Página 57

Resuelve

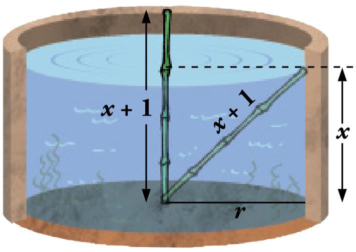
1. Halla el lado de un cuadrado tal que el número de metros cuadrados de su área menos el número de metros de su lado es igual a 870. Resuélvelo sin aplicar la fórmula de una ecuación de segundo grado, teniendo en cuenta que $x^2 - x = x(x - 1)$ es el producto de dos números consecutivos. (Descompón 870 en factores).

$870 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 30 \cdot 29$

Así vemos que: $x^2 - x = x(x - 1)$

Por tanto, $x = 30$ unidades.

2. Halla la profundidad del estanque del primer problema chino.

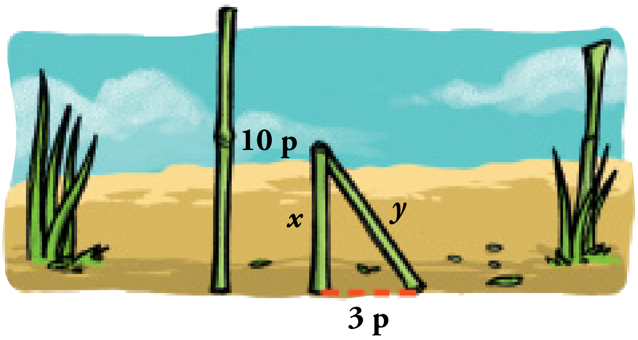


$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = 10\pi \rightarrow r = \sqrt{10}$

$(x + 1)^2 = x^2 + r^2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + 10 \rightarrow x = \dfrac{9}{2}$

El estanque tiene una profundidad de $\dfrac{9}{2}$ pies.

3. Halla la altura de la rotura en el segundo problema chino.



$x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$

$y^2 = x^2 + 9 \rightarrow 100 + x^2 - 20x = x^2 + 9 \rightarrow$

$\rightarrow 100 - 9 = 20x \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{91}{20} = 4{,}55$

La rotura se ha producido a 4,55 pies de la base.

1 Ecuaciones

Página 58

1. Resuelve:

a) $\mathbf{2x^2 - 50 = 0}$ **b)** $\mathbf{3x^2 + 5 = 0}$ **c)** $\mathbf{7x^2 + 5x = 0}$

a) $2x^2 - 50 = 0 \;\to\; x^2 = 25 \;\to\; x = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 5,\; x_2 = -5$

b) $3x^2 + 5 = 0 \;\to\; x^2 = -\frac{5}{3}$. No tiene solución.

c) $7x^2 + 5x = 0 \;\to\; x(7x + 5) = 0 \;\to\; x = 0,\; 7x + 5 = 0 \;\to\; x = -\frac{5}{7}$

Soluciones: $x_1 = 0,\; x_2 = -\frac{5}{7}$

2. Resuelve:

a) $\mathbf{10x^2 - 3x - 1 = 0}$ **b)** $\mathbf{x^2 - 20x + 100 = 0}$ **c)** $\mathbf{3x^2 + 5x + 11 = 0}$

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{20} = \dfrac{3 \pm 7}{20} = \begin{cases} 1/2 \\ -1/5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \frac{1}{2},\; x_2 = -\frac{1}{5}$

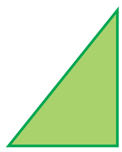
b) $x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2 = 0 \;\to\; x = 10$

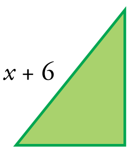
Solución: $x = 10$

c) $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 132}}{6}$. No tiene solución.

3. En un triángulo rectángulo, el lado mayor es 3 cm más largo que el mediano, el cual, a su vez, es 3 cm más largo que el pequeño.

¿Cuánto miden los lados?





$$(x + 6)^2 = (x + 3)^2 + x^2$$
$$x^2 + 12x + 36 = 2x^2 + 6x + 9$$
$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{6 \pm 12}{2} = \begin{cases} 9 \\ -3 \end{cases}$$

Solo es válida la solución $x = 9$.

Los lados del triángulos miden 9 cm, 12 cm y 15 cm.

Página 59

4. Resuelve.

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$ **b)** $3x^4 + 75x^2 = 0$ **c)** $7x^4 - 112 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ **e)** $4x^4 + 19x^2 - 5 = 0$ **f)** $x^4 + 9x^2 + 18 = 0$

a) $3x^4 - 12x^2 = x^2(3x^2 - 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$

b) $3x^4 + 75x^2 = x^2(3x^2 + 75) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -75/3. \text{ Sin solución.} \end{cases}$

Solución: $x = 0$

c) $7x^4 - 112 = 0 \ \rightarrow\ x^4 = 16 \ \rightarrow\ x^2 = 4 \ \rightarrow\ x = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

d) Hacemos el cambio $z = x^2$.

$$z^2 - 9z + 20 = 0 \ \rightarrow\ z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$$

Si $z = 5,\ x = \pm\sqrt{5}$.

Si $z = 4,\ x = \pm 2$.

Soluciones: $x_1 = \sqrt{5},\ x_2 = -\sqrt{5},\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$

e) Sea $z = x^2 \ \rightarrow\ 4z^2 + 19z - 5 = 0$

$$z = \frac{-19 \pm \sqrt{361 + 80}}{8} = \frac{-19 \pm \sqrt{441}}{8} = \frac{-19 \pm 21}{8} = \begin{cases} 1/4 \\ -5 \end{cases}$$

Si $z = \frac{1}{4},\ x = \pm\frac{1}{2}$.

Si $z = -5$, no existe x.

Soluciones: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2}$

f) Sea $z = x^2 \ \rightarrow\ z^2 + 9z + 18 = 0$

$$z = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} -3 \\ -6 \end{cases}$$

La ecuación original no tiene solución.

5. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=3$

b) $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{x+1}{x+5}+\dfrac{1-x}{x-4}=\dfrac{5}{2}$

a) $x(x+1)+2x(x-1)-3(x-1)(x+1)=0$

$x^2+x+2x^2-2x-3x^2+3=0$

$-x+3=0 \to x=3$

Comprobamos sobre la ecuación original: $\dfrac{3}{2}+\dfrac{6}{4}=3 \to$ es válida.

Solución: $x=3$

b) $10(x+3)+2x(x+2)-3(x+2)(x+3)=0$

$10x+30+2x^2+4x-3x^2-15x-18=0$

$-x^2-x+12=0 \to x^2+x-12=0 \to x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación original:

$\dfrac{5}{3+2}+\dfrac{3}{3+3}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \to x=3$ es válida.

$\dfrac{5}{-2}+\dfrac{-4}{-1}=\dfrac{-5}{2}+4=\dfrac{3}{2} \to x=-4$ es válida.

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-4$

c) $4x+4-3x^2=0 \to 3x^2-4x-4=0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\dfrac{4\pm 8}{6}=\begin{cases}2\\-2/3\end{cases}$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación original:

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4} \to x=2$ es válida.

$-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{4}=-\dfrac{3}{4}\neq\dfrac{3}{4} \to x=-\dfrac{2}{3}$ no es válida.

Solución: $x=2$

d) $2(x+1)(x-4)+2(1-x)(x+5)-5(x+5)(x-4)=0$

$2x^2-6x-8-2x^2-8x+10-5x^2-5x+100=0$

$5x^2+19x-102=0 \to x=\dfrac{-19\pm\sqrt{361+2\,040}}{10}=\dfrac{-19\pm 49}{10}=\begin{cases}3\\-34/5\end{cases}$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\dfrac{3+1}{3+5}+\dfrac{1-3}{3-4}=\dfrac{4}{8}+2=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2} \to x=3$ es válida.

$\dfrac{-29/5}{-9/5}+\dfrac{39/5}{-54/5}=\dfrac{29}{9}-\dfrac{39}{54}=\dfrac{135}{54}=\dfrac{5}{2} \to x=-\dfrac{34}{5}$ es válida.

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-\dfrac{34}{5}$

Página 60

6. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x - \sqrt{2x-3} = 1$ **b)** $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -2$

c) $\sqrt{x^2+2x+9} - 7 = 2x$ **d)** $\sqrt{20-x} = x - 8$

a) $x - 1 = \sqrt{2x-3}$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x^2 - 2x + 1 = 2x - 3 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

Comprobamos la solución sobre la ecuación inicial:

$2 - 1 = \sqrt{4-3}$. Es válida.

Solución: $x = 2$

b) $\sqrt{x+4} = \sqrt{6-x} - 2$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x + 4 = (6-x) + 4 - 4\sqrt{6-x} \;\rightarrow\; 2x - 6 = -4\sqrt{6-x}$$

Volvemos a elevar al cuadrado los dos miembros:

$$4x^2 - 24x + 36 = 16(6-x) \;\rightarrow\; 4x^2 - 24x + 36 = 96 - 16x \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 4x^2 - 8x - 60 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{5+4} \neq \sqrt{6-5} - 2 \;\rightarrow\; 3 \neq -1 \;\rightarrow\; x = 5 \text{ no es válida.} \\ \sqrt{-3+4} = \sqrt{6+3} - 2 \;\rightarrow\; 1 = 3 - 2 \;\rightarrow\; x = -3 \text{ es válida.} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = -3$$

c) $\sqrt{x^2+2x+9} = 2x + 7$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x^2 + 2x + 9 = 4x^2 + 28x + 49 \;\rightarrow\; 3x^2 + 26x + 10 = 0$$

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{676-480}}{6} = \frac{-26 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-26 \pm 14}{6} = \begin{cases} -2 \\ -20/3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{4-4+9} - 7 = -4 \;\rightarrow\; x = -2 \text{ es válida.} \\ \sqrt{\dfrac{400}{9} - \dfrac{40}{3} + 9} - 7 \neq \dfrac{-40}{3} \;\rightarrow\; x = -\dfrac{20}{3} \text{ no es válida.} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = -2$$

d) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$20 - x = x^2 + 64 - 16x \;\rightarrow\; x^2 - 15x + 44 = 0$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225-176}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{15 \pm 7}{2} = \begin{cases} 11 \\ 4 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{20-11} = 11 - 8 \;\rightarrow\; x = 11 \text{ es válida.} \\ \sqrt{20-4} \neq 4 - 8 \;\rightarrow\; x = 4 \text{ no es válida.} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 11$$

Página 61

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{x^2-5} = 81$

b) $2^{x+1} = \sqrt[3]{4}$

c) $4^x + 4^{x+2} = 272$

d) $2^x + 2^{x+3} = 36$

e) $5^x = 193$

f) $2^{x^2-2} = 835$

a) $3^{x^2-5} = 81$

$3^{x^2-5} = 3^4$

$x^2 - 5 = 4$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = \pm 3$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

b) $2^{x+1} = \sqrt[3]{4}$

$2^{x+1} = 2^{2/3}$

$x + 1 = \frac{2}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$

Solución: $x = -\frac{1}{3}$

c) $4^x + 4^{x+2} = 272$

$4^x + 4^x \cdot 4^2 = 272$

$4^x + 16 \cdot 4^x = 272$

$17 \cdot 4^x = 272$

$4^x = \frac{272}{17}$

$4^x = 16$

$x = 2$

Solución: $x = 2$

d) $2^x + 2^{x+3} = 36$

$2^x + 2^x \cdot 2^3 = 36$

$2^x + 8 \cdot 2^x = 36$

$9 \cdot 2^x = 36$

$2^x = \frac{36}{9}$

$2^x = 4$

$x = 2$

Solución: $x = 2$

e) $5^x = 193$

$\log 5^x = \log 193$

$x \cdot \log 5 = \log 193$

$x = \frac{\log 193}{\log 5} \approx 3{,}27$

Solución: $x = 3{,}27$

f) $2^{x^2-2} = 835$

$\log (2^{x^2-2}) = \log 835$

$(x^2 - 2) \cdot \log 2 = \log 835$

$x^2 - 2 = \frac{\log 835}{\log 2}$

$x^2 = \frac{\log 835}{\log 2} + 2$

$x = \pm\sqrt{\frac{\log 835}{\log 2} + 2} \approx \pm 3{,}42$

Soluciones: $x_1 \approx 3{,}42;\ x_2 \approx -3{,}42$

8. Aplica la definición de logaritmo para calcular x en cada caso:

a) $\log_2 (2x - 1) = 3$

b) $\log_2 (x + 3) = -1$

c) $\log 4x = 2$

d) $\log (x - 2) = 2{,}5$

e) $\log (3x + 1) = -1$

f) $\log_2 (x^2 - 8) = 0$

a) $\log_2 (2x - 1) = 3$

$2^3 = 2x - 1$

$8 + 1 = 2x$

$x = \frac{9}{2}$

Solución: $x = \frac{9}{2}$

b) $\log_2 (x + 3) = -1$

$2^{-1} = x + 3$

$\frac{1}{2} = x + 3$

$x = \frac{-5}{2}$

Solución: $x = \frac{-5}{2}$

c) $\log 4x = 2$

$10^2 = 4x$

$100 = 4x$

$x = 25$

Solución: $x = 25$

d) $\log (x - 2) = 2{,}5$

$10^{2{,}5} = x - 2$

$10^{5/2} = x - 2$

$\sqrt{10^5} + 2 = x$

$x = 2 + 100\sqrt{10}$

Solución: $x = 2 + 100\sqrt{10}$

e) $\log (3x + 1) = -1$

$10^{-1} = 3x + 1$

$\frac{1}{10} = 3x + 1$

$x = \frac{-3}{10}$

Solución: $x = \frac{-3}{10}$

f) $\log_2 (x^2 - 8) = 0$

$2^0 = x^2 - 8$

$1 + 8 = x^2$

$9 = x^2$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

Página 62

9. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $7x^4 = 63x^2$ **b)** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ **d)** $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

a) $3x^4 - 63x^2 = x^2(7x^2 - 63) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3$

b) Hacemos el cambio $z = x^2$.

$$z^2 - 10z + 9 = 0 \rightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} z = 9 \\ z = 1 \end{cases}$$

Si $z = 9 \rightarrow x = \pm 3$

Si $z = 1 \rightarrow x = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

c) Hacemos el cambio $z = x^2$.

$$4z^2 - 5z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} z = 1 \\ z = 1/4 \end{cases}$$

Si $z = 1 \rightarrow x = \pm 1$

Si $z = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \dfrac{1}{2},\ x_4 = -\dfrac{1}{2}$

d) Hacemos el cambio $z = x^2$.

$$z^2 + 5z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} z = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

En ninguno de los dos casos hay solución para x.

10. Resuelve.

a) $\sqrt{4x + 5} = x + 2$ **b)** $\sqrt{x} + 2 = x$

c) $\left(\sqrt{x} - x + 2\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right) = 0$

a) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4x + 5 = (x + 2)^2 \rightarrow 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\sqrt{4 + 5} = 1 + 2 \rightarrow x = 1$ es válida.

$\sqrt{-4 + 5} = 1 \rightarrow x = -1$ es válida.

Soluciones: $x_1 = 1;\ x_2 = -1$

b) $\sqrt{x} = x - 2$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x = x^2 - 4x + 4 \to x^2 - 5x + 4 = 0 \to x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\sqrt{4} = 4 - 2 \to x = 4$ es válida.

$\sqrt{1} \neq 1 - 2 \to x = 1$ no es válida.

Solución: $x = 4$

c) • $\sqrt{x} - x + 2 = 0 \to \sqrt{x} = x - 2 \to x = x^2 - 4x + 4 \to x^2 - 5x + 4 = 0 \to$

$$\to x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$\sqrt{4} - 2 + 2 = 0 \to x = 4$ es válida.

$\sqrt{1} - 1 + 2 \neq 0 \to x = 1$ no es válida.

• $\sqrt{x} - 3 = 0 \to \sqrt{x} = 3 \to x = 9$

• $\sqrt{x} + 3 = 0$ no tiene solución.

Soluciones: $x_1 = 4$, $x_2 = 9$

11. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\mathbf{3x^2 - 48 = 0}$ **b)** $\mathbf{3x^2 + 48 = 0}$ **c)** $\mathbf{5x^2 - 7x = 0}$

d) $\mathbf{6x^2 - x - 1 = 0}$ **e)** $\mathbf{10x^2 + 9x = 5{,}2}$ **f)** $\mathbf{7x^2 - 3x + 4 = 0}$

a) $3x^2 - 48 = 0 \to x^2 = \dfrac{48}{3} = 16 \to x = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$

b) $3x^2 + 48 = 0 \to x^2 = -16$, no tiene solución.

c) $5x^2 - 7x = 0 \to x(5x - 7) = 0 \begin{cases} 0 \\ 7/5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{7}{5}$

d) $6x^2 - x - 1 = 0 \to x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \begin{cases} 1/2 \\ -1/3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$

e) $10x^2 + 9x = 5{,}2 \to 10x^2 + 9x - 5{,}2 = 0$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81+208}}{20} = \begin{cases} 2/5 \\ -13/10 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{2}{5}$, $x_2 = \dfrac{-13}{10}$

f) $7x^2 - 3x + 4 = 0 \to x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-112}}{14}$, no tiene solución.

12. Resuelve.

a) $4^{x^2-2x-8}=\dfrac{1}{1\,024}$ **b)** $3^{2x-1}=\sqrt{27}$

c) $2^{x+1}+2^{x+3}=320$ **d)** $2{,}5^{x}=49$

a) $4^{x^2-2x-8}=\dfrac{1}{1\,024}$

$4^{x^2-2x-8}=4^{-5}$

$x^2-2x-8=-5$

$x^2-2x-3=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-1$

b) $3^{2x-1}=\sqrt{27}$

$3^{2x-1}=3^{3/2}$

$2x-1=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{5}{4}$

Solución: $x=\dfrac{5}{4}$

c) $2^{x+1}+2^{x+3}=320$

$2^x\cdot 2+2^x\cdot 2^3=320$

$2\cdot 2^x+8\cdot 2^x=320$

$10\cdot 2^x=320$

$2^x=\dfrac{320}{10}=32=2^5$

$x=5$

Solución: $x=5$

d) $2{,}5^x=49$

$\log 2{,}5^x=\log 49$

$x\cdot\log 2{,}5=\log 49$

$x=\dfrac{\log 49}{\log 2{,}5}\approx 4{,}25$

Solución: $x\approx 4{,}25$

13. Resuelve.

a) $\dfrac{x+7}{x+3}+\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1$ **b)** $\dfrac{x+1}{x^2-2x}+\dfrac{x-1}{x}=2$

a) Observamos que $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.

$(x+7)(x-1)+(x^2-3x+6)=x^2+2x-3$

$x^2+6x-7+x^2-3x+6-x^2-2x+3=0$

$x^2+x+2=0$. Esta ecuación no tiene soluciones.

b) $x+1+(x-1)(x-2)-2(x^2-2x)=0$

$x+1+x^2-3x+2-2x^2+4x=0$

$x^2-2x-3=0\ \rightarrow\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{3}=2\ \rightarrow\ x=3$ es válida.

$\dfrac{0}{3}+\dfrac{-2}{-1}=2\ \rightarrow\ x=-1$ es válida.

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-1$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 40x - 36 = 0$

b) $(x^4 - 13x^2 + 36)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{9}\right) = 0$

a)
$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -10 & 5 & 40 & -36 \\
1 & & 1 & -9 & -4 & 36 \\
\hline
 & 1 & -9 & -4 & 36 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -14 & -36 & \\
\hline
 & 1 & -7 & -18 & \boxed{0} & \\
9 & & 9 & 18 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

El polinomio factorizado es: $(x - 1)(x - 2)(x - 9)(x + 2)$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 9,\ x_4 = -2$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Hacemos $x^2 = t$:

$$t^2 - 13t + 36 = 0 \to t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \begin{cases} t = 9 \to x = \pm 3 \\ t = 4 \to x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{9} = 0 \to \frac{9x + 9 - 10x^2}{9x^2} = 0 \to -10x^2 + 9x + 9 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 360}}{-20} = \begin{cases} -3/5 \\ 3/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2,\ x_5 = -\frac{3}{5},\ x_6 = \frac{3}{2}$

15. Resuelve.

a) $\sqrt{x + 4} + 7 = 2x$

b) $\sqrt{13 - x^2} + x = 5$

c) $\sqrt{x - 2} - \sqrt{12 - x} = 2$

d) $\sqrt{x - 5} + \sqrt{x} = 5$

a) $\sqrt{x + 4} + 7 = 2x \to \sqrt{x + 4} = 2x - 7 \to x + 4 = 4x^2 - 28x + 49 \to 4x^2 - 29x + 45 = 0 \to$

$$\to x = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 720}}{8} = \begin{cases} 5 \\ 9/4 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\sqrt{5 + 4} + 7 = 10 \to x = 5$ es solución.

$\sqrt{\frac{9}{4} + 4} + 7 \ne \frac{18}{4} \to x = \frac{9}{4}$ no es solución.

Solución: $x = 5$

b) $\sqrt{13 - x^2} + x = 5 \to \sqrt{13 - x^2} = 5 - x \to 13 - x^2 = x^2 - 10x + 25 \to$

$$\to 2x^2 - 10x + 12 = 0 \to x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$\sqrt{13 - 9} + 3 = 5 \to x = 3$ es válida.

$\sqrt{13 - 4} + 2 = 5 \to x = 2$ es válida.

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = 2$

c) $\sqrt{x-2} - \sqrt{12-x} = 2 \rightarrow \sqrt{x-2} = 2 + \sqrt{12-x} \rightarrow x - 2 = 4 + 12 - x + 4\sqrt{12-x} \rightarrow$

$\rightarrow 2x - 18 = 4\sqrt{12-x} \rightarrow x - 9 = 2\sqrt{12-x} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 81 - 18x = 48 - 4x \rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{196-132}}{2} = \begin{cases} 11 \\ 3 \end{cases}$$

$\sqrt{11-2} - \sqrt{12-11} = 2 \rightarrow x = 11$ es válida.

$\sqrt{3-2} - \sqrt{12-3} \neq 2 \rightarrow x = 3$ no es válida.

Solución: $x = 11$

d) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5 \rightarrow \sqrt{x-5} = 5 - \sqrt{x} \rightarrow x - 5 = 25 + x - 10\sqrt{x} \rightarrow$

$\rightarrow x - 5 - 25 - x = -10\sqrt{x} \rightarrow -30 = -10\sqrt{x} \rightarrow 3 = \sqrt{x} \rightarrow 9 = x$

Comprobamos la solución sobre la ecuación inicial:

$\sqrt{9-5} + \sqrt{9} = 5 \rightarrow x = 9$ es válida.

16. Resuelve.

a) $\boldsymbol{\log_7 (5x + 6) = 2}$

b) $\boldsymbol{\log_3 (2 - 3x) = 0}$

c) $\boldsymbol{\log \left(\sqrt{x} - 3\right) = -1}$

d) $\boldsymbol{\log_2 (x^2 - 3x) = 2}$

a) $\log_7 (5x + 6) = 2$

$7^2 = 5x + 6$

$49 = 5x + 6$

$49 - 6 = 5x$

$43 = 5x$

$x = \frac{43}{5}$

Solución: $x = \frac{43}{5}$

b) $\log_3 (2 - 3x) = 0$

$3^0 = 2 - 3x$

$1 = 2 - 3x$

$3x = 2 - 1$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

Solución: $x = \frac{1}{3}$

c) $\log (\sqrt{x} - 3) = -1$

$10^{-1} = \sqrt{x} - 3$

$\frac{1}{10} + 3 = \sqrt{x}$

$\frac{31}{10} = \sqrt{x}$

$x = \left(\frac{31}{10}\right)^2 = \frac{961}{100}$

Solución: $x = \frac{961}{100}$

d) $\log_2 (x^2 - 3x) = 2$

$2^2 = x^2 - 3x$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 4,\ x_2 = -1$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

Página 63

1. Resuelve utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x+y=8 \\ 3x-y=11 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x+10y=6 \\ x+2y=1 \end{cases}$

Resuélvelos de nuevo por el método de igualación.

a) $\left.\begin{array}{r} x+5y=7 \\ 3x-5y=11 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x=7-5y \\ 3(7-5y)-5y=11 \to 21-20y=11 \to 20y=10 \to y=1/2 \end{array}$

$y=\frac{1}{2} \to x=7-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$

Solución: $x=\frac{9}{2},\ y=\frac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x+y=8 \\ 3x-y=11 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y=8-5x \\ 3x-8+5x=11 \to 8x=19 \to x=19/8 \end{array}$

$x=\frac{19}{8} \to y=8-5\cdot\frac{19}{8}=-\frac{31}{8}$

Solución: $x=\frac{19}{8},\ y=-\frac{31}{8}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x+10y=6 \\ x+2y=1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 3(1-2y)+10y=6 \to 3+4y=6 \to y=3/4 \\ x=1-2y \end{array}$

$y=\frac{3}{4} \to x=1-\frac{6}{4}=-\frac{1}{2}$

Solución: $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{4}$

2. Resuelve por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-5y=-26 \\ 4x+10y=32 \end{cases}$

a)
$$\begin{array}{rcl} x+5y & = & 7 \\ 3x-5y & = & 11 \\ \hline 4x & = & 18 \to x=9/2 \end{array}$$

$\frac{9}{2}+5y=7 \to y=\frac{5/2}{2}=\frac{1}{2}$

Solución: $x=\frac{9}{2},\ y=\frac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-5y=-26 \\ 4x+10y=32 \end{array}\right\} \xrightarrow{1.^a\cdot 2}$ $\begin{array}{rcl} 6x-10y & = & -52 \\ 4x+10y & = & 32 \\ \hline 10x & = & -20 \to x=-2 \end{array}$

$3\cdot(-2)-5y=-26 \to -6-5y=-26 \to y=4$

Solución: $x=-2,\ y=4$

3. Resuelve aplicando el método de reducción:

$$\begin{cases} \mathbf{22x + 17y = 49} \\ \mathbf{31x - 26y = 119} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 22x + 17y = 49 \\ 31x - 26y = 119 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{1.^a \cdot 31} \\ \xrightarrow{2.^a \cdot (-22)} \end{array} \begin{array}{r} 682x + 572y = 1519 \\ -682x + 572y = -2618 \\ \hline 1099y = -1099 \end{array} \rightarrow y = -1$$

$$\left.\begin{array}{r} 22x + 17y = 49 \\ 31x - 26y = 119 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{1.^a \cdot 26} \\ \xrightarrow{2.^a \cdot 17} \end{array} \begin{array}{r} 572x + 442y = 1274 \\ 527x - 442y = 2023 \\ \hline 1099x = 3297 \end{array} \rightarrow x = 3$$

Solución: $x = 3$, $y = -1$

3 Sistemas de ecuaciones no lineales

Página 64

1. Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ xy = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 15 \\ xy = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 15 + y \\ (15 + y)y = 100 \to y^2 + 15y - 100 = 0 \end{array}$

$$y = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2} = \frac{-15 \pm 25}{2} = \begin{cases} 5 \\ -20 \end{cases}$$

Si $y = 5 \to x - 5 = 15 \to x = 20$

Si $y = -20 \to x + 20 = 15 \to x = -5$

Soluciones: $x_1 = 20,\ y_1 = 5;\ x_2 = -5,\ y_2 = -20$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{array}\right\}$

$2x^2 = 50 \to x = \pm 5$

Si $x = 5 \to 25 + y^2 = 41 \to y = \pm 4$

Si $x = -5 \to 25 + y^2 = 41 \to y = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 4;\ x_2 = 5,\ y_2 = -4;\ x_3 = -5,\ y_3 = 4;\ x_4 = -5,\ y_4 = -4$

c) $\left.\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{array}\right\} x = 1 - y$

$(1 - y)^2 + (1 - y)y + y^2 = 21 \to y^2 - 2y + 1 - y^2 + y + y^2 - 21 = 0$

$$y^2 - y - 20 = 0 \to y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$$

Si $y = 5 \to x = -4$

Si $y = -4 \to x = 5$

Soluciones: $x_1 = -4,\ y_1 = 5;\ x_2 = 5,\ y_2 = -4$

Página 65

2. Resuelve:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = y + 6x + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y + 8 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{6}{xy} = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y - x} = 2 \\ 5x = 4y \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ x^2 - 7 = 2x - 1 + 2 \ \to \ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{array}$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

Si $x = 4 \to y = 7$

Si $x = -2 \to y = -5$

Soluciones: $x_1 = 4,\ y_1 = 7;\ x_2 = -2,\ y_2 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 18 \\ xy = y + 6x + 4 \end{array}\right\} \ y = 18 - x$

$x(18 - x) = (18 - x) + 6x + 4 \ \to \ 18x - x^2 - 18 + x - 6x - 4 = 0$

$x^2 - 13x + 22 = 0 \ \to \ x = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 88}}{2} = \dfrac{13 \pm 9}{2} = \begin{cases} 11 \\ 2 \end{cases}$

Si $x = 11 \to y = 7$

Si $x = 2 \to y = 16$

Soluciones: $x_1 = 11,\ y_1 = 7;\ x_2 = 2,\ y_2 = 16$

c) $\left.\begin{array}{l} y + 8 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{array}\right\} \ y = 2x$

$x^2 - 2x - 8 = 0 \ \to \ x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

Si $x = 4 \to y = 8$

Si $x = -2 \to y = -4$

Soluciones: $x_1 = 4,\ y_1 = 8;\ x_2 = -2,\ y_2 = -4$

d) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{6}{xy}=1\\ x+y=5\end{array}\right\}$

Trabajamos sobre la primera ecuación para simplificarla:

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{6}{xy}=1 \rightarrow \frac{2y}{xy}+\frac{3x}{xy}-\frac{6}{xy}=\frac{xy}{xy} \rightarrow 2y+3x-6=xy$$

Así, el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l}2y+3x-6=xy\\ x+y=5\end{array}\right\}$$

Despejamos x en la segunda ecuación, $x=5-y$, y sustituimos en la primera ecuación:

$$2y+3(5-y)-6=(5-y)\cdot y \rightarrow 2y+15-3y-6=5y-y^2 \rightarrow y^2-6y+9=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6}{2}=3 \rightarrow x=5-3=2$$

Solución: $x=2$, $y=3$

e) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}-\sqrt{y-x}=2\\ 5x=4y\end{array}\right\}\ y=\dfrac{5x}{4}$

$$\sqrt{x}-\sqrt{\frac{5x}{4}-x}=2 \rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{\frac{5x-4x}{4}}=2 \rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{\frac{x}{4}}=2 \rightarrow \sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}=2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}}{2}=2 \rightarrow \sqrt{x}=4 \rightarrow x=16 \rightarrow y=\frac{5\cdot 16}{4}=20$$

Solución: $x=16$, $y=20$

4 Inecuaciones con una incógnita

Página 66

1. Di dos soluciones enteras de cada una de las siguientes inecuaciones:

a) $3x < 50$ **b)** $2x + 5 \geq 25$

c) $7x + 4 < 19$ **d)** $x^2 + x < 50$

Por ejemplo:

a) $x = 2$, $x = 10$ b) $x = 10$, $x = 20$

c) $x = 0$, $x = 2$ d) $x = 0$, $x = 5$

2. ¿Cuáles de los siguientes valores son soluciones de la inecuación $x^2 - 8x < 12$?

a) -5 **b)** 0 **c)** $1,1$ **d)** 2

e) $\frac{5}{2}$ **f)** $3,2$ **g)** $5,3$ **h)** 10

a) $(-5)^2 - 8 \cdot (-5) = 25 + 40 = 65 > 12 \rightarrow x = -5$ no es solución.

b) $0 - 0 < 12 \rightarrow x = 0$ sí es solución.

c) $1,1^2 - 8 \cdot 1,1 = 1,21 - 8,8 = -7,59 < 12 \rightarrow x = 1,1$ sí es solución.

d) $2^2 - 2 \cdot 8 = 4 - 16 = -12 < 12 \rightarrow x = 2$ sí es solución.

e) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 8 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} - 20 = -\frac{55}{4} < 12 \rightarrow x = \frac{5}{2}$ sí es solución.

f) $3,2^2 - 8 \cdot 3,2 = 10,24 - 25,6 = -15,36 < 12 \rightarrow x = 3,2$ sí es solución.

g) $5,3^2 - 8 \cdot 5,3 = 28,09 - 42,4 = -14,31 < 12 \rightarrow x = 5,3$ sí es solución.

h) $10^2 - 8 \cdot 10 = 20 > 12 \rightarrow x = 10$ no es solución.

3. Traduce al lenguaje algebraico:

a) El triple de un número más ocho unidades es menor que 20.

b) El número total de alumnos de mi clase es menor que 35.

c) Si mi dinero aumentara al triple y, además, me tocaran 20 €, tendría, por lo menos, 110 €.

d) Todavía me quedan por pagar 20 mensualidades para acabar con la hipoteca. Es decir, al menos 6 000 €.

a) $3x + 8 < 20$

b) $1 \leq x < 35$

c) $3x + 20 \geq 110$

d) $20x \geq 6\,000$

Página 67

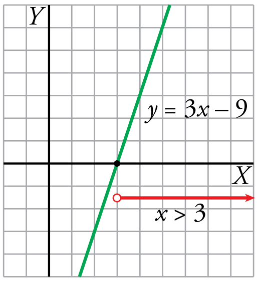
4. Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $3x > 9$ **b)** $3x \geq 9$

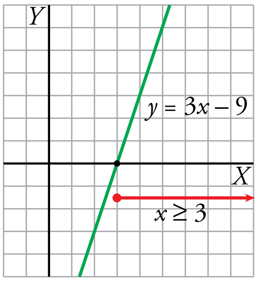
c) $3x + 2 < 11$ **d)** $3x + 2 \geq 11$

e) $2x - 3 < 5$ **f)** $2x - 3 \leq 5$

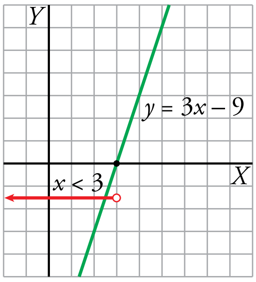
a) $3x > 9 \rightarrow 3x - 9 > 0$



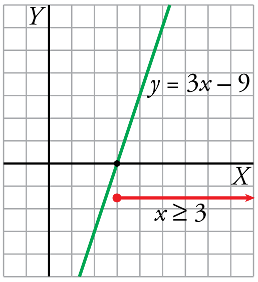
b) $3x \geq 9 \rightarrow 3x - 9 \geq 0$



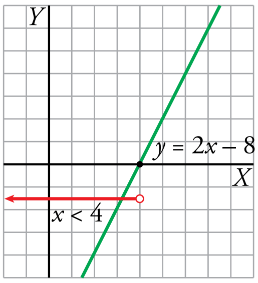
c) $3x + 2 < 11 \rightarrow 3x - 9 < 0$



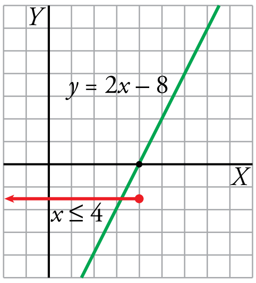
d) $3x + 2 \geq 11 \rightarrow 3x - 9 \geq 0$



e) $2x - 3 < 5 \rightarrow 2x - 8 < 0$



f) $2x - 3 \leq 5 \rightarrow 2x - 8 \leq 0$



5. Observa el siguiente diálogo:

— ¿Cuántas veces has ido al fútbol?

— El triple de ellas más 2 no llega a 10.

Expresa en lenguaje algebraico la respuesta, resuélvela y, después, da las soluciones teniendo en cuenta que han de ser números enteros no negativos.

$3x + 2 < 10 \rightarrow 3x < 8 \rightarrow x < \dfrac{8}{3} = 2,\overset{\frown}{6}$

La respuesta es: 2 veces o 1 vez o ninguna vez.

6. **Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones teniendo en cuenta la representación de la función $y = x^2 - 5x + 4$:**

a) $x + 4 \le x^2 - 5x + 4$

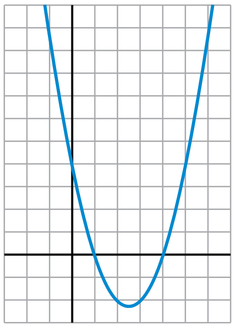
b) $-x + 4 < x^2 - 5x + 4$

c) $x^2 - 5x + 4 < x - 1$

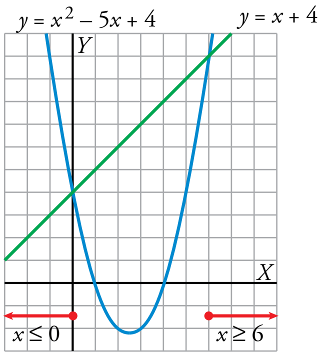
d) $x^2 - 5x + 4 \ge x + 1$

e) $x^2 - 5x + 4 < -6 + 2x$

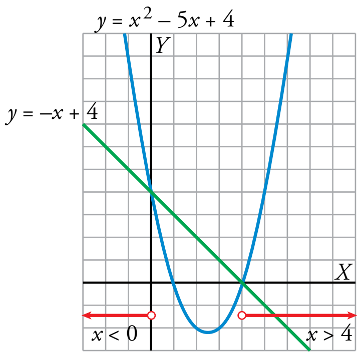
f) $x^2 - 5x + 4 \le -2$



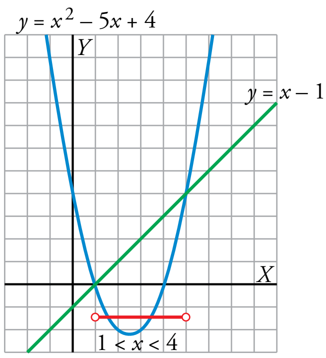
a)



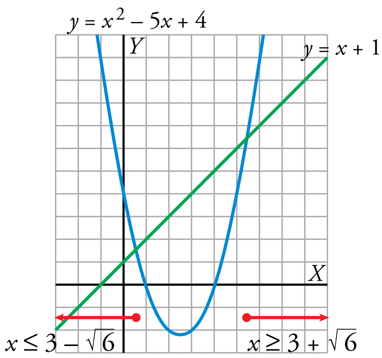
b)



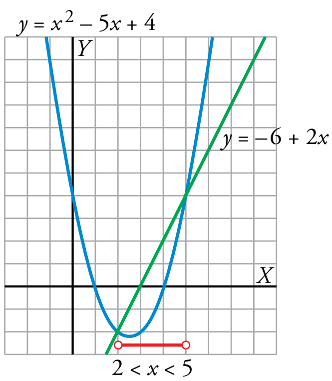
c)



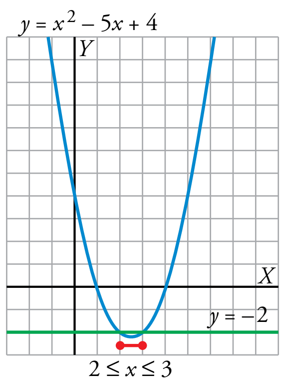
d)



e)



f)



Página 68

7. Resuelve algebraicamente las siguientes inecuaciones. Observa que son *muy parecidas* a las que se han resuelto arriba:

a) $2x + 4 \geq 0$ **b)** $2x + 4 < 0$ **c)** $-2x + 7 > \frac{x}{2} - 3$

d) $-2x + 7 \geq \frac{x}{2} - 3$ **e)** $-x^2 + 4x \geq 2x - 3$ **f)** $-x^2 + 4x < 2x - 3$

a) $2x + 4 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -4 \rightarrow x \geq -2$. Intervalo $[-2, +\infty)$.

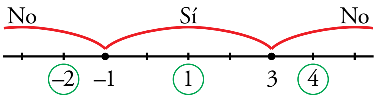
b) $2x + 4 < 0 \rightarrow 2x < -4 \rightarrow x < -2$. Intervalo $(-\infty, -2)$.

c) $-2x + 7 > \frac{x}{2} - 3 \rightarrow -4x + 14 > x - 6 \rightarrow 5x < 20 \rightarrow x < 4$. Intervalo $(-\infty, 4)$.

d) $-2x + 7 \geq \frac{x}{2} - 3 \rightarrow -4x + 14 \geq x - 6 \rightarrow 5x \leq 20 \rightarrow x \leq 4$. Intervalo $(-\infty, 4]$.

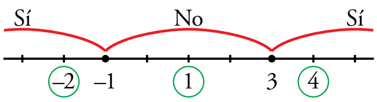
e) $-x^2 + 4x \geq 2x - 3 \rightarrow -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0$

Las raíces de $x^2 - 2x - 3 = 0$ son $x = 3$ y $x = -1$.



Solución: $-1 \leq x \leq 3$. Intervalo $[1, 3]$.

f) $-x^2 + 4x < 2x - 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$ (Raíces: 3 y -1)



Solución: $x < -1$ y $x > 3$. Intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

8. Resuelve algebraicamente.

a) $3x - 5 \geq 13$ **b)** $5x + 1 < x + 9$ **c)** $3 - 2x > x + 5$

d) $7 - 11x + 2 \leq 23 + 4x$ **e)** $x^2 - 3x + 2 \leq 4x - 8$

a) $3x - 5 \geq 13 \rightarrow 3x \geq 18 \rightarrow x \geq 6$. Intervalo $[6, +\infty)$.

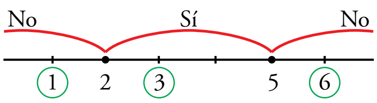
b) $5x + 1 < x + 9 \rightarrow 4x < 8 \rightarrow x < 2$. Intervalo $(-\infty, 2)$.

c) $3 - 2x > x + 5 \rightarrow 3x < -2 \rightarrow x < -\frac{2}{3}$. Intervalo $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$.

d) $7 - 11x + 2 \leq 23 + 4x \rightarrow 15x \geq -14 \rightarrow x \geq -\frac{14}{15}$. Intervalo $\left[-\frac{14}{15}, +\infty\right)$.

e) $x^2 - 3x + 2 \leq 4x - 8 \rightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0$

Las raíces de $x^2 - 7x + 10 = 0$ son $x = 5$ y $x = 2$.



Solución: $2 \leq x \leq 5$. Intervalo $[2, 5]$.

9. Resuelve las inecuaciones a), c) y d) del ejercicio 3 de la página 66 e interpreta la solución.

a) $3x + 8 < 20 \rightarrow 3x < 12 \rightarrow x < 4$. Intervalo $(-\infty, 4)$.

Cumplen esta condición todos los números que sean menores que 4.

b) Al tratarse de alumnos de una clase, x no puede ser negativo ni cero (alumnos de "mi" clase). Por tanto, $1 \le x < 35$. Intervalo $[1, 35)$.

El número de alumnos va desde 1 hasta 34.

c) $3x + 20 \ge 100 \rightarrow 3x \ge 90 \rightarrow x \ge 30$

Tiene, al menos, 30 euros.

d) $20x \ge 6\,000 \rightarrow x \ge 300$

Cada mensualidad de la hipoteca asciende, al menos, a 300 euros.

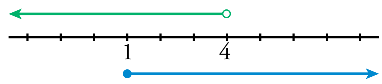
Página 69

10. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x+3<7 \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\le 13+4x \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\ge 13+4x \end{cases}$

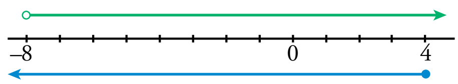
d) $\begin{cases} x^2-7x+6\le 0 \\ 3x+2>17 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-7x+6\le 0 \\ 2x+5<7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2-7x+6\le 0 \\ 2x+5\le 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x+3<7 \\ x-1\ge 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x<4 \\ x\ge 1 \end{array}$



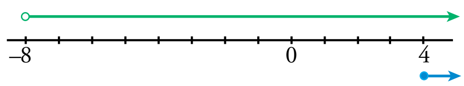
Solución: $1\le x<4$. Intervalo $[1, 4)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\le 13+4x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x>-8 \\ x\le 4 \end{array}$



Solución: $-8<x\le 4$. Intervalo $(-8, 4]$.

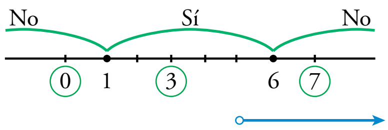
c) $\left.\begin{array}{l} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\ge 13+4x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x>-8 \\ x\ge 4 \end{array}$



Solución: $x\ge 4$. Intervalo $[4, +\infty)$.

d) $\left.\begin{array}{l} x^2-7x+6\le 0 \\ 3x+2>17 \end{array}\right\}$ $3x>15 \rightarrow x>5$

Las raíces de $x^2-7x+6=0$ son $x=6$ y $x=1$.

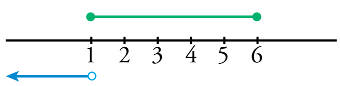


(Soluciones de $3x+2>17$)

Soluciones del sistema: $5<x\le 6$. Intervalo $(5, 6]$.

e) $\left.\begin{array}{l} x^2-7x+6\le 0 \\ 2x+5<7 \end{array}\right\}$ $2x<2 \rightarrow x<1$

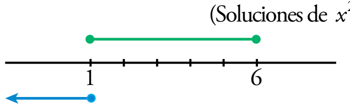
(Soluciones de $x^2-7x+6\le 0$; apartado d)



No hay soluciones para este sistema.

f) $\left.\begin{array}{l} x^2-7x+6\le 0 \\ 2x+5\le 7 \end{array}\right\}$ $x\le 1$

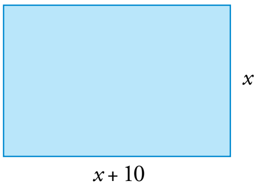
(Soluciones de $x^2-7x+6\le 0$; apartado d)



Solución del sistema: $x=1$.

Página 70

Hazlo tú. **La base de un rectángulo mide 10 cm más que su altura. Si la base aumenta un 20 % y la altura un 30 %, el perímetro aumenta un 24 %. Halla las dimensiones del rectángulo.**



base nueva = $1{,}2(x + 10)$

altura nueva = $1{,}3x$

perímetro nuevo = $2 \cdot [1{,}2(x + 10) + 1{,}3x]$

Como el perímetro nuevo es un 24 % mayor que el inicial:

$2 \cdot [1{,}2(x + 10) + 1{,}3x] = 1{,}24 \cdot 2(x + 10 + x)$

$5x + 24 = 4{,}96x + 24{,}8 \;\to\; 0{,}04x = 0{,}8 \;\to\; x = 20$

Solución: base = 30 cm, altura = 20 cm

Hazlo tú. **En otro viaje de 450 km, la velocidad de ida fue inferior en 15 km/h a la de vuelta y tardó una hora más. Halla las velocidades y los tiempos empleados.**

A la ida la velocidad es v y el tiempo t.

A la vuelta la velocidad es $v - 15$ y el tiempo $t + 1$.

Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} v \cdot t = 450 \\ (v - 15)(t + 1) = 450 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} v \cdot t = 450 \\ vt + v - 15t - 15 = 450 \end{array}\right\} \; 450 + v - 15t - 15 = 450 \;\to$$

$$\to\; v - 15t = 15 \;\to\; v = 15 + 15t \;\to (15 + 15t)t = 450 \;\to$$

$$\to\; 15t + 15t^2 = 450 \;\to\; 15t^2 + 15t - 450 = 0 \;\to\; t^2 + t - 30 = 0 \;\to$$

$$\to\; t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -6 \;\; \text{No vale.} \end{cases}$$

Si $t = 5 \;\to\; v = 15 + 15 \cdot 5 = 15 + 75 = 90$

Solución: A la ida va a 90 km/h y tarda 5 horas.

A la vuelta va a 75 km/h y tarda 6 horas.

Hazlo tú. **Resuelve.**

$$\mathbf{2^{3 + 2x} - 3 \cdot 2^{x + 1} + 1 = 0}$$

$2^3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 2 + 1 = 0 \;\to\; 8 \cdot (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$

Sea $z = 2^x$:

$$8z^2 - 6z + 1 = 0 \;\to\; z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{16} = \begin{cases} 1/2 \\ 1/4 \end{cases}$$

Si $z = \dfrac{1}{2} = 2^x \;\to\; x = -1$

Si $z = \dfrac{1}{4} = 2^x \;\to\; x = -2$

Soluciones: $x_1 = -1,\; x_2 = -2$

Ejercicios y problemas

Página 71

Practica

Ecuaciones

1. **Resuelve las siguientes ecuaciones. Las que sean de 2.º grado incompletas, resuélvelas sin aplicar la fórmula general.**

a) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{12} - \dfrac{x-3}{3} = 1 + \dfrac{(x+1)(x-2)}{6}$

b) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

c) $\dfrac{x(x-2)}{4} - \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-4}{3}$

d) $x\left(x+\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{x^2-1}{3} = 0$

a) $(x-1)(x+2) - 4(x-3) = 12 + 2(x+1)(x-2)$

$x^2 + x - 2 - 4x + 12 = 12 + 2x^2 - 2x - 4$

$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$

b) $x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 20$

$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2;\ x = -2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

c) $3x(x-2) - 2(x+1) = 6(x-3) - 4(x-4)$

$3x^2 - 6x - 2x - 2 = 6x - 18 - 4x + 16$

$3x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(3x-10) = 0 \rightarrow x = 0;\ x = \dfrac{10}{3}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{10}{3}$

d) $x\left(\dfrac{2x+1}{2}\right) - \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{x^2-1}{3} = 0$

$3x(2x+1) - 3(x-2) + 2(x^2-1) = 0$

$6x^2 + 3x - 3x + 6 + 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow 8x^2 + 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

2. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$ b) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

c) $(x+1)^2 = \frac{x}{2}(5x+6) - (2x^2+1)$ d) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25x}{2} = \left(\frac{1}{2} - x\right)(7x+1) - 4$

a) $4(x^2 - 6x + 9) - (4x^2 - 4x + 1) = 35$

$4x^2 - 24x + 36 - 4x^2 + 4x - 1 = 35 \rightarrow -20x = 0$

Solución: $x = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 - 8(1 + x) = x^2 - 2x + 1 - 4(2 + x)$

$x^2 + 2x + 1 - 8 - 8x = x^2 - 2x + 1 - 8 - 4x$

$-6x - 7 = -6x - 7 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $2(x^2 + 2x + 1) = 5x^2 + 6x - 2(2x^2 + 1)$

$2x^2 + 4x + 2 = 5x^2 + 6x - 4x^2 - 2$

$x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

d) $4x^2 + 4x + 1 + 25x = 5x + 1 - 14x^2 - 8$

$18x^2 + 24x + 8 = 0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm 0}{18} = -\frac{2}{3}$

Solución: $x = -\frac{2}{3}$

3. **Resuelve.**

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ **b)** $x^4 - 16 = 0$ **c)** $x^4 - 25x^2 = 0$

d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$ **e)** $(2x^2 + 1)^2 - 5 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$

a) Cambio de variable: $x^2 = y$

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ y = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

b) $x^4 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

c) $x^2(x^2 - 25) = 0$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = -5$

d) Cambio de variable: $x^2 = y$

$y^2 - 18y + 81 = 0 \rightarrow y = \frac{18 \pm \sqrt{0}}{2} = 9 \rightarrow x^2 = 9$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

e) $4x^4 + 4x^2 + 1 - 5 = x^4 - 4$

$3x^4 + 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$3x^2 + 4 = 0$ no tiene solución.

La solución de la ecuación es $x = 0$.

4. **Resuelve.**

a) $\dfrac{x+2}{x} + 3x = \dfrac{5x+6}{2}$ **b)** $\dfrac{x-4}{x} - \dfrac{x-1}{4x} = -3x$

c) $\dfrac{x-3}{x} + \dfrac{x+3}{x^2} = \dfrac{2}{3}$ **d)** $x - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{3x-1}{2}$

a) $2(x+2) + 2x \cdot 3x = x(5x+6)$

$2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 4 = 0 \;\rightarrow\; (x-2)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Comprobamos sobre la ecuación inicial la validez de la solución.

Solución: $x = 2$

b) $4(x-4) - (x-1) = -3x \cdot 4x$

$4x - 16 - x + 1 = -12x^2 \;\rightarrow\; 12x^2 + 3x - 15 = 0 \;\rightarrow\; 4x^2 + x - 5 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-1 \pm 9}{8} = \begin{cases} 1 \\ -10/8 = -5/4 \end{cases}$$

Se comprueba sobre la ecuación inicial que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 1,\; x_2 = -\dfrac{5}{4}$

c) $3x(x-3) + 3(x+3) = 2x^2$

$3x^2 - 9x + 3x + 9 - 2x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 6x + 9 = 0 \;\rightarrow\; (x-3)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 3$

Se comprueba que la solución es válida.

Solución: $x = 3$

d) $2x(x+1) - 2(x-1) = (3x-1)(x+1)$

$2x^2 + 2x - 2x + 2 = 3x^2 + 2x - 1 \;\rightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

Se comprueba que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 1,\; x_2 = -3$

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - 3 = \dfrac{2-x}{x}$ **b)** $\dfrac{3x+1}{4x+3} - \dfrac{1}{x} = 3$

c) $\dfrac{3x+4}{x+3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x+19}{4x+6}$ **d)** $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2-5x}{x^2+3x}$

a) $(x+1)x - 3x(x-1) = (2-x)(x-1)$

$x^2 + x - 3x^2 + 3x = -x^2 + 3x - 2 \;\rightarrow\; x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Se comprueba la validez de las dos soluciones.

Soluciones: $x_1 = 2,\; x_2 = -1$

b) $x(3x + 1) - (4x + 3) = 3x(4x + 3)$

$3x^2 + x - 4x - 3 = 12x^2 + 9x \rightarrow 9x^2 + 12x + 3 = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \dfrac{-4 \pm 12}{6} = \begin{cases} -1 \\ -1/3 \end{cases}$

Las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{1}{3}$

c) $2(3x + 4) - (x + 3) = x + 19$

$6x + 8 - 3 = x + 19 \rightarrow 4x = 14 \rightarrow x = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

Solución: $x = \dfrac{7}{2}$

d) $x - 2(x + 3) = 2 - 5x$

$x - 2x - 6 = 2 - 5x \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2$

6. **Resuelve.**

a) $x + \sqrt{25 - x^2} = 2x + 1$

b) $3x + \sqrt{6x + 10} = 35$

c) $x + 1 - \sqrt{5x + 1} = 0$

d) $\sqrt{4x^2 + 7x - 2} = x + 2$

a) $\sqrt{25 - x^2} = x + 1 \rightarrow 25 - x^2 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 3 \rightarrow \sqrt{25-9} = 3 + 1 \rightarrow x = 3$ es solución.

$x = -4 \rightarrow \sqrt{25-16} \neq -4 + 1 \rightarrow x = -4$ no vale.

Solución: $x = 3$

b) $\sqrt{6x + 10} = 35 - 3x \rightarrow 6x + 10 = 1\,225 + 9x^2 - 210x$

$9x^2 - 216x + 1\,215 = 0 \rightarrow x^2 - 24x + 135 = 0 \rightarrow x = \dfrac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \\ 9 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 15 \rightarrow \sqrt{6 \cdot 15 + 10} \neq 35 - 45 \rightarrow x = 15$ no vale.

$x = 9 \rightarrow \sqrt{54 + 10} = 37 - 27 \rightarrow x = 9$ es solución.

Solución: $x = 9$

c) $\sqrt{5x + 1} = x + 1 \rightarrow 5x + 1 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{1} = 1 \rightarrow x = 0$ es solución.

$x = 3 \rightarrow \sqrt{15 + 1} = 3 + 1 \rightarrow x = 3$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

d) $\left(\sqrt{4x^2+7x-2}\right)^2 = x^2+4x+4 \rightarrow 4x^2+7x-2-x^2-4x-4=0$

$3x^2+3x-6=0 \rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+18}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 1 \rightarrow \sqrt{4+7-2} = 1+2 \rightarrow x = 1$ es solución.

$x = -2 \rightarrow \sqrt{16-14-2} = -2+2 \rightarrow x = -2$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$

7. **Dos de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son y resuelve las otras.**

a) $x - 17 = \sqrt{169 - x^2}$ **b)** $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

c) $\sqrt{5x-7} - \sqrt{1-x} = 0$ **d)** $2\sqrt{5-4x} + 4x = 5$

a) $x^2 - 34x + 289 = 169 - x^2$

$2x^2 - 34x + 120 = 0 \rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0 \rightarrow x = \dfrac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 12 \rightarrow 12 - 17 = \sqrt{169-289} \rightarrow$ No vale.

$x = 5 \rightarrow 5 - 17 = \sqrt{169-25} \rightarrow$ No vale.

No tiene solución.

b) $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3-x} \rightarrow x^2+3 = 3-x \rightarrow x^2+x=0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \rightarrow$ Es solución.

$x = -1 \rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{4} \rightarrow$ Es solución.

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1$

c) $\sqrt{5x-7} = \sqrt{1-x} \rightarrow 5x-7 = 1-x \rightarrow 6x = 8 \rightarrow x = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

Comprobación:

$\sqrt{5 \cdot \dfrac{4}{3} - 7} \neq \sqrt{1 - \dfrac{4}{3}} \rightarrow$ No vale.

La ecuación no tiene solución.

d) $4(5-4x) = (5-4x)^2 \rightarrow 20 - 16x = 25 + 16x^2 - 40x$

$16x^2 - 24x + 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{24 \pm \sqrt{256}}{32} = \dfrac{24 \pm 16}{32} = \begin{cases} 5/4 \\ 1/4 \end{cases}$

Comprobación:

$x = \dfrac{5}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - \dfrac{5}{4} \cdot 4} + 4 \cdot \dfrac{5}{4} = 5 \rightarrow x = \dfrac{5}{4}$ es solución.

$x = \dfrac{1}{4} \rightarrow 2\sqrt{5 - \dfrac{1}{4} \cdot 4} + 4 \cdot \dfrac{1}{4} = 5 \rightarrow x = \dfrac{1}{4}$ es solución.

Soluciones: $x_1 = \dfrac{5}{4},\ x_2 = \dfrac{1}{4}$

8. **Resuelve.**

a) $x + \sqrt{7 - 3x} = -1$ **b)** $\sqrt{x} + \sqrt{3x - 2} = 2$

c) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$ **d)** $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{x + 1} = 2$

a) $\sqrt{7 - 3x} = -1 - x \rightarrow 7 - 3x = 1 + x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = -6 \rightarrow -6 + \sqrt{7 + 18} = -1$

$x = 1 \rightarrow 1 + \sqrt{7 - 3} = 3 \neq 1 \rightarrow$ No vale.

Solución: $x = -6$

b) $\sqrt{3x - 2} = 2 - \sqrt{x} \rightarrow 3x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \rightarrow (4\sqrt{x})^2 = (6 - 2x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 16x = 36 + 4x^2 - 24x \rightarrow 4x^2 - 40x + 36 = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 9 \rightarrow \sqrt{25} + \sqrt{9} \neq 2 \rightarrow$ No vale.

$x = 1 \rightarrow \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$

Solución: $x = 1$

c) $\sqrt{5x - 6} = 4 - 2\sqrt{x} \rightarrow 5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x} \rightarrow (8\sqrt{2x})^2 = (22 - 3x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 128x = 484 + 9x^2 - 132x \rightarrow 9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 242/9 \\ 2 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = \frac{242}{9} \rightarrow \sqrt{\frac{1156}{9}} + \sqrt{\frac{484}{9}} = \frac{34}{3} + \frac{22}{3} = \frac{56}{3} \neq 4 \rightarrow$ No vale.

$x = 2 \rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$

Solución: $x = 2$

d) $\sqrt{5x + 1} = 2 + \sqrt{x + 1} \rightarrow 5x + 1 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x + 1} \rightarrow 4x - 4 = 4\sqrt{x + 1} \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{x + 1} = x - 1 \rightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{1} - \sqrt{1} = 0 \neq 2 \rightarrow$ No vale.

$x = 3 \rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2$

Solución: $x = 3$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x+1} = \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{3^x} = 17$ **c)** $10^{1-x^2} = 0{,}001$ **d)** $81\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{x+2}$

a) $2^{x+1} = \sqrt{8} \to 2^{x+1} = 2^{3/2} \to x + 1 = \frac{3}{2} \to x = \frac{1}{2}$

Solución: $x = \frac{1}{2}$

b) $\sqrt{3^x} = 17 \to 3^{x/2} = 17 \to \log 3^{x/2} = \log 17 \to \frac{x}{2} \cdot \log 3 = \log 17 \to$

$\to x = \frac{\log 17}{\log 3} \cdot 2 \to x \approx 5{,}16$

Solución: $x \approx 5{,}16$

c) $10^{1-x^2} = 0{,}001 \to 10^{1-x^2} = 10^{-3} \to 1 - x^2 = -3 \to x = \sqrt{4} \to x = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

d) $81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{x+2} \to 81 \cdot (3^{-1})^x = 3^x \cdot 3^2 \to 81 \cdot (3^x)^{-1} = 9 \cdot 3^x \to \frac{81}{9} = (3^x)^2 \to$

$\to 9 = 3^{2x} \to 3^2 = 3^{2x} \to x = 1$

Solución: $x = 1$

10. Resuelve.

a) $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 200$ **b)** $7 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x = -\frac{3}{4}$

c) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} - 5 \cdot 3^x = 108$ **d)** $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 224$

a) $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 200 \to 3 \cdot 5^x + 5^x \cdot 5 = 200 \to 8 \cdot 5^x = 200 \to 5^x = \frac{200}{8} = 25 \to$

$\to 5^x = 5^2 \to x = 2$

Solución: $x = 2$

b) $7 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x = -\frac{3}{4} \to 7 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} - 5 \cdot 2^x = -\frac{3}{4} \to \frac{7}{2} \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x = -\frac{3}{4} \to$

$\to -\frac{3}{2} \cdot 2^x = -\frac{3}{4} \to 2^x = \frac{1}{2} \to 2^x = 2^{-1} \to x = -1$

Solución: $x = -1$

c) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} - 5 \cdot 3^x = 108 \to 2 \cdot 3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3} - 5 \cdot 3^x = 108 \to$

$\to \frac{18 \cdot 3^x + 3^x - 15 \cdot 3^x}{3} = 108 \to \frac{4 \cdot 3^x}{3} = 108 \to$

$\to 3^x = 81 = 3^4 \to x = 4$

Solución: $x = 4$

d) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 224 \to 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^{-3} = 224 \to$

$\to \frac{4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x + 2^x}{8} = 224 \to \frac{7 \cdot 2^x}{8} = 224 \to$

$\to 2^x = 256 = 2^8 \to x = 8$

Solución: $x = 8$

11. **Resuelve aplicando la definición de logaritmo.**

a) $\log_5 (2x-3) = 1$ **b)** $\log_4\left(\frac{x+1}{2}\right) = -2$

c) $\log_2 (\sqrt{x}-1) = 3$ **d)** $\log (2^x - 15) = 0$

a) $\log_5 (2x-3) = 1 \rightarrow 5^1 = 2x-3 \rightarrow 5+3 = 2x \rightarrow x = \frac{8}{2} \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4$

b) $\log_4\left(\frac{x+1}{2}\right) = -2 \rightarrow 4^{-2} = \frac{x+1}{2} \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{x+1}{2} \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{8x+8}{16} \rightarrow$

$\rightarrow 1 = 8x+8 \rightarrow -7 = 8x \rightarrow x = -\frac{7}{8}$

Solución: $x = -\frac{7}{8}$

c) $\log_2 (\sqrt{x}-1) = 3 \rightarrow 2^3 = \sqrt{x}-1 \rightarrow 8+1 = \sqrt{x} \rightarrow 9^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x = 81$

Solución: $x = 81$

d) $\log (2^x - 15) = 0 \rightarrow 10^0 = 2^x - 15 \rightarrow 1+15 = 2^x \rightarrow 16 = 2^x \rightarrow 2^4 = 2^x \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4$

12. **Aplica las propiedades de los logaritmos para resolver las siguientes ecuaciones:**

a) $2\log_3 x - \log_3 4 = 4$ **b)** $\log_2 x - \log_2 3 = 2$

c) $\log_2 (x-3) + \log_2 x = 2$ **d)** $\log (x-9) - \log x = 1$

a) $2 \cdot \log_3 x - \log_3 4 = 4 \rightarrow \log_3\left(\frac{x^2}{4}\right) = 4 \rightarrow 3^4 = \frac{x^2}{4} \rightarrow 81 \cdot 4 = x^2 \rightarrow$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{81 \cdot 4} \rightarrow x = \pm 18$

Solución: $x = 18$ ($x = -18$ no vale)

b) $\log_2 x - \log_2 3 = 2 \rightarrow \log_2\left(\frac{x}{3}\right) = 2 \rightarrow 2^2 = \frac{x}{3} \rightarrow 4 \cdot 3 = x \rightarrow x = 12$

Solución: $x = 12$

c) $\log_2 (x-3) + \log_2 x = 2 \rightarrow \log_2 [(x-3) \cdot x] = 2 \rightarrow (x-3) \cdot x = 2^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1. \text{ No vale.} \end{cases}$

Solución: $x = 4$

d) $\log (x-9) - \log x = 1 \rightarrow \log\left(\frac{x-9}{x}\right) = 1 \rightarrow 10^1 = \frac{x-9}{x} \rightarrow 10x = x-9 \rightarrow$

$\rightarrow 10x - x = -9 \rightarrow 9x = -9 \rightarrow x = \frac{-9}{9} = -1.$ No vale.

No tiene solución.

13. **Descompón en factores y resuelve.**

a) $x^3 - 4x = 0$ **b)** $x^3 + x^2 - 6x = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ **d)** $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

a) $x(x^2 - 4) = 0$

Soluciones: $x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2$

b) $x(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0;\ x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0;\ x_2 = -3;\ x_3 = 2$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = -2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -1$ (doble); $x_2 = 3$

14. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(x - 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$ **b)** $x(x^2 + 3x + 2) = 0$

c) $(x^2 - 3x)(2^{x+1} - 1) = 0$ **d)** $(x + 5)\ log_2\ (x - 3) = 0$

e) $(x^4 - 5x^2 + 4)(5^x - 10) = 0$ **f)** $(x^2 + 5)(\sqrt{x} - 3) = 0$

a) $(x - 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$

- $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$
- $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = -1$

b) $x(x^2 + 3x + 2) = 0$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = -2$

c) $(x^2 - 3x)(2^{x+1} - 1) = 0$

- $x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$
- $2^{x+1} - 1 = 0 \rightarrow 2^{x+1} = 1 \rightarrow 2^{x+1} = 2^0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

Soluciones: $x_1 = 0;\ x_2 = 3;\ x_3 = -1$

d) $(x + 5)\ log_2\ (x - 3) = 0$

- $x + 5 = 0 \ \to\ x = -5$, no vale
- $log_2\ (x - 3) = 0 \ \to\ 2^0 = x - 3 \ \to\ 1 + 3 = x \ \to\ x = 4$

Solución: $x = 4$

e) $(x^4 - 5x^2 + 4)(5^x - 10) = 0$

- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Hacemos $x^2 = t \ \to\ t^2 - 5t + 4 = 0 \ \to\ t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

Si $t = 4 \ \to\ x = \pm 2$

Si $t = 1 \ \to\ x = \pm 1$

- $5^x - 10 = 0 \ \to\ 5^x = 10 \ \to\ log\ 5^x = log\ 10 \ \to\ x \cdot log\ 5 = log\ 10 \ \to\ x = \dfrac{1}{log\ 5} = 1{,}43$

Soluciones: $x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1;\ x_5 = 1{,}43$

f) $(x^2 + 5)(\sqrt{x} - 3) = 0$

- $x^2 + 5 = 0 \ \to\ x^2 = -5$ no tiene solución
- $\sqrt{x} - 3 = 0 \ \to\ \sqrt{x} = 3 \ \to\ x = 9$

Solución: $x = 9$

15. **Despeja la incógnita y resuelve.**

a) $\boldsymbol{x^3 - 64 = 0}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{625}{x} - x^3 = 0}$

c) $\boldsymbol{\dfrac{3x}{4} + \dfrac{16}{9x^2} = 0}$

d) $\boldsymbol{\dfrac{x}{8} - \dfrac{2}{81x^3} = 0}$

a) $x^3 - 64 = 0 \ \to\ x^3 = 64 \ \to\ x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

Solución: $x = 4$

b) $\dfrac{625}{x} - x^3 = 0 \ \to\ 625 - x^4 = 0 \ \to\ x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 5,\ x_2 = -5$

c) $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{16}{9x^2} = 0 \ \to\ 27x^3 + 64 = 0 \ \to\ x = \sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}} = -\dfrac{4}{3}$

Solución: $x = -\dfrac{4}{3}$

d) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{2}{81x^3} = 0 \ \to\ 81x^4 - 16 = 0 \ \to\ x^4 = \dfrac{16}{81} \ \to\ x = \pm\dfrac{2}{3}$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{2}{3},\ x_2 = -\dfrac{2}{3}$

Página 72

Sistemas de ecuaciones

16. **Resuelve los siguientes sistemas aplicando dos veces el método de reducción:**

a) $\begin{cases} 13x - 12y = 127 \\ 21x + 17y = 96 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8,6x + 5,4y = 11 \\ 25x - 12y = -245 \end{cases}$

a)
$$\begin{array}{rcrcr} 273x & - & 252y & = & 2\,667 \\ -273x & - & 221y & = & -1\,248 \\ \hline & - & 473y & = & 1\,419 \end{array} \to y = -3 \qquad \begin{array}{rcrcr} 221x & - & 204y & = & 2\,159 \\ 252x & + & 204y & = & 1\,152 \\ \hline 473x & & & = & 3\,311 \end{array} \to x = 7$$

Solución: $x = 7,\ y = -3$

b)
$$\begin{array}{rcrcr} -215x & - & 135y & = & -275 \\ 215x & - & 103,2y & = & -2\,107 \\ \hline & - & 238,2y & = & -2\,382 \end{array} \to y = 10 \qquad \begin{array}{rcrcr} 103,2x & + & 64,8y & = & 132 \\ 135x & - & 64,8y & = & -1\,323 \\ \hline 238,2x & & & = & -1\,191 \end{array} \to x = -5$$

Solución: $x = -5,\ y = 10$

17. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{3y-1}{10} = \dfrac{-3}{10} \\[2mm] \dfrac{2x+3}{8} + \dfrac{y+7}{4} = \dfrac{19}{8} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{8} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{5}{8} \\[2mm] \dfrac{3x-1}{12} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2(x+2) - 3y + 1 = -3 \\ 2x + 3 + 2y + 14 = 19 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \to \begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & 8 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \\ \hline & & 5y & = & 10 \end{array}$

$y = 2 \to 2x - 6 = -8 \to 2x = -2 \to x = -1$

Solución: $x = -1,\ y = 2$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{8} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{5}{8} \\[2mm] \dfrac{3x-1}{12} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x+1}{8} + \dfrac{2y}{8} = \dfrac{5}{8} \\[2mm] \dfrac{3x-1}{12} + \dfrac{6y}{12} = \dfrac{2}{12} \end{cases}$

$\begin{cases} x + 1 + 2y = 5 \\ 3x - 1 + 6y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$

Multiplicamos por –3 la primera ecuación y la sumamos con la segunda:

$$\begin{array}{rcrcr} -3x & - & 6y & = & -12 \\ 3x & + & 6y & = & 3 \\ \hline & & 0 & = & -9 \end{array}$$

El sistema no tiene solución.

18. **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2y^2 - 8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = y - 3 \\ (y-3)^2 + y^2 = 5 \ \rightarrow \ y^2 - 6y + 9 + y^2 - 5 = 0 \ \rightarrow \ 2y^2 - 6y + 4 = 0 \end{cases}$

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \ \rightarrow \ y = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} y_1 = 1 \ \rightarrow \ x_1 = 1 - 3 = -2 \\ y_2 = 2 \ \rightarrow \ x_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -2, \ y_1 = 1; \ x_2 = -1, \ y_2 = 2$

b) $\begin{cases} x = 1 - y \\ (1-y)y + 2y = 2 \ \rightarrow \ y - y^2 + 2y = 2 \ \rightarrow \ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

$$y = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} y_1 = 1 \ \rightarrow \ x_1 = 1 - 1 = 0 \\ y_2 = 2 \ \rightarrow \ x_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0, \ y_1 = 1; \ x_2 = -1, \ y_2 = 2$

c) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \ \rightarrow \ 3x - 2x^2 - 9 - 4x^2 - 12x = 0 \end{cases}$

$$-6x^2 + 15x - 9 = 0 \ \rightarrow \ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Si $x_1 = 2 \ \rightarrow \ y_1 = 3 - 4 = -1$

Si $x_2 = 3 \ \rightarrow \ y_2 = 3 - 6 = -3$

Soluciones: $x_1 = 2, \ y_1 = -1; \ x_2 = 3, \ y_2 = -3$

d) $\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x \\ x\left(x + \dfrac{3}{2}x\right) = 2\left(-\dfrac{3}{2}x\right)^2 - 8 \ \rightarrow \ \dfrac{5}{2}x^2 = \dfrac{9}{2}x^2 - 8 \ \rightarrow \ -2x^2 = -8 \end{cases}$

$$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \ \rightarrow \ y_1 = -\dfrac{3}{2} \cdot 2 = -3 \\ x_2 = -2 \ \rightarrow \ y_2 = -\dfrac{3}{2}(-2) = 3 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2, \ y_1 = -3; \ x_2 = -2, \ y_2 = 3$

19. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

$2x^2 = 50 \to x^2 = 25 \to x = \pm 5$

Si $x = 5 \to 25 + y^2 = 41 \to y^2 = 16 \to y = \pm 4$

Si $x = -5 \to 25 + y^2 = 41 \to y^2 = 16 \to y = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 4;\ x_2 = 5,\ y_2 = -4;\ x_3 = -5,\ y_3 = 4;\ x_4 = -5,\ y_4 = -4$

b) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

$4x^2 = 36 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3$

Si $x = 3 \to 27 + 2y^2 = 35 \to y^2 = 4 \to y = \pm 2$

Si $x = -3 \to 27 + 2y^2 = 35 \to y^2 = 4 \to y = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 3,\ y_1 = 2;\ x_2 = 3,\ y_2 = -2;\ x_3 = -3,\ y_3 = 2;\ x_4 = -3,\ y_4 = -2$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$

$2x^2 + 2x = 60 \to x^2 + x = 30 \to x^2 + x - 30 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \begin{cases} -6 \\ 5 \end{cases}$$

• Si $x = -6 \to 36 + y^2 - 6 + y = 32 \to y^2 + y - 2 = 0$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

• Si $x = 5 \to 25 + y^2 + 5 + y = 32 \to y^2 + y - 2 = 0 \to y = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -6,\ y_1 = -2;\ x_2 = -6,\ y_2 = 1;\ x_3 = 5,\ y_3 = -2;\ x_4 = 5,\ y_4 = 1$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$

$2x^2 + 4x + 2 = 0 \to x^2 + 2x + 1 = 0 \to (x + 1)^2 = 0 \to x = -1$

Si $x = -1 \to 1 + 2y^2 - 1 + 1 = 0 \to 2y^2 = -1 \to$ No tiene solución.

20. **Resuelve y comprueba las soluciones.**

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{20} \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2 - x \\ 3y + 3x = -2xy \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 - x \\ 3(2 - x) + 3x = -2x(2 - x) \end{cases}$

$6 - 3x + 3x = -4x + 2x^2 \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm 4}{2}$ $\begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow y_1 = 2 + 1 = 3 \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -1,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = -1$

b) $\begin{cases} 20y + 20x = xy \rightarrow 20y + 20(3 - 2y) = (3 - 2y)y \\ x = 3 - 2y \end{cases}$

$20y + 60 - 40y = 3y - 2y^2 \rightarrow 2y^2 - 23y + 60 = 0 \rightarrow y = \dfrac{23 \pm 7}{4}$ $\begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 15/2 \end{cases}$

Si $y = 4 \rightarrow x = 3 - 8 = -5$

Si $y = \dfrac{15}{2} \rightarrow x = 3 - 2 \cdot \dfrac{15}{2} = -12$

Soluciones: $x_1 = -5,\ y_1 = 4;\ x_2 = -12,\ y_2 = \dfrac{15}{2}$

c) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \rightarrow \sqrt{y^2 - 2y + 1} + y = 5 \rightarrow \sqrt{(y-1)^2} + y = 5 \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = 9 - 6 + 1 = 4$

Solución: $x = 4,\ y = 3$

d) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \rightarrow y = \dfrac{2x - 1}{3}$

$2\sqrt{x+1} = \dfrac{2x - 1}{3} + 1 \rightarrow 2\sqrt{x+1} = \dfrac{2x - 1 + 3}{3} \rightarrow (2\sqrt{x+1})^2 = \left(\dfrac{2x + 2}{3}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 4(x + 1) = \dfrac{4x^2 + 8x + 4}{9} \rightarrow 36x + 36 = 4x^2 + 8x + 4 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 - 28x - 32 = 0 \rightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{7 \pm 9}{2}$ $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 8 \end{cases}$

Si $x = -1 \rightarrow y = -1$

Si $x = 8 \rightarrow y = \dfrac{16 - 1}{3} = 5$

Soluciones: $x_1 = -1,\ y_1 = -1;\ x_2 = 8,\ y_2 = 5$

21. **Resuelve.**

a) $\begin{cases} xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = 12 \\ x^2 - 5y^2 = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 4 \\ (x + y)^2 = 25 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{82}{9} \\ xy = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{15}{x} \\ x^2 + \left(\dfrac{15}{x}\right)^2 = 34 \ \to \ x^4 + 225 = 34x^2 \end{cases}$

Hacemos el cambio $x^2 = z \ \to \ z^2 - 34z + 225 = 0 \ \to \ z = \dfrac{34 \pm 16}{2} = \begin{cases} 25 \\ 9 \end{cases}$

Si $z = 25 \begin{cases} x = 5 \ \to \ y = 3 \\ x = -5 \ \to \ y = -3 \end{cases}$

Si $z = 9 \begin{cases} x = 3 \ \to \ y = 5 \\ x = -3 \ \to \ y = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = -3;\ x_3 = 3,\ y_3 = 5;\ x_4 = -3,\ y_4 = -5$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ x^2 - 5\left(\dfrac{12}{x}\right)^2 = 16 \ \to \ x^2 - \dfrac{720}{x^2} = 16 \ \to \ x^4 - 16x^2 - 720 = 0 \end{cases}$

Cambio $x^2 = z \ \to \ z^2 - 16z - 720 = 0 \ \to \ z = \dfrac{16 \pm 56}{2} = \begin{cases} 36 \\ -20 \text{ (no vale)} \end{cases}$

Si $z = 36 \begin{cases} x = 6 \ \to \ y = 2 \\ x = -6 \ \to \ y = -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 6,\ y_1 = 2;\ x_2 = -6,\ y_2 = -2$

c) $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ \left(x + \dfrac{4}{x}\right)^2 = 25 \ \to \ \left(\dfrac{x^2 + 4}{x}\right)^2 = 25 \ \to \ x^4 + 8x^2 + 16 = 25x^2 \ \to \ x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \end{cases}$

Hacemos el cambio $x^2 = z$:

$z^2 - 17z + 16 = 0 \ \to \ z = \dfrac{17 \pm \sqrt{17^2 - 64}}{2} = \dfrac{17 \pm 15}{2} = \begin{cases} 16 \\ 1 \end{cases}$

Si $z = 16 \begin{cases} x = 4 \ \to \ y = 1 \\ x = -4 \ \to \ y = -2 \end{cases}$

Si $z = 1 \begin{cases} x = 1 \ \to \ y = 4 \\ x = -1 \ \to \ y = -4 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 4,\ y_1 = 1;\ x_2 = -4,\ y_2 = -2;\ x_3 = 1,\ y_3 = 4;\ x_4 = -1,\ y_4 = -4$

d) $\begin{cases} x^2 + \left(-\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{82}{9} \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \to x^4 + 1 - \dfrac{82}{9}x^2 = 0 \to 9x^4 - 82x^2 + 9 = 0$

Cambio $x^2 = z \to 9z^2 - 82z + 9 = 0 \to z = \dfrac{82 \pm \sqrt{6724 - 324}}{18} = \dfrac{82 \pm 80}{18} = \begin{cases} 9 \\ 1/9 \end{cases}$

Si $z = 9 \begin{cases} x = 3 \to y = -1/3 \\ x = -3 \to y = 1/3 \end{cases}$

Si $z = \dfrac{1}{9} \begin{cases} x = 1/3 \to y = -3 \\ x = -1/3 \to y = 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ y_1 = -\dfrac{1}{3};\ x_2 = -3,\ y_2 = \dfrac{1}{3};\ x_3 = \dfrac{1}{3},\ y_3 = -3;\ x_4 = -\dfrac{1}{3},\ y_4 = 3$

22. **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x - 2^y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 9 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2^{x+1} - y = 0 \\ 2^x + y = 12 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x + y = 22 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x - 2^y = 4 \end{cases} \to x = 1 + y$

$2^{1+y} - 2^y = 4 \to 2 \cdot 2^y - 2^y = 4 \to 2^y = 4 \to 2^y = 2^2 \to y = 2$

Si $y = 2 \to x = 1 + 2 = 3$

Solución: $x = 3,\ y = 2$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 9 \end{cases} \to \begin{cases} xy = 10 \\ x - y = 9 \end{cases} \to \begin{cases} xy = 10 \\ x = 9 + y \end{cases} \to$

$\to (9 + y)y = 10 \to 9y + y^2 = 10 \to y^2 + 9y - 10 = 0 \to$

$\to y = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{121}}{2} \begin{cases} y = 1 \\ y = -10, \text{ no vale} \end{cases}$

Si $y = 1 \to x = 9 + 1 = 10$

Solución: $x = 10,\ y = 1$

c) $\begin{cases} 2^{x+1} - y = 0 \\ 2^x + y = 12 \end{cases} \to \begin{array}{r} 2 \cdot 2^x - y = 0 \\ 2^x + y = 12 \\ \hline 3 \cdot 2^x \quad\ = 12 \end{array} \to 2^x = \dfrac{12}{3} = 4 \to x = 2$

Si $x = 2 \to 2^{2+1} - y = 0 \to y = 2^3 = 8$

Solución: $x = 2,\ y = 8$

d) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x + y = 22 \end{cases} \to \begin{cases} \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1 \\ x + y = 22 \end{cases} \to \begin{cases} 10^1 = \dfrac{x}{y} \\ x + y = 22 \end{cases} \to$

$\to x = 10y \to 10y + y = 22 \to 11y = 22 \to y = 2$

$x = 10 \cdot 2 = 20$

Solución: $x = 20,\ y = 2$

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

23. Resuelve.

a) $\dfrac{7-3x}{2} < x+1$ **b)** $\dfrac{x+4}{3} + 3 \ge \dfrac{x+10}{6}$

c) $2x - 2(3x - 5) < x$ **d)** $x - 1 - \dfrac{x-1}{2} < 0$

a) $7 - 3x < 2x + 2 \rightarrow -5x < -5 \rightarrow 5x > 5 \rightarrow x > 1$

Solución: $(1, +\infty)$

b) $2x + 8 + 18 \ge x + 10 \rightarrow x \ge -16$

Solución: $[-16, +\infty)$

c) $2x - 6x + 10 < x \rightarrow -5x < -10 \rightarrow 5x > 10 \rightarrow x > 2$

Solución: $(2, +\infty)$

d) $2x - 2 - x + 1 < 0 \rightarrow x - 1 < 0 \rightarrow x < 1$

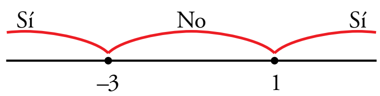
Solución: $(-\infty, 1)$

24. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$ **b)** $x^2 - 3x - 10 \le 0$

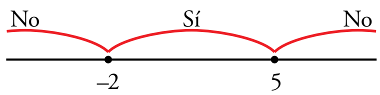
c) $x^2 - 4x - 5 < 0$ **d)** $2x^2 + 9x - 5 \ge 0$

a) $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$



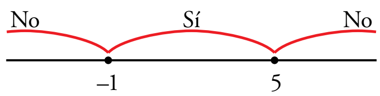
Solución: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

b) $x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$



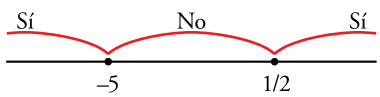
Solución: $[-2, 5]$

c) $x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$



Solución: $(-1, 5)$

d) $2x^2 + 9x - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -5 \end{cases}$



Solución: $(-\infty, -5] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

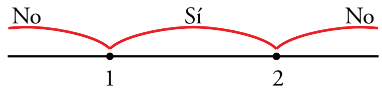
25. **Resuelve.**

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ **b)** $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

c) $x^2 - 2x - 7 > 5 - x$ **d)** $x^2 < \dfrac{x+7}{6}$

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

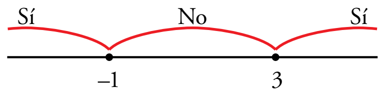
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$



Solución: $[1, 2]$

b) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

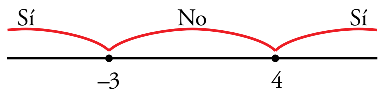
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

c) $x^2 - 2x - 7 > 5 - x \rightarrow x^2 - x - 12 > 0$

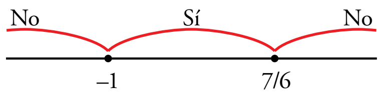
$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$

d) $x^2 < \dfrac{x+7}{6} \rightarrow 6x^2 < x + 7 \rightarrow 6x^2 - x - 7 < 0$

$$6x^2 - x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{12} = \frac{1 \pm 13}{12} = \begin{cases} 7/6 \\ -1 \end{cases}$$



Solución: $\left(-1, \dfrac{7}{6}\right)$

26. **Algunas inecuaciones no tienen solución y otras tienen por solución cualquier número. Busca entre las siguientes las que son de estos tipos.**

a) $x^2 + 4 > 3$ **b)** $x^2 + x + 2 < 0$

c) $x^2 + 7 < 5x$ **d)** $x^2 + 4x + 4 > 0$

a) $x^2 + 4 > 3 \rightarrow x^2 > -1$ Solución: $(-\infty, +\infty)$

b) $x^2 + x + 2 < 0$ No tiene solución.

c) $x^2 + 7 < 5x \rightarrow x^2 - 5x + 7 < 0$ No tiene solución.

d) $x^2 + 4x + 4 > 0 \rightarrow (x + 2)^2 > 0$ Solución: $(-\infty, +\infty)$

27. **Resuelve las inecuaciones siguientes:**

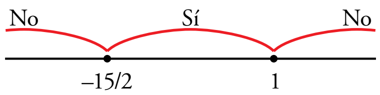
a) $3x(x+4)-x(x-1)<15$

b) $2x(x+3)-2(3x+5)+x>0$

c) $\dfrac{x^2-9}{5}-\dfrac{x^2-4}{15}<\dfrac{1-2x}{3}$

a) $3x^2+12x-x^2+x-15<0 \;\rightarrow\; 2x^2+13x-15<0$

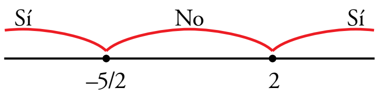
$$2x^2+13x-15=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-13\pm\sqrt{169+120}}{4}=\frac{-13\pm 17}{4}= \begin{cases} -15/2 \\ 1 \end{cases}$$



Solución: $\left(-\dfrac{15}{2},\ 1\right)$

b) $2x^2+6x-6x-10+x>0 \;\rightarrow\; 2x^2+x-10>0$

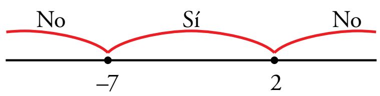
$$2x^2+x-10=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4}=\frac{-1\pm 9}{4}= \begin{cases} 2 \\ -5/2 \end{cases}$$



Solución: $\left(-\infty,\ -\dfrac{5}{2}\right)\cup(2,\ +\infty)$

c) $3x^2-27-x^2+4<5-10x \;\rightarrow\; 2x^2+10x-28<0 \;\rightarrow\; x^2+5x-14<0$

$$x^2+5x-14=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{2}=\frac{-5\pm 9}{2}= \begin{cases} -7 \\ 2 \end{cases}$$



Solución: $(-7,\ 2)$

28. **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

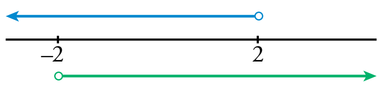
a) $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2+x>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x-3\le x+1 \\ 2x+6\ge x+2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2x+5}{3}<x-1 \\ \dfrac{x}{3}-1<\dfrac{2x-1}{5} \end{cases}$

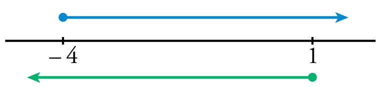
d) $\begin{cases} \dfrac{x+13}{6}<\dfrac{39-2x}{18} \\ \dfrac{3x-5}{4}<-1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2-x>0 \;\rightarrow\; -x>-2 \;\rightarrow\; x<2 \\ 2+x>0 \;\rightarrow\; x>-2 \end{cases}$



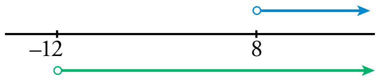
Solución: $(-2,\ 2)$

b) $\begin{cases} 5x-3\le x+1 \;\rightarrow\; 4x\le 4 \;\rightarrow\; x\le 1 \\ 2x+6\ge x+2 \;\rightarrow\; x\ge -4 \end{cases}$



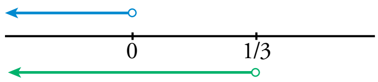
Solución: $[-4,\ 1]$

c) $\begin{cases} \dfrac{2x+5}{3} < x-1 \;\rightarrow\; 2x+5 < 3x-3 \;\rightarrow\; -x < -8 \;\rightarrow\; x > 8 \\ \dfrac{x}{3} - 1 < \dfrac{2x-1}{5} \;\rightarrow\; 5x - 15 < 6x - 3 \;\rightarrow\; -x < 12 \;\rightarrow\; x > -12 \end{cases}$



Solución: $(8, +\infty)$

d) $\begin{cases} 3x + 39 < 39 - 2x \;\rightarrow\; 5x < 0 \;\rightarrow\; x < 0 \\ 3x - 5 < -4 \;\rightarrow\; 3x < 1 \;\rightarrow\; x < 1/3 \end{cases}$



Solución: $(-\infty, 0)$

29. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{4} < \dfrac{x}{2} - 3 \\ \dfrac{8-x}{3} < \dfrac{1+x}{2} - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2x+2}{3} > \dfrac{3x-7}{6} \\ \dfrac{2x-1}{4} + 2x < \dfrac{2x-9}{4} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 2 < 2x - 12 \;\rightarrow\; 14 < x \;\rightarrow\; x > 14 \\ 16 - 2x < 3 + 3x - 6 \;\rightarrow\; 19 < 5x \;\rightarrow\; x > 19/5 \end{cases}$

Solución: $(14, +\infty)$

b) $\begin{cases} 3x - 3 + 4x + 4 > 3x - 7 \;\rightarrow\; 4x > -8 \;\rightarrow\; x > -2 \\ 2x - 1 + 8x < 2x - 9 \;\rightarrow\; 8x < -8 \;\rightarrow\; x < -1 \end{cases}$

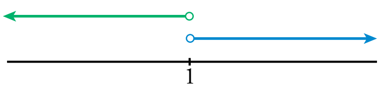
Solución: $(-2, -1)$

30. **Comprueba que estos dos sistemas de inecuaciones no tienen solución:**

a) $\begin{cases} 8x + 7 < 16 - x \\ -3x + 5 < 2x \end{cases}$

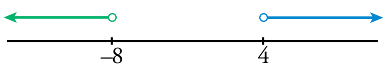
b) $\begin{cases} 3x + 5 < 2x - 3 \\ \dfrac{x+3}{7} < x - 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 8x + 7 < 16 - x \;\rightarrow\; 9x < 9 \;\rightarrow\; x < 1 \\ -3x + 5 < 2x \;\rightarrow\; 5 < 5x \;\rightarrow\; x > 1 \end{cases}$



No tiene solución.

b) $\begin{cases} 3x + 5 < 2x - 3 \;\rightarrow\; x < -8 \\ x + 3 < 7x - 21 \;\rightarrow\; 24 < 6x \;\rightarrow\; x > 4 \end{cases}$



No tiene solución.

Página 73

Aplica lo aprendido

31. **Traduce a lenguaje algebraico los siguientes enunciados y resuelve:**

a) La mitad de un número menos 10 unidades es menor que 7.

b) Si a los tres cuartos de un número le resto 2, obtengo más que si a su mitad le sumo 5.

c) La suma de dos números consecutivos no supera a 8.

d) El perímetro de un rectángulo cuya base mide 3 cm más que la altura es menor que 50 m.

a) x = número buscado.

$$\frac{x}{2} - 10 < 7 \rightarrow x < 34$$

Solución: $x \in (-\infty, 34)$

b) x = número buscado.

$$\frac{3}{4}x - 2 > \frac{x}{2} + 5 \rightarrow x > 28$$

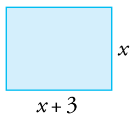
Solución: $x \in (28, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l} \text{n.º menor} \rightarrow x \\ \text{n.º mayor} \rightarrow x+1 \end{array}\right\}$

$$x + x + 1 \le 8 \rightarrow 2x + 1 \le 8 \rightarrow x \le \frac{7}{2} = 3{,}5 \rightarrow x \in \{3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

d) $2x + 2(x + 3) < 50 \rightarrow 2x + 2x + 6 < 50 \rightarrow$

$$\rightarrow 4x < 44 \rightarrow x < \frac{44}{4} = 11$$



Solución: $x \in (0, 11)$ porque $x > 0$ debido al contexto del enunciado.

32. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - z = 4 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 2z \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = y \\ y - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 6 + 2z \\ 6 + 2z + z = 3 \rightarrow 3z = -3 \rightarrow z = -1 \end{array}$

$y = 6 + 2 \cdot (-1) = 4; \; x = 4$

Solución: $x = 4, \; y = 4, \; z = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} x - z = 4 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 2z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = z + 4 \\ 2z + 8 + y = 7 \\ z + 4 + y = 2z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -2z - 1 \\ -z + 4 - 2z - 1 = 0 \rightarrow -3z = -3 \rightarrow z = 1 \end{array}$

$y = -2z - 1 = -3; \; x = z + 4 = 5$

Solución: $x = 5, \; y = -3, \; z = 1$

33. **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:**

a) $\log(x-2)+\log(x-3)=1-\log 5$ **b)** $\frac{1}{2}\log(3x+5)+\frac{1}{2}\log x=1$

c) $2\log x-3\log 2=\log(x+6)$

a) $\log(x-2)+\log(x-3)=1-\log 5 \rightarrow \log(x-2)+\log(x-3)+\log 5=1 \rightarrow$

$\rightarrow \log[(x-2)\cdot(x-3)\cdot 5]=1 \rightarrow 10^1=5\cdot(x-2)(x-3) \rightarrow 10=5x^2-25x+30 \rightarrow$

$\rightarrow 5x^2-25x+20=0 \rightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases}4\\1, \text{ no vale}\end{cases}$

Comprobación: $\log(4-2)+\log(4-3)=1-\log 5 \rightarrow x=4$ es válida

Solución: $x=4$

b) $\frac{1}{2}\cdot\log(3x+5)+\frac{1}{2}\cdot\log x=1 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot[\log(3x+5)+\log x]=1 \rightarrow$

$\rightarrow \log[(3x+5)\cdot x]=2 \rightarrow 10^2=(3x+5)\cdot x \rightarrow 100=3x^2+5x \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2+5x-100=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+1200}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{1225}}{6}=\begin{cases}5\\-20/3, \text{ no vale}\end{cases}$

Comprobación: $\frac{1}{2}\cdot\log(15+5)+\frac{1}{2}\cdot\log 5=1 \rightarrow x=5$ es válida

Solución: $x=5$

c) $2\log x-3\log 2=\log(x+6) \rightarrow \log(x^2)-\log(2^3)=\log(x+6) \rightarrow$

$\rightarrow \log\left(\frac{x^2}{8}\right)=\log(x+6) \rightarrow \frac{x^2}{8}=x+6 \rightarrow x^2=8x+48 \rightarrow x^2-8x-48=0 \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64+192}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{256}}{2}=\begin{cases}12\\-4, \text{ no vale}\end{cases}$

Comprobación: $2\log 12-3\log 2=\log(12+6) \rightarrow x=12$ es válida.

Solución: $x=12$

34. **Resuelve las ecuaciones siguientes mediante el cambio $x^3=t$:**

a) $x^6+7x^3-8=0$ **b)** $x^6-2x^3+1=0$

a) $t^2+7t-8=0$

$t=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2}=\begin{cases}1\\-8\end{cases}$

Si $t=1 \rightarrow x=\sqrt[3]{1}=1$

Si $t=-8 \rightarrow x=\sqrt[3]{-8}=-2$

Soluciones: $x_1=1$, $x_2=-2$

b) $t^2-2t+1=0$

$t=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$

Si $t=1 \rightarrow x=\sqrt[3]{1}=1$

Solución: $x=1$

35. **Resuelve mediante el cambio de variable $2^x = t$.**

a) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$ **b)** $4^x - 8 = 2^{x+1}$

c) $2^{3-x} = 5 - 2^{x-1}$ **d)** $3 \cdot 4^x + 9 \cdot 2^x - 30 = 0$

a) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320 \rightarrow 4^x \cdot 4 + 2^x \cdot 2^3 = 320$

Sea $t = 2^x$:

$4t^2 + 8t - 320 = 0 \rightarrow t^2 + 2t - 80 = 0$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+18}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\ \dfrac{-2-18}{2} = -\dfrac{20}{2} = -10 \end{cases}$$

Si $t = 8 \rightarrow x = 3$

Si $t = -10 \rightarrow$ No hay solución

Solución: $x = 3$

b) $4^x - 8 = 2^{x+1} \rightarrow (2^x)^2 - 8 = 2 \cdot 2^x$

Sea $t = 2^x$:

$t^2 - 8 = 2t \rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Si $t = 4 \rightarrow x = 2$

Si $t = -2 \rightarrow$ No hay solución

Solución: $x = 2$

c) $2^{3-x} = 5 - 2^{x-1} \rightarrow \dfrac{2^3}{2^x} = 5 - \dfrac{2^x}{2} \rightarrow \dfrac{8}{2^x} = \dfrac{10 - 2^x}{2}$

Sea $t = 2^x$:

$\dfrac{8}{t} = \dfrac{10 - t}{2} \rightarrow 2 \cdot 8 = t(10 - t) \rightarrow 16 = 10t - t^2 \rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

Si $t = 8 \rightarrow x = 3$

Si $t = 2 \rightarrow x = 1$

Soluciones: $x = 1$, $x = 3$

d) $3 \cdot 4^x + 9 \cdot 2^x - 30 = 0$

Sea $t = 2^x$:

$3t^2 + 9t - 30 = 0 \rightarrow t^2 + 3t - 10 = 0$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

Si $t = 2 \rightarrow x = 1$

Si $t = -5 \rightarrow$ No hay solución.

Solución: $x = 1$

36. **Por la mezcla de 5 kg de pintura verde y 3 kg de pintura blanca he pagado 69 €. Calcula el precio de un kilogramo de pintura blanca y de pintura verde sabiendo que si mezclase un kilogramo de cada una el precio de la mezcla sería 15 €.**

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 5x + 3y = 69 \\ -3x - 3y = -45 \\ \hline 2x \qquad = 24 \end{array} \;\to\; x = 12$$

$y = 15 - x \;\to\; y = 15 - 12 = 3$

La pintura verde cuesta 12 € el kilogramo, y la blanca, 3 €.

37. **Un joyero tiene dos lingotes de oro, uno con un 80 % de pureza y otro con un 95 %. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kg con un 86 % de pureza?**

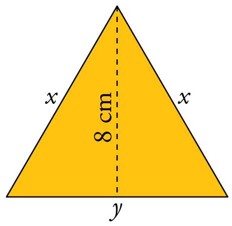
$$\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}95y = 0{,}86\,(x + y) \\ x + \qquad y = 5 \;\to\; x = 5 - y \end{cases}$$

$0{,}8(5 - y) + 0{,}95y = 0{,}86(5 - y + y) \;\to\; 4 - 0{,}8y + 0{,}95y = 4{,}3 \;\to\; 0{,}15y = 0{,}3 \;\to$

$\to\; y = 2 \;\to\; x = 3$

Debe fundir 3 kg del de 80 % de pureza con 2 kg del lingote que tiene un 95 % de pureza.

38. **Un triángulo isósceles mide 32 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 8 cm. Calcula los lados del triángulo.**



$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 32 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 64 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 32 - 2x \\ 4x^2 + (32 - 2x)^2 = 256 \end{array}$$

$4x^2 - 1\,024 + 128x - 4x^2 = 256 \;\to\; 128x = 1\,280 \;\to\; x = 10$ cm

$y = 32 - 2 \cdot 10 = 12$ cm

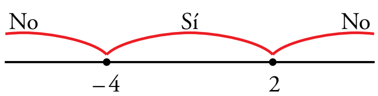
Los lados iguales miden 10 cm, y el lado desigual, 12 cm.

Resuelve problemas

39. **El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, es menor que 8. ¿Cuál puede ser ese número?**

$x(x - 2) < 8 \;\to\; x^2 + 2x < 8 \;\to\; x^2 + 2x - 8 < 0$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \;\to\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$



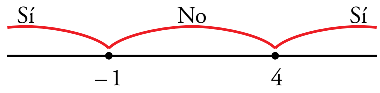
Solución: (–4, 2)

El número puede ser: –3, –2, –1, 0 o 1.

40. **Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos más de 4. ¿Qué podemos decir de ese número?**

$x^2 - 3x > 4 \;\rightarrow\; x^2 - 3x - 4 > 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$



El número está en $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$, es decir, puede ser menor que –1 o mayor que 4.

41. **Tres amigos cobran 756 € por cierto trabajo. El primero ha dedicado al trabajo 12 horas, y el tercero, que ha dedicado el doble de horas que el segundo, ha cobrado 360 €. ¿Cuántas horas y cuánto dinero corresponde a cada uno?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{n.º de horas trabajadas por el 2.º} \rightarrow x \\ \text{€/hora que cobran por el trabajo} \rightarrow y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2xy = 360 \\ (12 + x + 2x)y = 756 \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{360}{2x} = \frac{180}{x}$$

$(12 + 3x)\dfrac{180}{x} = 756 \;\rightarrow\; (12 + 3x)180 = 756x$

$2\,160 + 540x = 756x \;\rightarrow\; 2\,160 = 216x \;\rightarrow\; x = \dfrac{2160}{216} = 10 \;\rightarrow\; y = \dfrac{180}{10} = 18$

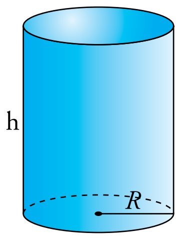
Solución:

El 1.º trabaja 12 horas y cobra 216 €.

El 2.º trabaja 10 horas y cobra 180 €.

El 3.º trabaja 20 horas y cobra 360 €.

42. **El área total de un cilindro es 112π cm², y entre el radio y la altura suman 14 cm. Halla su volumen.**



$$\left.\begin{array}{l} 2\pi R\text{h} + 2\pi R^2 = 112\pi \\ R + \text{h} = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi R\text{h} + \pi R^2 = 56\pi \;\rightarrow\; R\text{h} + R^2 = 56 \\ \text{h} = 14 - R \end{array}$$

$R(14 - R) + R^2 = 56 \;\rightarrow\; 14R - R^2 + R^2 = 56 \;\rightarrow\; R = 4$ cm

$\text{h} = 14 - 4 = 10$ cm

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi R^2\text{h} = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi \text{ cm}^3$

43. **La nota media de un examen de Matemáticas de la clase de 4.º C fue 5,4, y la de 4.º B, 6,4. ¿Cuántos estudiantes hay en cada grupo si en total son 50 y con una nota media de 5,88?**

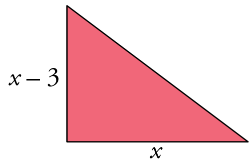
$$\left.\begin{array}{l} \text{n.º alumnos 4.º C} \rightarrow x \\ \text{n.º alumnos 4.º B} \rightarrow y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ \dfrac{5,4x + 6,4y}{50} = 5,88 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 50 - y \\ 5,4x + 6,4y = 294 \end{array}\right\}$$

$5,4(50 - y) + 6,4y = 294 \;\rightarrow\; 270 - 5,4y + 6,4y = 294 \;\rightarrow\; y = 24 \;\rightarrow\; x = 50 - 24 = 26$

Solución: En 4.º C hay 26 alumnos.

En 4.º B hay 24 alumnos.

44. **El perímetro de un triángulo rectángulo es 36 m y uno de sus catetos mide 3 cm menos que el otro. Halla los lados del triángulo.**



$x + (x - 3) + \sqrt{(x-3)^2 + x^2} = 36$

$2x + \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = 39 \rightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = 39 - 2x$

$2x^2 - 6x + 9 = 1\,521 + 4x^2 - 156x$

$2x^2 - 150x + 1\,512 = 0 \rightarrow x^2 - 75x + 756 = 0$

$$x = \frac{75 \pm \sqrt{5\,625 - 3\,024}}{2} = \frac{75 \pm 51}{2} = \begin{cases} 63 \rightarrow \text{No vale.} \\ 12 \end{cases}$$

Hipotenusa $= \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

Los catetos miden 12 cm y 9 cm, y la hipotenusa, 15 cm.

45. **Una persona tarda 3 horas más que otra en hacer el mismo trabajo. Si lo hacen entre las dos, tardan 2 horas. ¿Cuánto tarda cada una por separado?**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \rightarrow 2(x+3) + 2x = x(x+3) \rightarrow 2x + 6 + 2x = x^2 + 3x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

Una tarda 3 h, y otra, 6 h.

46. **Un anticuario vendió dos relojes de bolsillo por 210 €. Con uno obtuvo una ganancia del 10 % y con el otro perdió el 10 %. En total obtuvo una ganancia del 5 % sobre el precio de compra. ¿Cuál fue el precio de compra de cada uno de los relojes?**

Precio de compra de los relojes: x e y

$$\left.\begin{array}{l} 1,1x + 0,9y = 210 \\ 1,05(x+y) = 210 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1,1x + 0,9y = 210 \rightarrow y = \dfrac{210 - 1,1x}{0,9} \\ 1,05x + 1,05y = 210 \end{array}$$

$$1,05x + 1,05\left(\frac{210 - 1,1x}{0,9}\right) = 210 \rightarrow 0,945x + 220,5 - 1,155x = 189 \rightarrow$$

$$\rightarrow -0,21x = -31,5 \rightarrow x = 150,\ y = \frac{210 - 1,1 \cdot 150}{0,9} = 50$$

Los relojes costaron 150 € uno y 50 € el otro.

47. **Yago ha comprado libros, todos del mismo precio, y ha pagado 90 €. Pero por ser buen cliente, Sara, la librera, le regaló 3 más, y así cada libro le cuesta 5 € menos. ¿Cuántos libros se llevó y cuál es el precio que pagó por cada uno?**

N.º de libros que compró Yago $\to x$

$\frac{90}{x}$ € cuesta cada libro antes del regalo.

$\frac{90}{x+3}$ € cuesta cada libro tras el regalo.

$$\frac{90}{x+3} + 5 = \frac{90}{x} \to \frac{90x + 5x(x+3)}{(x+3)x} = \frac{90(x+3)}{(x+3)x} \to 90x + 5x^2 + 15x = 90x + 270 \to$$

$$\to 5x^2 + 15x - 270 = 0 \to x^2 + 3x - 54 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+216}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{2} = \begin{cases} 6 \\ -9, \text{ no vale.} \end{cases}$$

Solución: Yago compró 6 libros.

Yago se llevó 9 libros.

Cada libro costaba $\frac{90}{6} = 15$ €.

Pagó realmente por cada libro $\frac{90}{9} = 10$ €.

48. **Calcula el tiempo que tiene que pasar para que un capital de 10 000 € depositado en un banco aumente un 50 % en los siguientes casos:**

a) Al 4 % anual con periodo de capitalización anual.

b) Al 3,6 % anual con periodo de capitalización mensual.

Si los 10 000 € aumentan un 50 %, al final del periodo debe haber:

150 % de 10 000 € = 1,5 · 10 000 € = 15 000 €

a) Sea t = "años que deben transcurrir" y r = "tasa de interés":

$C_f = C_i \cdot (1 + r)^t$

Por tanto: $15\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}04)^t \to 1{,}5 = 1{,}04^t \to t = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}04} \approx 10{,}34$

Al menos deben transcurrir 11 años.

b) 3,6 % anual con capitalización mensual $\to$ 0,3 % mensual.

En este caso: $15\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}003)^t$

$$1{,}5 = 1{,}003^t \to t = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}003} \approx 135{,}36$$

Al menos deben transcurrir 136 meses, es decir, 11 años y 4 meses.

Página 74

49. Un grupo de amigos toman un refresco cada uno y deben pagar 9 € por el total de las consumiciones. Como hay dos que solo pueden poner 1 €, los demás deben aumentar su aportación en 0,25 € cada uno. ¿Cuántos amigos son?

n.º de amigos → x
precio de cada refresco → y

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 9 \\ 2 \cdot 1 + (x-2)\cdot(y+0,25) = 9 \end{array}\right\} \to y = \frac{9}{x}$$

Por tanto:

$$2 + (x-2)\cdot\left(\frac{9}{x} + 0,25\right) = 9 \to 2 + 8,5 + 0,25x - \frac{18}{x} = 9 \to$$

$$\to 10,5x + 0,25x^2 - 18 = 9x \to 0,25x^2 + 1,5x - 18 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25+18}}{0,5} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{20,25}}{0,5} = \begin{cases} 6 \\ -12, \text{ no vale.} \end{cases}$$

Solución: Había 6 amigos consumiendo y cada refresco costaba $\frac{9}{6} = 1,50$ euros.

50. Para llenar un depósito de 36 m³, abrimos un grifo, A, durante 2 horas y otro grifo, B, durante 10 horas. Si solo queremos llenar 28 m³ con esos mismos grifos, abrimos 3 horas el A y 5 horas el B. ¿Cuántos litros por hora echa cada uno de los grifos?

caudal del grifo A (m³/h) → x
caudal del grifo B (m³/h) → y

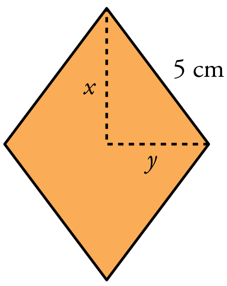
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 10y = 36 \\ 3x + 5y = 28 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{array}{r} 2x + 10y = 36 \\ -6x - 10y = -56 \\ \hline -4x \qquad = -20 \end{array} \to x = \frac{-20}{-4} = 5$$

$$3x + 5y = 28 \to y = \frac{28-3x}{5}$$

$$\text{Si } x = 5 \to y = \frac{28 - 3\cdot 5}{5} = \frac{28-15}{5} = \frac{13}{5} = 2,6$$

Solución: Caudal de A: 5m³/h = 5 000 l/h
Caudal de B: 2,6 m³/h = 2 600 l/h

51. El lado de un rombo mide 5 cm, y su área, 24 cm². Calcula la longitud de sus diagonales.



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x\cdot 2y}{2} = 24 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{12}{x} \\ x^2 + \dfrac{144}{x^2} = 25 \end{array}$$

$$x^4 + 144 - 25x^2 = 0 \ \ (\text{cambio } x^2 = z)$$

$$z^2 - 25x + 144 = 0 \to z = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \\ 9 \end{cases}$$

$z = 16 \to x = 4 \to y = 3$

$z = 9 \to x = 3 \to y = 4$

Las diagonales del rombo miden 6 cm y 8 cm.

52. **La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18 unidades, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es ese número?**

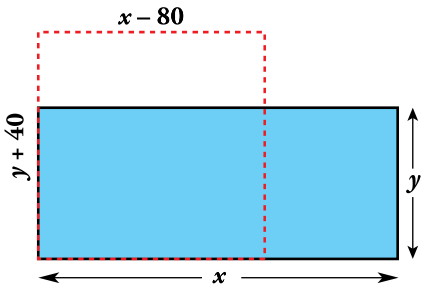
Número $\rightarrow$ $\boxed{x}\boxed{y}$ $\rightarrow$ $y + 10x$

Número inverso $\rightarrow$ $\boxed{y}\boxed{x}$ $\rightarrow$ $x + 10y$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ y + 10x + 18 = x + 10y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 8 - y \\ -9y + 9(8 - y) + 18 = 0 \end{array} \rightarrow -18y = -90 \rightarrow y = 5 \rightarrow x = 3$$

El número es el 35.

53. **Tenemos una parcela rectangular. Si su base disminuye en 80 m y su altura aumenta en 40 m, se convierte en un cuadrado. Si disminuye en 60 m su base y su altura aumenta en 20 m, entonces su área disminuye en 400 m². ¿Cuáles son sus dimensiones?**



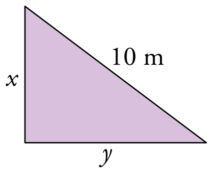
$$\left.\begin{array}{l} x - 80 = y + 40 \\ (x - 60)(y + 20) = xy - 400 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = y + 120 \\ xy - 60y + 20x - 1200 = xy - 400 \end{array}$$

$-60y + 20(y + 120) - 1\,200 = -400 \rightarrow -40y = -1\,600 \rightarrow y = 40$

$x = 40 + 120 = 160$

La parcela tiene 160 m de base y 40 m de altura.

54. **De un triángulo rectángulo sabemos que la hipotenusa mide 10 m y su área es 24 m². ¿Cuánto miden sus catetos?**



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x \cdot y}{2} = 24 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right\} \rightarrow xy = 48 \rightarrow y = \frac{48}{x} \rightarrow x^2 + \left(\frac{48}{x}\right)^2 = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{2\,304}{x^2} = 100 \rightarrow x^4 + 2\,304 = 100x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^4 - 100x^2 + 2\,304 = 0$$

Hacemos un cambio de variable: $x^2 = t$

$$t^2 - 100t + 2\,304 = 0 \left\langle \begin{array}{l} t_1 = 36 \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow y = \pm 8 \\ t_2 = 64 \rightarrow x = \pm 8 \rightarrow y = \pm 6 \end{array}\right.$$

Los catetos miden 8 m y 6 m.

55. **Las dos cifras de un número se diferencian en una unidad. Si dividimos dicho número entre el que resulta de invertir el orden de sus cifras, el cociente es 1,2. ¿Cuál es el número?**

Número $\rightarrow$ $\boxed{x}\boxed{y}$ $\rightarrow$ $y + 10x$

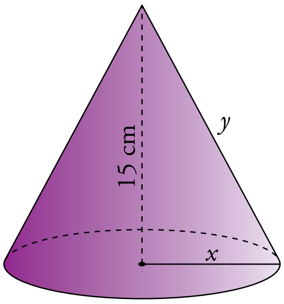
Número inverso $\rightarrow$ $x + 10y$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \dfrac{10x + y}{10y + x} = 1,2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = y + 1 \\ 10(y + 1) + y = 1,2(10y + y + 1) \end{array}$$

$10y + 10 + y = 12y + 1,2y + 1,2 \rightarrow 2,2y = 8,8 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = 5$

El número buscado es el 54.

56. **Halla el radio y la generatriz de un cono de 15 cm de altura y cuya área lateral es de 136π cm^2.**



$$\left.\begin{array}{l} y^2 - x^2 = 15^2 \\ \pi xy = 136\pi \end{array}\right\} \quad y = \frac{136}{x}$$

$$\frac{18\,496}{x^2} - x^2 = 225 \;\rightarrow\; 18\,496 - x^4 - 225x^2 = 0$$

Cambio: $x^2 = z \;\rightarrow\; z^2 + 225z - 18\,496 = 0$

$$z = \frac{-225 \pm \sqrt{50\,625 + 73\,984}}{2} = \frac{-225 \pm 353}{2} = \begin{cases} 64 \\ -280 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

$z = 64 \;\rightarrow\; x = 8 \;\rightarrow\; y = \dfrac{136}{8} = 17$

El radio del cono mide 8 cm, y la generatriz, 17 cm.

57. **En un examen de 40 preguntas te dan dos puntos por cada acierto y te restan 0,5 puntos por cada fallo. ¿A cuántas preguntas hay que contestar bien para obtener como mínimo 40 puntos, si es obligatorio responder a todas?**

Aciertos $\rightarrow x$; fallos $\rightarrow 40 - x$

$2x - 0{,}5(40 - x) \ge 40 \;\rightarrow\; 2x - 20 + 0{,}5x \ge 40 \;\rightarrow\; 2{,}5x \ge 60 \;\rightarrow\; x \ge 24$

Hay que responder bien, como mínimo, a 24 preguntas.

58. **¿Cuántos kilos de pintura de 3,50 €/kg debemos mezclar con 6 kg de otra de 5 €/kg para que el precio de la mezcla sea inferior a 4 €/kg?**

$$\frac{3{,}5x + 5\cdot 6}{x + 6} < 4 \;\rightarrow\; 3{,}5x + 30 < 4x + 24 \;\rightarrow\; 6 < 0{,}5x \;\rightarrow\; x > 12$$

Hay que mezclar más de 12 kg de pintura de 3,5 €/kg.

59. **Una caja contiene bolas blancas y negras. Si se añade una bola blanca, estas representan entonces el 25 % del contenido de la caja. Si se quita una bola blanca, las bolas blancas que quedan representan el 20 % del contenido de la caja. ¿Cuántas bolas de cada color hay en la caja?**

Llamemos B al número de bolas blancas que hay en la caja, y N, al número de bolas negras.

$$\left.\begin{array}{l} B + 1 \text{ es el } 25\% \text{ de } B + N + 1 \;\rightarrow\; 0{,}25\,(B + N + 1) = B + 1 \\ B - 1 \text{ es el } 20\% \text{ de } B + N - 1 \;\rightarrow\; 0{,}20\,(B + N - 1) = B - 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -0{,}75B + 0{,}25N = 0{,}75 \\ -0{,}80B + 0{,}20N = -0{,}8 \end{array}\right\} \quad B = 7,\; N = 24$$

Hay 7 bolas blancas y 24 negras.

60. **De dos fracciones sabemos que tienen el mismo numerador, sus denominadores son números consecutivos y la suma de ambas es igual a 27/20. Sabemos también que la suma del numerador y del denominador de la menor de las dos fracciones es igual a 8. ¿Cuáles son esas fracciones?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Numerador fracción mayor } \rightarrow x\\ \text{Denominador fracción mayor } \rightarrow y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{27}{20}\\ x + y + 1 = 8\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}20x(y+1) + 20xy = 27y(y+1)\\ x = 7 - y\end{array}\right\}$$

Sustituimos $x = 7 - y$ en la 1.ª ecuación y desarrollamos:

$$20(7 - y)(y + 1) + 20(7 - y)y = 27y^2 + 27y \rightarrow -67y^2 + 233y + 140 = 0 \rightarrow$$

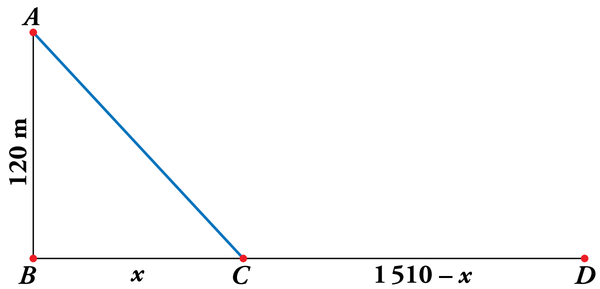
$$\rightarrow y = \frac{-233 \pm \sqrt{54\,289 + 37\,520}}{-134} = \frac{-233 \pm 303}{-134} = \begin{cases} -70/134, \text{ no vale} \\ 4 \end{cases}$$

Si $y = 4 \rightarrow x = 7 - 4 = 3$

Solución: Las fracciones buscadas son $\dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{3}{5}$.

Problemas "+"

61. **Un deportista está en A, en el mar, a 120 m de la playa BD, que mide 1 510 m.**



Para ir hasta el extremo D, nada hasta C con una velocidad de 40 m/min y camina de C a D a 90 m/min. Calcula las distancias que recorrió nadando y andando, si el tiempo que empleó en total fue de 20 minutos.

$t = \dfrac{e}{v}$

Llamamos: tiempo andando $t_a = \dfrac{1510 - x}{90}$

tiempo nadando $t_n = \dfrac{\overline{AC}}{40} = \dfrac{\sqrt{120^2 + x^2}}{40}$

$t_a + t_n = 20$ minutos

$$\frac{1510 - x}{90} + \frac{\sqrt{120^2 + x^2}}{40} = 20 \rightarrow 4(1\,510 - x) + 9\sqrt{120^2 + x^2} = 7\,200 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9\sqrt{120^2 + x^2} = 1\,160 + 4x \rightarrow 81(14\,400 + x^2) = 1\,345\,600 + 16x^2 + 9\,280x \rightarrow$$

$$\rightarrow 65x^2 - 9\,280x - 179\,200 = 0 \rightarrow 13x^2 - 1\,856x - 35\,840 = 0$$

$$x = \frac{1856 \pm \sqrt{3\,444\,736 + 1\,863\,680}}{26} = \frac{1856 \pm 2\,304}{26} = \begin{cases} 160 \\ -224/13 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

Andando: 1 510 – 160 = 1 350 m

Nadando: $\sqrt{120^2 + 160^2} = \sqrt{14\,400 + 25\,600} = \sqrt{40\,000} = 200$ m

62. Un barco hace un servicio regular entre dos ciudades, A y B, situadas a la orilla de un río. Cuando va de A a B en sentido de la corriente del río tarda 3 horas y a la vuelta tarda 4 horas. ¿Cuánto tardará un objeto que flota en ir desde A hasta B?

Llama v a la velocidad del barco y v' a la de la corriente. Elimina v entre las dos primeras ecuaciones y sustituye v' en la tercera. Así obtendrás t.

	VELOC.	DIST.	TIEMPO
IDA	$v + v'$	d	3
VUELTA	$v - v'$	d	4
OBJETO QUE FLOTA	v'	d	t

$v + v' = \dfrac{d}{3}$

$v - v' = \dfrac{d}{4}$

$t = \dfrac{d}{v'}$

$$\left.\begin{array}{l} v + v' = \dfrac{d}{3} \\ v - v' = \dfrac{d}{4} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} v + v' = \dfrac{d}{3} \\ -v + v' = -\dfrac{d}{4} \\ \hline 2v' = \dfrac{d}{12} \end{array} \rightarrow v' = \frac{d}{24}$$

$$t = \frac{d}{v'} = \frac{d}{d/24} = 24$$

El objeto tardará 24 horas en ir desde A hasta B.

Página 75

63. Subo una colina a una velocidad de 4 km/h y pretendo que la velocidad media entre el ascenso y el descenso sea de 6 km/h.

¿A qué velocidad debo descender?

SUBIDA: $v = \dfrac{e}{t} \to 4 = \dfrac{e}{t} \to t = \dfrac{e}{4}$

BAJADA: $v' = \dfrac{e}{t'} \to t' = \dfrac{e}{v'}$

$$V_{\text{MEDIA}} = 6 = \frac{2e}{t + t'} = \frac{2e}{\frac{e}{4} + \frac{e}{v'}} \to 6 = \frac{2e}{\frac{ev' + 4e}{4v'}} \to 6 = \frac{8ev'}{ev' + 4e} \to$$

$$\to 3(ev' + 4e) = 4ev' \to 3ev' + 12e = 4ev' \to ev' = 12e \to v' = \frac{12e}{e} = 12$$

Debe descender a 12 km/h.

64. Una ambulancia recibe el aviso de un accidente de tráfico y sale del hospital A hacia el punto B a una velocidad de 60 km/h.

La vuelta al hospital la hace escoltada por la policía a 100 km/h.

¿Cuál fue la velocidad media del recorrido?

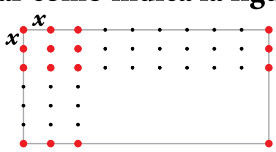
IDA: $e = 60t \to t = \dfrac{e}{60}$

VUELTA: $e = 100t' \to t' = \dfrac{e}{100}$

$$V_{\text{MEDIA}} = \frac{2e}{t + t'} = \frac{2e}{\frac{e}{60} + \frac{e}{100}} = \frac{2e}{\frac{160e}{6\,000}} = \frac{12\,000e}{160e} = 75$$

La velocidad media del recorrido fue de 75 km/h.

65. ¿Es posible plantar 275 árboles en una parcela rectangular de 72 m × 30 m, de modo que formen una cuadrícula regular como indica la figura?



En caso afirmativo, averigua cuál debe ser la distancia entre dos árboles de una fila.

Si x es la distancia entre los árboles, en uno de los lados habrá $\left(\dfrac{72}{x} + 1\right)$ árboles, y en el otro, $\left(\dfrac{30}{x} + 1\right)$. Por tanto:

$$\left(\frac{72}{x} + 1\right)\left(\frac{30}{x} + 1\right) = 275 \to (72 + x)(30 + x) = 275x^2 \to 2\,160 + 102x + x^2 = 275x^2 \to$$

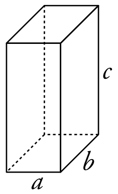
$$\to 274x^2 - 102x - 2\,160 = 0 \to x = \frac{102 \pm 1542}{548} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2{,}6 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

La distancia debe ser de 3 m.

66. **Las áreas de las caras de un ortoedro son 35 cm², 60 cm² y 84 cm².**

a) ¿Cuál será su volumen?

b) Calcula la longitud de sus aristas.



a) $\left.\begin{array}{l} ab = 35 \\ ac = 60 \\ bc = 84 \end{array}\right\}$ Multiplicando las igualdades: $a^2 b^2 c^2 = 176\,400 \;\to\; abc = 420$. El volumen será 420 cm³

b) Para calcular las aristas utilizamos estas igualdades:

$\left.\begin{array}{l} ab = 35 \\ abc = 420 \end{array}\right\}$ $35c = 420 \;\to\; c = 12$ cm

$\left.\begin{array}{l} ac = 60 \\ abc = 420 \end{array}\right\}$ $60b = 420 \;\to\; b = 7$ cm

$\left.\begin{array}{l} bc = 84 \\ abc = 420 \end{array}\right\}$ $84a = 420 \;\to\; a = 5$ cm

Reflexiona sobre la teoría

67. **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución.

b) Si $k < 1$, la ecuación $9x^2 - 6x + k = 0$ tiene dos soluciones.

c) Una ecuación bicuadrada tiene siempre un número par de soluciones.

d) La ecuación $(x^2 + 5)(2^x - 5) = 0$ tiene dos soluciones.

e) La ecuación $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 - 2(x^2 + 1) = 0$ tiene infinitas soluciones.

f) Algunos sistemas de inecuaciones no tienen solución.

g) Una inecuación tiene siempre infinitas soluciones.

a) Falso. Tendría una única solución doble.

b) Verdadero. El discriminante de la ecuación es:

$\Delta = 36 - 36k$

Si $k < 1 \;\to\; \Delta > 0$

c) Falso. Puede no tener solución y, en caso de tenerlas, basta con que una sea cero.

d) Falso. Tiene una única solución, puesto que $x^2 + 5 > 0$ siempre y $2^x - 5$ tiene una única solución.

e) Verdadero. Es una identidad, no una ecuación:

$(x - 1)^2 + (x + 1)^2 - 2(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 2x + x^2 + 1 + 2x - 2x^2 - 2 = 0$

f) Verdadero. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 0 \end{array}\right\}$

g) Falso. Por ejemplo, $x^2 + 2x + 1 \le 0$ solo tiene una solución, $x = -1$.

68. **¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación bicuadrada? Comprueba tu respuesta resolviendo las siguientes ecuaciones:**

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **b)** $x^4 - 4x^2 = 0$ **c)** $x^4 - 16 = 0$

d) $x^4 + x^2 = 0$ **e)** $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **f)** $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

Puede tener 4, 3, 2, 1 o ninguna soluciones.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \rightarrow$ Cambio $z = x^2$

$$z^2 - 10z + 9 = 0 \rightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ z = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{array}\right\} \text{ Cuatro soluciones: } 1, -1, 3 \text{ y } -3$$

b) $x^4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

Tiene tres soluciones: 0, 2 y –2

c) $x^4 - 16 = 0 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x^2 = 4$ (-4 no vale) $\rightarrow x = \pm 2$

Tiene dos soluciones: 2 y –2

d) $x^4 + x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 + 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \text{ No tiene solución.} \end{cases}$

Tiene una solución: $x = 0$

e) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow$ Cambio $x^2 = z$

$$z^2 + 3z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -1 \text{ No vale.} \\ -2 \text{ No vale.} \end{cases}$$

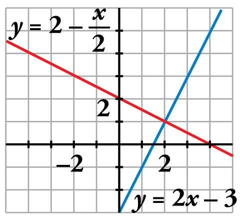
No tiene ninguna solución.

f) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \rightarrow$ Cambio $x^2 = z$

$$z^2 - 4z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Tiene dos soluciones: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

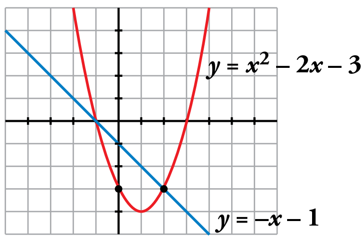
69. **Observa la representación gráfica de las rectas $y = 2 - \frac{x}{2}$ e $y = 2x - 3$:**



Contesta sin hacer operaciones: ¿para qué valores de x es $2x - 3 \geq 2 - \frac{x}{2}$?

Para $x \geq 2$, es decir, en el intervalo $[2, +\infty)$.

70. **Observa la representación de la recta $y = -x - 1$ y la de la parábola $y = x^2 - 2x - 3$.**



Responde sin hacer operaciones:

¿Para qué valores de x es $x^2 - 2x - 3 < -x - 1$?

Para $-1 < x < 2$, es decir, en el intervalo $(-1, 2)$.

71. **Escribe, en cada caso, una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:**

a) 2 **y** -3 **b)** 4 **y** 5 **c)** -2 **y** -8 **d)** 2 **y** $\frac{1}{3}$

Observa las ecuaciones que has escrito y relaciona los coeficientes a**,** b **y** c **de la ecuación con la suma y el producto de sus soluciones.**

Por ejemplo:

a) $(x-2)(x+3)=0$

$x^2+3x-2x-6=0$

$x^2+x-6=0$

Solución: $x^2+x-6=0$

b) $(x-4)(x-5)=0$

$x^2-5x-4x+20=0$

$x^2-9x+20=0$

Solución: $x^2-9x+20=0$

c) $(x+2)(x+8)=0$

$x^2+8x+2x+16=0$

$x^2+10x+16=0$

Solución: $x^2+10x+16=0$

d) $(x-2)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$

$x^2-\frac{x}{3}-2x+\frac{2}{3}=0$

$3x^2-7x+2=0$

Solución: $3x^2-7x+2=0$

Veamos la relación entre los coeficientes y el producto y la suma de las soluciones:

a)
$$\left.\begin{array}{l} a=1,\ b=1,\ c=-6 \\ x_1=2,\ x_2=-3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=-1=\frac{-1}{1}=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=-6=\frac{-6}{1}=-6=\frac{c}{a} \end{array}\right.$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} a=1,\ b=-9,\ c=20 \\ x_1=4,\ x_2=5 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=9=\frac{9}{1}=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=20=\frac{20}{1}=\frac{c}{a} \end{array}\right.$$

c)
$$\left.\begin{array}{l} a=1,\ b=10,\ c=16 \\ x_1=-2,\ x_2=-8 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=-10=\frac{-10}{1}=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=16=\frac{16}{1}=\frac{c}{a} \end{array}\right.$$

d)
$$\left.\begin{array}{l} a=3,\ b=-7,\ c=2 \\ x_1=2,\ x_2=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=\frac{7}{3}=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}=\frac{c}{a} \end{array}\right.$$

72. **Demuestra que si** x_1 **y** x_2 **son las soluciones de la ecuación** $ax^2+bx+c=0$**, entonces** $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ **y** $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$**.**

Si x_1, x_2 son soluciones, podemos escribir:

$a(x-x_1)(x-x_2)=0 \to ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1\cdot x_2=0$

Tenemos, por tanto:

$b=-a(x_1+x_2) \to x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $\qquad$ $c=ax_1\cdot x_2 \to x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

Página 76

Investiga

Problemas diofánticos

A continuación, se proponen dos problemas que se pueden resolver con ecuaciones diofánticas.

Este tipo de problemas suelen tener varias soluciones.

En el caso de que haya más de una, has de encontrarlas todas.

Problema 1

En un mueble, se nos ha roto una pata de 4 cm de altura.

Para equilibrarlo provisionalmente, disponemos de varios discos de madera, unos de 5 mm de grosor y otros de 3 mm. ¿Cuántos discos de cada clase usaremos?

$$\left.\begin{array}{l}\text{N.º de discos de 5 mm} \to x \\ \text{N.º de discos de 3 mm} \to y\end{array}\right\} \quad 5x + 3y = 40$$

Buscamos las soluciones de la ecuación con la condición de que x e y sean enteros no negativos.

$$y = \frac{40 - 5x}{3} \to$$

x	2	5	8
y	10	5	0

El problema tiene tres soluciones:

a) 2 discos de 5 mm y 10 discos de 3 mm.

b) 5 discos de 5 mm y 5 discos de 3 mm.

c) 8 discos de 5 mm.

Problema 2

En un test de 20 preguntas se consiguen 5 puntos por cada respuesta correcta, se pierden 3 por cada respuesta errónea, y otros 2 por cada pregunta sin contestar.

¿Qué tiene que ocurrir para obtener una calificación de 0 puntos? ¿Y para obtener 50?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Respuestas correctas} \to x \\ \text{Respuestas erróneas} \to y \\ \text{Preguntas sin contestar} \to z\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 5x - 3y - 2z = P \ \text{(puntuación)}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 20 - x - y \\ y = 7x - 40 - P\end{array}$$

Hemos de buscar las soluciones del sistema, teniendo en cuenta que x, y, z son enteros no negativos.

— Si la puntuación es 0 $\to \begin{cases} y = 7x - 40 \\ z = 20 - x - y \end{cases} \to$

x	6	7
y	2	9
z	12	4

El problema tiene dos soluciones:

- 6 respuestas correctas, 2 erróneas y 12 en blanco.
- 7 respuestas correctas, 9 erróneas y 4 en blanco.

— Si la puntuación es 50 $\rightarrow \begin{cases} y = 7x - 90 \\ z = 20 - x - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 1 \\ z = 6 \end{cases}$

El problema tiene una solución: 13 respuestas correctas, 1 incorrecta y 6 en blanco.

Utiliza el lenguaje algebraico

Igualando

Al mayor de tres hermanos le toca la lotería, por lo que, generoso, decide doblar el capital de los dos menores. Al hacerlo, se dan cuenta de que, en ese caso, el más rico es el mediano, que, también generoso, dobla el capital de los otros dos.

Ahora resulta que el más rico es el pequeño, que, por no ser menos, dobla el capital de los dos mayores. ¡Por fin!, ahora están igualados, pues cada uno tiene 400 €.

¿Cuánto tenía cada uno al principio?

CANTIDADES INICIALES		PRIMER CAMBIO		SEGUNDO CAMBIO		TERCER CAMBIO
MAYOR $\rightarrow x$	$\rightarrow$	$x - y - z$	$\rightarrow$	$2x - 2y - 2z$	$\rightarrow$	$4x - 4y - 4z$
MEDIANO $\rightarrow y$	$\rightarrow$	$2y$	$\rightarrow$	$3y - x - z$	$\rightarrow$	$6y - 2x - 2z$
PEQUEÑO $\rightarrow z$	$\rightarrow$	$2z$	$\rightarrow$	$4z$	$\rightarrow$	$7z - x - y$

Obtenemos el sistema:

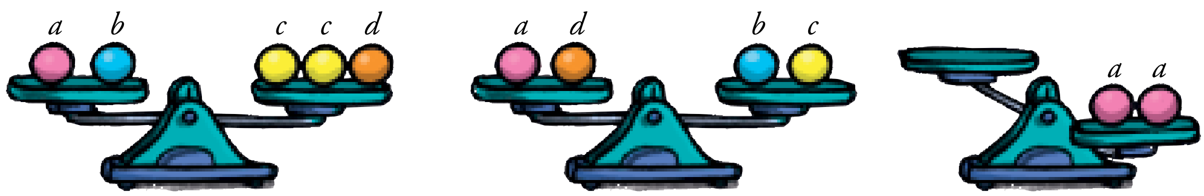
$$\left.\begin{array}{l} 4x - 4y - 4z = 400 \\ 6y - 2x - 2z = 400 \\ 7z - x - y = 400 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y - z = 100 \\ 3y - x - z = 200 \\ 7z - x - y = 400 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 650 \\ y = 350 \\ z = 200 \end{array}$$

Solución: El mayor tenía 650 €; el mediano, 350 €, y el pequeño, 200 €.

Utiliza tu ingenio

Balanzas

¿Qué habría que colocar en el platillo vacío para nivelar la última balanza?



$a + b = 2c + d$

$a + d = b + c$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades, $2a + b + d = 3c + b + d \rightarrow 2a = 3c$

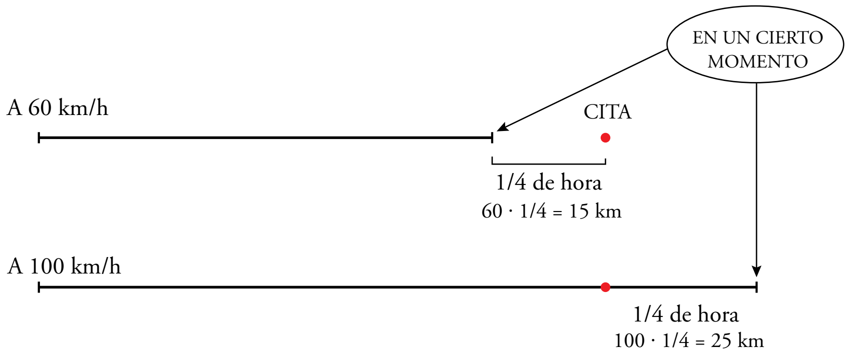
La última balanza se equilibra con tres bolas amarillas.

Página 77

Entrénate resolviendo problemas

Intenta resolver los problemas que te proponemos a continuación sin utilizar el álgebra.

- **Un motorista sale de su casa a las cinco de la tarde para acudir a una cita. Se da cuenta de que si viaja a 60 km/h llegará un cuarto de hora tarde, pero que si lo hace a 100 km/h llegará un cuarto de hora antes. ¿A qué hora es la cita? ¿A qué distancia está su destino?**



Yendo a 60 km/h, en 15 minutos recorre 15 kilómetros (los que le faltarían para llegar al lugar de la cita).

Yendo a 100 km/h, en los 15 minutos que le sobran recorrería 25 km.

Es decir, en el mismo tiempo, recorrería 40 km más yendo a 100 km/h que yendo a 60 km/h. Y esto solo ocurre si ese tiempo es de una hora.

Por tanto, el lugar de la cita está a 3/4 de hora yendo a 100 km/h, o a 5/4 de hora yendo a 60 km/h:

$$\frac{3}{4} \cdot 100 = \frac{5}{4} \cdot 60 = 75 \text{ km}$$

La cita es a las seis en punto de la tarde.

- **Un tren avanza a 300 km/h por un tramo recto de vía. Por una carretera paralela, y en la misma dirección, avanza un coche a 120 km/h.**

  ¿Cuál es la longitud del tren sabiendo que tarda 4 segundos en sobrepasar al coche por completo?

El tren adelanta al coche a una velocidad de 300 – 120 = 180 km/h.

El tren medirá lo mismo que el espacio que recorra un móvil durante 4 segundos a 180 km/h.

$$180 \cdot \frac{4}{3\,600} = 0{,}2 \text{ km} = 200 \text{ metros}$$

Solución: la longitud del tren es de 200 metros.

- **Un profesor de tenis, en un entrenamiento, reparte tres pelotas a cada alumno y le sobran 11. Al día siguiente lleva 20 pelotas más, con lo que cada uno recibe cinco y solo le sobra una. ¿Cuántos son los alumnos?**

Si se entregan tres pelotas a cada uno, sobran 11.

Con 20 pelotas más, y entregando 5 a cada uno, sobra una.

La diferencia de pelotas, entre entregar 3 o entregar 5 a cada uno es 11 + 20 – 1 = 30.

El número de alumnos es 30 : (5 – 3) = 15.

- **Entre todos los amigos, aportando 6 € cada uno, íbamos a comprar un balón para regalárselo a nuestro amigo Jordi. Pero Iván y Julia no pueden pagarlo, por lo que ahora tocamos a 10 €. ¿Cuántos amigos somos en la pandilla?**

Entre Iván y Julia habrían aportado 12 €.

Ahora, cada uno de los que quedan debe aportar 10 – 6 = 4 € más.

Los 12 € se reparten, por tanto, entre 12 : 4 = 3 personas.

En total, con Iván y Julia, son 5 amigos los que compran el regalo, más Jordi, son 6 en la pandilla.

Autoevaluación

1. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{x+1} - x = \dfrac{x-7}{4}$

b) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{5}{2} = 0$

a) $\sqrt{x+1} = \dfrac{x-7}{4} + x \to 4\sqrt{x+1} = 5x - 7$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$16(x+1) = 25x^2 - 70x + 49 \to 25x^2 - 86x + 33 = 0$

$$x = \frac{86 \pm \sqrt{7\,396 - 3\,300}}{50} = \frac{86 \pm 64}{50} = \begin{cases} 3 \\ 11/25 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 3 \to 2 = -1 + 3 \to$ válida

$x = \dfrac{11}{25} \to \sqrt{36/25} \neq \dfrac{-164}{100} + \dfrac{11}{25} = -\dfrac{120}{100} \to$ no válida

Solución: $x = 3$

b) $2(x-1) - 2x(x+1) + 5x(x-1) = 0 \to 2x - 2 - 2x^2 - 2x + 5x^2 - 5x = 0 \to$

$$\to 3x^2 - 5x - 2 = 0 \to x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -\dfrac{1}{3}$

2. **Resuelve.**

a) $\begin{cases} \sqrt{x} = 4 - y \\ y^2 = 4 + x \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = 15 \\ 4x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x} = 4 - y \\ y^2 = 4 + x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 16 + y^2 - 8y \\ y^2 = 4 + 16 + y^2 - 8y \to 8y = 20 \to y = 5/2 \end{array}$

$x = 16 + \dfrac{25}{4} - 20 = \dfrac{9}{4}$

Comprobación: $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = 4 - \dfrac{5}{2} \to \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{5^2}{2^2} = 4 + \dfrac{9}{4} \to \dfrac{25}{4} = \dfrac{25}{4}$

b) $\left.\begin{array}{l} xy = 15 \\ 4x^2 - y^2 = 11 \end{array}\right\} y = \dfrac{15}{x}$

$4x^2 - \dfrac{225}{x^2} = 11 \to 4x^4 - 225 - 11x^2 = 0$

Cambio: $x^2 = z$

$$4z^2 - 11z - 225 = 0 \rightarrow z = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 3\,600}}{8} = \frac{11 \pm 61}{8} = \begin{cases} 9 \\ -25/4 \text{ No vale.} \end{cases}$$

$z = 9 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow y = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 3,\ y_1 = 5;\ x_2 = -3,\ y_2 = -5$

3. Resuelve.

a) $\mathbf{10^{2x-1} = 0{,}001}$

b) $\mathbf{25^x = 500}$

c) $\mathbf{2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{17}{8}}$

d) $\mathbf{\frac{1}{2}\, log_2\,(3x+3) - \frac{1}{2}\, log_2\,(2x-3) = log_2\, 2}$

a) $10^{2x-1} = 0{,}001 \rightarrow 10^{2x-1} = 10^{-3} \rightarrow 2x - 1 = -3 \rightarrow x = -1$

b) $25^x = 500 \rightarrow log\, 25^x = log\, 500 \rightarrow x \cdot log\, 25 = log\, 500 \rightarrow x = \dfrac{log\, 500}{log\, 25} \approx 1{,}93$

c) $2^{x-1} + 2^{x+3} = \dfrac{17}{8} \rightarrow 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^3 = \dfrac{17}{8} \rightarrow \dfrac{2^x}{2} + 8 \cdot 2^x = \dfrac{17}{8} \rightarrow$

$\rightarrow 2^x + 16 \cdot 2^x = \dfrac{17}{4} \rightarrow 17 \cdot 2^x = \dfrac{17}{4} \rightarrow 2^x = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2} \rightarrow x = -2$

d) $\dfrac{1}{2} log_2\,(3x+3) - \dfrac{1}{2} log_2\,(2x-3) = log_2\, 2 \rightarrow \dfrac{1}{2}\left[log_2\left(\dfrac{3x+3}{2x-3}\right)\right] = log_2\, 2 \rightarrow$

$\rightarrow log_2\left(\dfrac{3x+3}{2x-3}\right) = log_2\, 4 \rightarrow \dfrac{3x+3}{2x-3} = 4 \rightarrow 3x + 3 = 8x - 12 \rightarrow 5x = 15 \rightarrow x = 3$

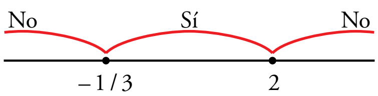
4. Resuelve.

a) $\mathbf{3x^2 - 5x - 2 \le 0}$

b) $\begin{cases} \mathbf{2x - 3 < 4} \\ \mathbf{4 - x \ge -1} \end{cases}$

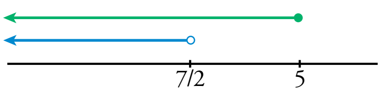
a) $3x^2 - 5x - 2 \le 0$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$$



Soluciones: $\left[-\dfrac{1}{3}, 2\right];\ -\dfrac{1}{3} \le x \le 2$

b) $\begin{cases} 2x - 3 < 4 \rightarrow 2x < 7 \rightarrow x < 7/2 \\ 4 - x \ge -1 \rightarrow -x \ge -5 \rightarrow x \le 5 \end{cases}$



Soluciones: $\left(-\infty, \dfrac{7}{2}\right)$

5. Un comerciante quiere vender por 60 000 € los ordenadores que tiene en su almacén. Pero se le estropean dos y tiene que vender los otros 50 € más caros para recaudar lo mismo.

¿Cuántos ordenadores tenía y a qué precio los vendió?

$$\left.\begin{array}{l}\text{ordenadores que tiene en el almacén} \rightarrow x \\ \text{precio inicial de cada ordenador} \rightarrow y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x \cdot y = 60\,000 \\ (x-2)(y+50) = 60\,000\end{array}\right\}$$

Desarrollamos y simplificamos la segunda ecuación:

$(x-2)(y+50) = 60\,000 \rightarrow xy + 50x - 2y - 100 = 60\,000 \rightarrow 50x - 2y + xy - 60\,100 = 0$

Sustituimos $x = \dfrac{60\,000}{y}$ en ella:

$50 \cdot \dfrac{60\,000}{y} - 2y + \dfrac{60\,000}{y} \cdot y - 60\,100 = 0 \rightarrow \dfrac{3\,000\,000}{y} - 2y + 60\,000 - 60\,100 = 0$

$3\,000\,000 - 2y^2 - 100y = 0 \rightarrow y^2 + 50y - 1\,500\,000 = 0$

$$y = \frac{-50 \pm \sqrt{2\,500 + 6\,000\,000}}{2} = \begin{cases} 1\,200 \\ -1\,250, \text{ no vale.}\end{cases}$$

Si $y = 1\,200 \rightarrow x = \dfrac{60\,000}{1\,200} = 50$

Solución: Había inicialmente 50 ordenadores y cada uno costaba 1 200 €, es decir, tenía 48 para vender a 1 250 €.

6. Las diagonales de un rombo suman 42 m y su área es 216 m². ¿Cuánto mide el perímetro del rombo?

$$\left.\begin{array}{l}\text{m que mide la diagonal mayor} \rightarrow x \\ \text{m que mide la diagonal menor} \rightarrow y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x + y = 42 \\ \dfrac{x \cdot y}{2} = 216\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x = 42 - y \\ x \cdot y = 432\end{array}\right\}$$

$(42 - y)y = 432 \rightarrow 42y - y^2 - 432 = 0 \rightarrow y^2 - 42y + 432 = 0$

$$y = \frac{42 \pm \sqrt{1764 - 1728}}{2} = \frac{42 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 24 \\ 18\end{cases}$$

Si $y = 24 \rightarrow x = 42 - 24 = 18$

Si $y = 18 \rightarrow x = 42 - 18 = 24$

Las soluciones son complementarias.

Solución: Las diagonales del rombo miden 24 cm y 18 cm respectivamente.

Por el teorema de Pitágoras, si z es el lado:

$z^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow z = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$

Luego el lado del rombo mide 15 m y el perímetro será $15 \cdot 4 = 60$ m.

7. En una clase hay 5 chicos más que chicas. Sabemos que en total son algo más de 20 alumnos, pero no llegan a 25.

¿Cuál puede ser la composición de la clase?

Chicas $\rightarrow x$

Chicos $\rightarrow y$

$$\left.\begin{array}{l} y = x + 5 \\ 20 < x + y < 25 \end{array}\right\} \; 20 < x + x + 5 < 25 \;\rightarrow\; 20 < 2x + 5 < 25 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 15 < 2x < 20 \;\rightarrow\; \frac{15}{2} < x < 10$$

Es decir, las chicas pueden ser 8 o 9.

Hay dos soluciones: 8 chicas y 13 chicos o 9 chicas y 14 chicos.

8. ¿Cuántos litros de vino de 5 €/*l* se deben mezclar con 20 *l* de otro de 3,50 €/*l* para que el precio de la mezcla sea inferior a 4 €/*l*?

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE (€)
I	x	5	$5x$
II	20	3,5	70
MEZCLA	$20 + x$	< 4	$< (20 + x) \cdot 4$

$5x + 70 < (20 + x) \cdot 4 \;\rightarrow\; 5x - 4x < 80 - 70 \;\rightarrow\; x < 10$

Se deben mezclar menos de 10 *l* del vino caro.