UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2019-2020**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+ay & = & 0 \\ x+2z & = & 0 \\ x+ay+(a+1)z & = & a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a=0$.

A.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x=0$ para que la función anterior sea continua en este punto.
b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

A.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x)=-x^4+x^3+2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=-1$.
b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x>0$.

A.4. (2 puntos)
Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

A.5. (2 puntos)
La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.
b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

B.1. (2 puntos)
Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

B.2. (2 puntos)
La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \qquad 0 \leq y \leq 15, \qquad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \qquad y - x \leq 10, \qquad y + 20 \geq 2x$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.
b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

B.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x + k)e^{\frac{-x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

B.4. (2 puntos)
Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.
b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

B.5. (2 puntos)
Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

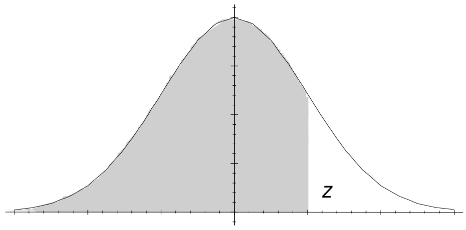
$$40 \qquad 45 \qquad 38 \qquad 44 \qquad 41 \qquad 40 \qquad 35 \qquad 50 \qquad 40 \qquad 37$$

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.
b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

Ejercicio A.1. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de los valores críticos .... 0,50 puntos.
Discusión correcta .... 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Solución correcta del sistema .... 1,00 punto.

Ejercicio A.2. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Determinación correcta del dominio .... 0,25 puntos.
Planteamiento correcto de la condición de continuidad .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto del límite .... 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto
Obtención correcta de la asíntota vertical .... 0,50 puntos.
Obtención correcta de la asíntota oblicua... 0,50 puntos.

Ejercicio A,3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Expresión correcta de la ecuación de la recta tangente .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la pendiente de la tangente .... 0,50 puntos.
Ecuación correcta de la recta tangente .... 0,25 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto de la integral y los límites de integración .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la integral indefinida .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la integral definida .... 0,25 puntos.

Ejercicio A.4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Ejercicio A.5. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del error .... 0,25 puntos.
Determinación correcta del tamaño de la muestra................................. 0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Expresión de la distribución de la media muestral .... 0,25 puntos.
Tipificación correcta de la variable .... 0,25 puntos.
Obtención correcta de la probabilidad.. 0,50 puntos.

EJERCICIO A.1

a) $A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$ $|A|=-a(a+1)$

$|A|=0 \Leftrightarrow a=0 \quad o \quad a=-1$

Si $a \neq 0 \;\; y \;\; a \neq -1$, sistema compatible determinado.

Si $a=-1$:

$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$ Entonces, rg(A)=2 pero rg(A|b)=3. Por tanto, sistema incompatible

Si $a=0$:

$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Entonces, sistema homogéneo con rg(A)=2 = rg(A|b). Por tanto, sistema compatible indeterminado.

b) Para $a=0$, el sistema queda $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x+2z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$

cuya solución es: x=0, $y=\lambda$, z=0, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO A.2

a) $3x+x^2=0 \Leftrightarrow x=-3, x=0$. Luego $D=\mathbb{R} \setminus \{-3,\; 0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=\dfrac{4}{3}+4=\dfrac{16}{3}$

Por tanto, definiendo f(0)=16/3, la función sería continua en x=0.

b)

Asíntotas Verticales: $3x+x^2=0 \Leftrightarrow x=-3, x=0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=\dfrac{16}{3}$ entonces, no existe asíntota vertical en x=0.

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{4-x^2}{3+x} + 4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{4-x^2}{3+x} + 4 = +\infty$$

Entonces, existe asíntota vertical en x=-3.

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4-x^2}{3+x} + 4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{4-x^2}{3+x} + 4 = +\infty$$

Luego no existen asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblícuas: y=mx+n

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2+4x+16}{x^2+3x} = -1$$

$$n = \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{7x+16}{x+3} = 7$$

Se obtienen los mismos límites cuando $x \to -\infty$

Por tanto, f(x) tiene asíntota oblícua, y=7-x, tanto cuando $x \to +\infty$ como cuando $x \to -\infty$

EJERCICIO A.3

a) Ecuación de la recta tangente en el punto *a*: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

Para *a*=-1

$f(-1) = 0$, $f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x$, $f'(-1) = 3$

Luego, $y = 3(x+1)$

b) Puntos de corte con eje OX:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ 0,\ 2$$

$f(x) > 0 \ \forall x \in (0\ ,\ 2)$

$$Área = \int_0^2 \left(-x^4 + x^3 + 2x^2\right) dx = -\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{176}{60} = \frac{44}{15} \quad u^2$$

EJERCICIO A.4

Se definen los sucesos:

A_1 = *Ir al nacimiento del río Cuervo*

A_2 = *Ir a las Hoces del río Duratón*

A_3 = *Ir al Cañón del río Lobos*

B = *Llueve*

a)

$$P(\overline{B}) = P(\overline{B}/A_1)P(A_1) + P(\overline{B}/A_2)P(A_2) + P(\overline{B}/A_3)P(A_3)$$
$$= 0'50 \cdot 0'40 + 0'40 \cdot 0'35 + 0'55 \cdot 0'25 = 0'4775$$

b) $P(A_1/B) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B)} = \dfrac{0'5 \cdot 0'4}{0'5225} = 0'3828$

EJERCICIO A.5

Sea X la variable que representa la longitud escrita con un bolígrafo (km)

$X \sim N(\mu,\ \sigma = 0'5)$

a) $1-\alpha = 0'9544 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0'05 \ \Rightarrow\ n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2\sigma^2}{0'05^2} = \frac{2^2 0'25}{0'05^2} = 400$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 400 bolígrafos

b) $X \sim N(\mu = 2,\ \sigma = 0'5) \quad n = 16 \quad S = X_1 + \cdots + X_{16}\ ;\ \overline{X} = \dfrac{S}{16}$

$$\overline{X} \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \ \Rightarrow\ \overline{X} \sim N\left(\mu = 2,\ \frac{0'5}{\sqrt{16}} = 0'125\right)$$

$$P(S > 30) = P\left(\overline{X} > \frac{30}{16}\right) = P\left(\overline{X} > 1'875\right) = P\left(Z > -1\right) = 0'8413$$

SOLUCIONES

EJERCICIO B.1

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix}$

$A^2 - 5A = -4I$

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 11-15 & 1+m-5 & 10-10 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 5-5 & -m-1+5 & 6-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & 4-m & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} m-4&=0 \\ m^2-5m&=-4 \\ 4-m&=0 \end{aligned}\right\} m=4$$

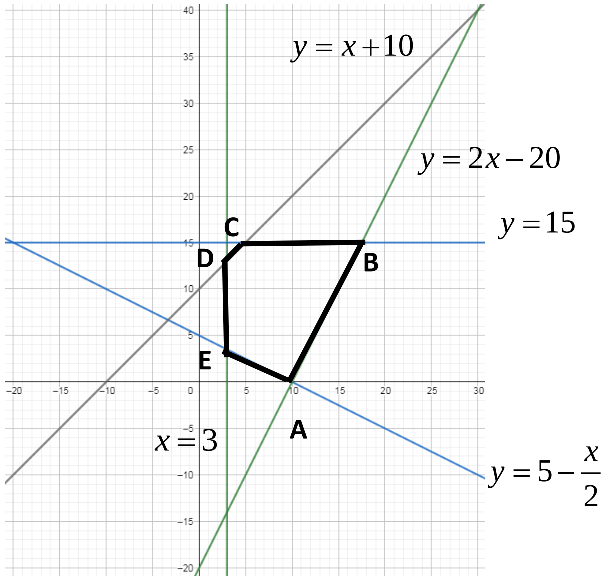
b)

$|A| = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^d)^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

a)



$$\left.\begin{array}{l} y=5-\frac{x}{2} \\ y=2x-20 \end{array}\right\} A(10\ ,\ 0) \qquad \left.\begin{array}{l} y=15 \\ y=2x-20 \end{array}\right\} B\left(\frac{35}{2}\ ,\ 15\right) \qquad \left.\begin{array}{l} y=15 \\ y=x+10 \end{array}\right\} C(5\ ,15)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=x+10 \end{array}\right\} D(3\ ,13) \qquad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=5-\frac{x}{2} \end{array}\right\} E\left(3\ ,\ \frac{7}{2}\right)$$

b)

Vértices	f(x,y)=x+y
$A(10\ ,\ 0)$	10
$B\left(\frac{35}{2}\ ,\ 15\right)$	32'5→ Máximo
$C(5\ ,15)$	20
$D(3\ ,13)$	16
$E\left(3\ ,\ \frac{7}{2}\right)$	6'5→ Mínimo

EJERCICIO B.3

a) $Dom(f)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}A\right)e^{-x/2}$$

$$f'(1)=\left(3-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}A\right)e^{-1/2}=0 \quad \Leftrightarrow A=1$$

b) $f(x)=3(x+1)e^{-x/2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x\right)e^{-x/2} \quad \rightarrow \ f'(x)=0 \ \rightarrow \ x=1$$

Si $x\in(-\infty\ ,\ 1) \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\ \ creciente$

Si $x\in(1\ ,\ \infty)\Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\ \ decreciente$

EJERCICIO B.4

Se definen los siguientes sucesos

M: Estropearse un microondas en período de garantía

H: Estropearse un horno eléctrico en período de garantía

F: Conservar la factura de compra

a) $P(M\cup H)=P(M)+P(H)-P(M\cap H)\underset{indep.}{=}0'02+0'05-0'02\cdot 0'05=0'069$

b) $P(\overline{F}/M)=0'40$

$$P(M \cap F) = P(F / M)P(M) = (1-0'40)\cdot 0'02 = 0'012$$

EJERCICIO B.5

Sea X la variable que representa el consumo de agua en ese programa de lavado (l)

$X \sim N(\mu, \sigma = 7)$

a) n=10, $\overline{x} = 41$ litros

$$I_\mu = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad 1-\alpha = 0.90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'645$$

$$I_\mu = \left(41 - 1'645 \frac{7}{\sqrt{10}} \ ; \ 41 + 1'645 \frac{7}{\sqrt{10}} \right) = (37'35 \ ; \ 44'64)$$

b) n=64

$$L = 2\ z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ 2z_{\alpha/2} \frac{7}{\sqrt{64}} = 5 \ \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{5\sqrt{64}}{2\cdot 7} = 2'86$$

$$P(Z \leq 2'86) = 0'9979 = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0'0042 \quad \Rightarrow \quad 1-\alpha = 0'9958$$