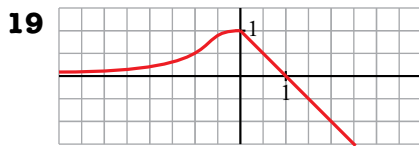
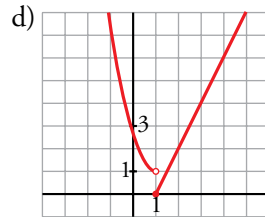
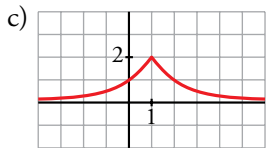
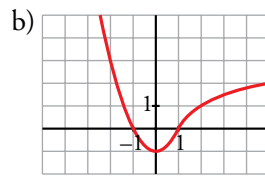
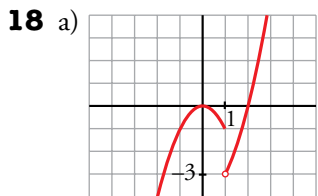
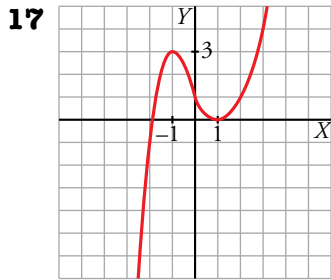
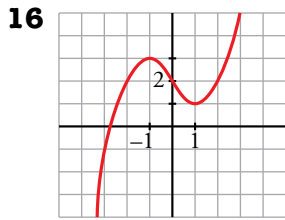


Página 215

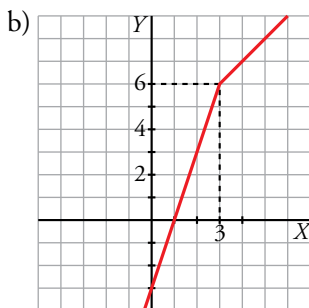




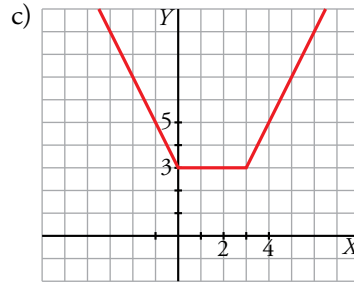




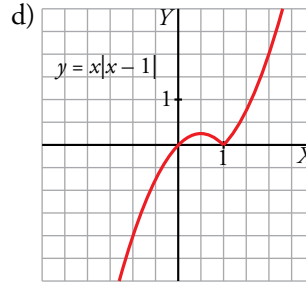
No es derivable en $x = -2$.



No es derivable en $x = 3$.



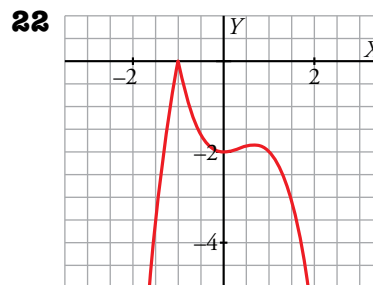
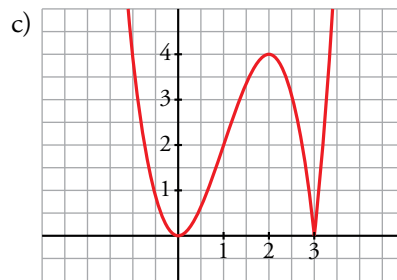
No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 3$.



No es derivable en $x = 1$.

21 a) No es derivable en $x = 3$. (Punto $(3, 0)$).

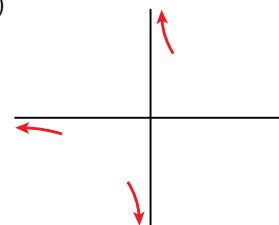
b) $f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.



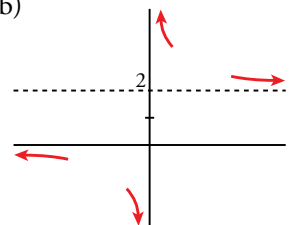
Página 216

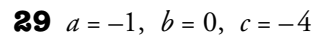
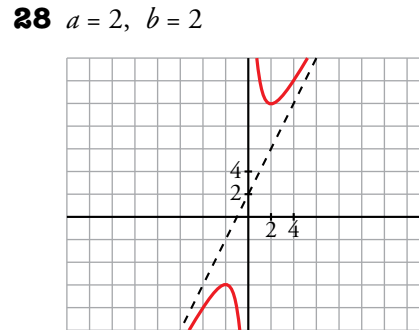
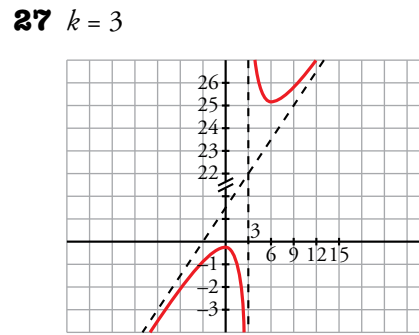
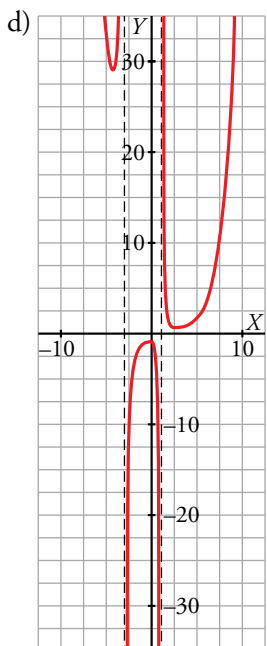
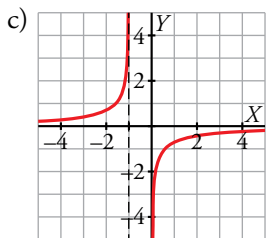
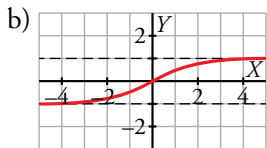
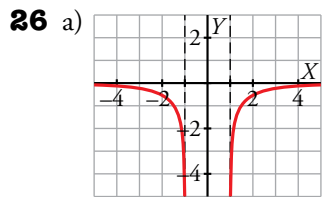
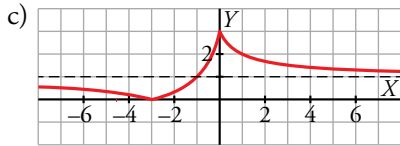
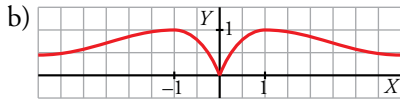
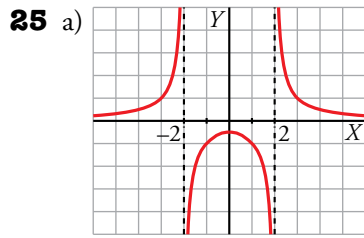
23 a) ② b) ⑥ c) ⑤ d) ① e) ③ f) ④

24 a)



b)

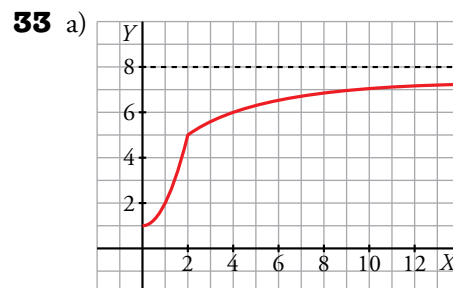




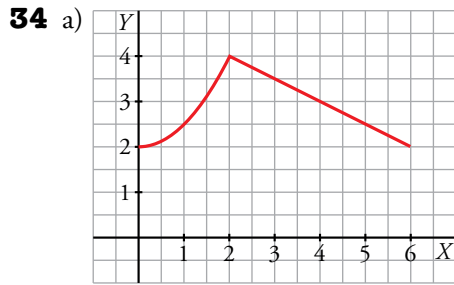
30 $y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.
 $y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

31 No tiene asíntotas verticales.
 No tiene asíntotas horizontales.
 $y = x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$.
 No hay asíntota oblicua hacia $-\infty$

- 32** a) $-|f(x)|$
 b) $f(-x)$
 c) $|f(x)|$
 d) $f(|x|)$



- b) A los 2 años se demandan 5 000 unidades.
 A partir de los 4 años se demandan más de 6 000 unidades.
- c) La demanda nunca superará las 8 000 unidades.



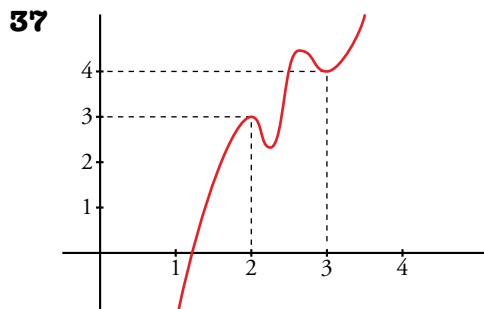
- b) El precio inicial fue de 200 €. El final fue también de 200 €.
 c) El artículo se vendió durante 6 años. El precio máximo fue de 400 €.

Página 217

- 35 a) Imposible. b) Probable.
 c) Probable. d) Probable.
 e) Probable. f) Seguro.
 g) Probable.

36 $x = 1$ es asíntota vertical.

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay asíntota.



Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5.

38 a) $N'(t)$ es siempre positivo para cualquier valor de t . Por tanto, $N(t)$ es creciente.

La concentración de nitrógeno es mínima para $t = 0$ y su valor es $N(0) = 20$.

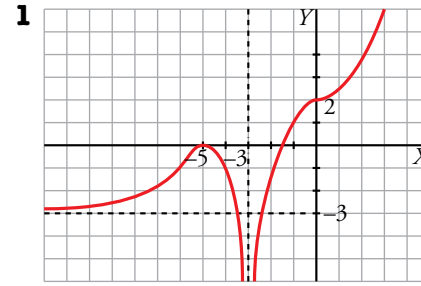
b) 60

39 a) $y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$

b) El punto es $Q\left(1, \frac{-22}{9}\right)$.

c) El punto es $R\left(\frac{16}{5}, 0\right)$.

Autoevaluación



2 • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Es impar, continua y derivable en su dominio.

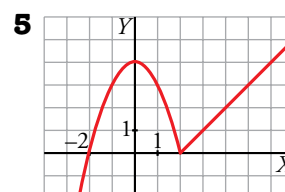
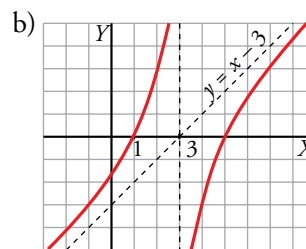
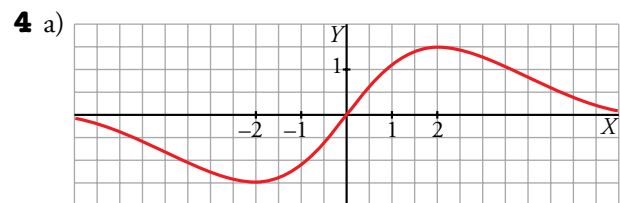
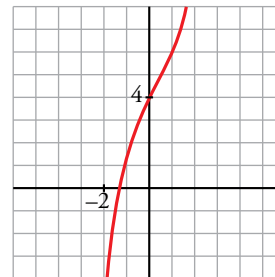
• Tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

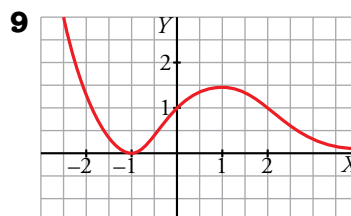
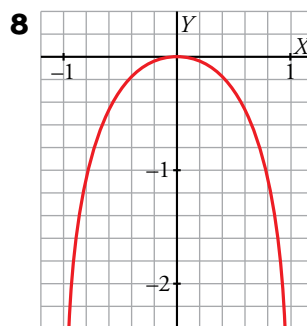
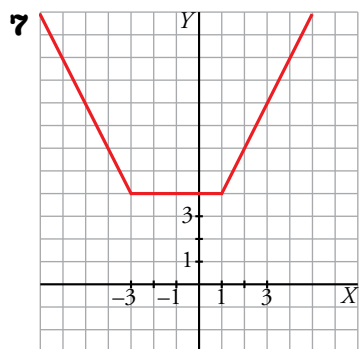
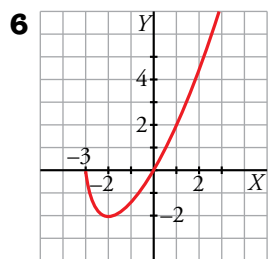
La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

• Es creciente en los intervalos $(-\infty, 2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

3 No tiene máximos ni mínimos.

Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.





10 La gráfica de f es la primera.