	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2022-2023** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	**Modelo** **orientativo**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el valor de m para el cual se verifica que $A^t B = C$.

b) (1 punto) Calcular los valores de m para los cuales existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.

c) (0.75 puntos) Calcular el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe - e}{e^x - e} & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{4x - 3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar su continuidad y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{f(x)}\, dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1, 1, 1)$ y $B(1, 3, 1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x - 3z = 1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1, 1, 6)$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100; 35)$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0.75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75.17% de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - y + az & = & -1 \\ x + ay + 2z & = & 1 \\ 3x - y + 4z & = & -1. \end{array}\right.$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema obtenido para aquellos valores de a en los que tenga infinitas soluciones.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{2}{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \\ & \\ \frac{x}{|x|} & \text{si} \quad x \leq 1 \text{ y } x \neq 0. \end{array}\right.$$

a) (0.5 puntos) Estudie su dominio y su continuidad.

b) (1 punto) Estudie su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos.

c) (1 punto) Determine las ecuaciones de las asíntotas, si existieran.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las siguientes rectas:

- r, la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (0, 1, 2)$;
- s, la recta de ecuaciones implícitas $s \equiv \left\{\begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0; \end{array}\right.$
- t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

a) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0.75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tras reiteradas denuncias por venta de falsificaciones, la inspección aduanera decide examinar sistemáticamente las remesas de dos productos de una determinada marca de lujo. Se encuentra que por término medio el 5% y el 2% de las muestras respectivas resulta ser falso. Al abrir un contenedor se encuentra que el 30% de las piezas son del producto A y el resto, del producto B.

a) (0.75 puntos) Se toma una pieza al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que resulte falsa?

b) (0.5 puntos) Sabiendo que la pieza es falsa, ¿qué probabilidad existe de que sea del primer tipo?

c) (1.25 puntos) Se controla un lote de 1000 piezas del tipo A. Se toma la variable aleatoria “número de piezas falsas”. Calcule la probabilidad $P(48 \leq X \leq 52)$ aproximando la distribución resultante mediante una normal.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

A. 1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos
b) Cálculo del producto AC: 0.25 puntos. Cálculo correcto de la existencia de la inversa: 0.25 puntos. Cálculo de la inversa para $m = 0$: 0.5 puntos
c) Cálculo de B^2: 0.25 puntos. Cálculo de $(B - I)$: 0.25 puntos. Cálculo correcto del parámetro: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.

A. 2.

a) Estudio continuidad: 0.75 puntos (0.25 puntos para $x \neq 1$ y 0.5 puntos para el resto). Asíntota horizontal: 0.25 puntos. Asíntota oblicua: 0.5 puntos.
b) Cálculo primitiva: 0.75 puntos. Aplicación regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de líimites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

A. 3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 por cada punto correcto.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.

A. 4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

B. 1.

a) Cálculo correcto de los valores a estudiar: 0.5 puntos. Estudio correcto de cada caso: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales.

B. 2.

a) Dominio: 0.25 puntos. Continuidad: 0.25 puntos.
b) Crecimiento y decrecimiento: 0.25 puntos. Máximos y mínimos relativos: 0.25 puntos. Estudio de la derivada: 0.25 puntos. Inexistencia de extremos para $x > 1$: 0.25 puntos.
c) Asíntotas horizontales: 0.5 puntos. Asíntota vertical: 0.25 puntos. Inexistencia de asíntotas oblicuas: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa la función entorno de puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y derivada.

B. 3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.5 puntos (resolución del sistema: 0.25; interpretación geométrica y solución: 0.25).
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.5 puntos (determinación de los dos vectores que determinan el ánguo pedido: 0.25; solución correcta: 0.25).
c) Planteamiento: 0.25. Resolución: 0.75 (ecuación del plano: 0.25; resolución del sistema y obtención de las coordenadas del punto pedido: 0.5).

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

B. 4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Solución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Solución: 0.25 puntos.
c) Reconocimiento de binomial: 0.25 puntos. Cálculo de parámetros: 0.25 puntos. Aproximación por la normal: 0.5 puntos. Cálculos: 0.25 puntos

Estándares de aprendizaje evaluados: Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades de sucesos aleatorios que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla o mediante calculadora.

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES
Documento de trabajo orientativo

A.1.

a) $A^tB = \begin{pmatrix} 2m^2-2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1.$

b) $AC = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & -m+2 \end{pmatrix} \Rightarrow |AC| = 3m^2 + m + 10 = 0$. Esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, $\forall m \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de AC.

Para $m = 0$, se tiene que $(AC)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix}$ y $B - I = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $m = \frac{1}{2}$.

A.2.

a) Si $x \neq 1$ la función es continua (propiedades de las funciones continuas). En $x = 1$,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{xe-e}{e^x-e} = [L'H] = \lim_{x\to 1^-} \frac{e}{e^x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{4x-1} = f(1) = 1,$$

por lo que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$. Asíntota horizontal por la derecha: $y_h(x) = 0$.
Asíntota oblicua por la izquierda: $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe-e}{x(e^x-e)} = -1$, $n = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe-e}{e^x-e} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x-e}{e^x-e} = 1$, con lo que $y_o(x) = -x+1$.
b) $\int_1^5 \sqrt{f(x)}\,dx = \int_1^5 (4x-3)^{-1/2}\,dx = \left[\frac{1}{2}(4x-3)^{1/2}\right]_1^5 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}.$

A.3.

a) Un vector normal a dicho plano es $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA'} = (0,2,0) \times (0,0,5) = (10,0,0)$, y así una ecuación es $x = 1$.
b) Los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son perpendiculares a $\overrightarrow{AB} = (0,2,0)$ y al vector normal al plano de la rampa $\vec{n} = (4,0,-3)$. Ambos tienen entonces la misma dirección que $\vec{n} \times \overrightarrow{AB} = (4,0,-3) \times (0,2,0) = (6,0,8)$. El lado del cuadrado mide $|\overrightarrow{AB}| = 2$, y así:

$$C = B + \overrightarrow{BC} = (1,3,1) + 2\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{11}{5}, 3, \frac{13}{5}\right) \quad \text{y} \quad D = A + \overrightarrow{AD} = (1,1,1) + 2\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{11}{5}, 1, \frac{13}{5}\right).$$

c) El volumen del paralelepípedo se puede calcular con el producto mixto $\overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})$:

$$\text{volumen del depósito} = \left|\overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})\right| = \left|\det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AA'} \\ \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AD} \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{6}{5} & 0 & \frac{8}{5} \end{pmatrix}\right| = 12\text{u}^3.$$

A.4.

$X \equiv$ puntuación $\sim N(100; 35)$

a) $P(100 < X < 140) = P(0 < Z < 1.14) = 0.8729 - 0.5 = 0.3729 \Rightarrow 37.29\%$.
b) $P(X < 95) = P(Z < -0.14) = P(Z > 0.14) = 1 - 0.5557 = 0.4443$.
c) $P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-100}{35}\right) = P\left(Z \leq \frac{-k+100}{35}\right) = 0.7517 \Rightarrow \frac{-k+100}{35} = 0.68 \Rightarrow k = 76.2$ es la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos.

SOLUCIONES

Documento de trabajo orientativo

B.1.

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & a & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3a - 3a^2 = 3a(1-a).$$

Si $a \neq 0, 1$ el sistema es compatible determinado. Si $a = 0$ el sistema es incompatible. Cuando $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado.

b) El sistema tiene infintitas soluciones cuando $a = 1$. Estas son $(-3+3\lambda,\ \lambda,\ 2-2\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

B.2.

a) El dominio es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. La función no es continua, por no estar definida, en $x = 0$. En $x = 1$ tampoco, por no tener límite. En el resto de puntos, la función es continua por ser cociente de funciones continuas.

b) La función vale -1 si $x < 0$, vale 1 si $0 < x \leq 1$ y su derivada es negativa para $x > 1$, de modo que tiene máximo y mínimo relativo en cada punto de $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$. En $(-\infty, 0)$ los mínimos son absolutos. No tiene máximo ni mínimo en $(1, \infty)$ al ser estrictamente decreciente.

c) $y = -1$ es asíntota horizontal en $-\infty$, $y = 0$ lo es en ∞ y $x = 1$ es asíntota vertical. No hay oblicuas.

B.3.

a) Unas ecuaciones paramétricas de las rectas r y s son, respectivamente, $r \equiv (1, 1+t, 2+2t)$, $t \in \mathbb{R}$ y $s \equiv (-2+2\lambda, 6-2\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$. El sistema de ecuaciones en t y λ

$$\begin{aligned} 1 &= -2 + 2\lambda \\ 1 + t &= 6 - 2\lambda \\ 2 + 2t &= \lambda \end{aligned}$$

es incompatible, por lo que las rectas r y s se cruzan.

b) La recta t paralela a s lleva su misma dirección, la del vector $(2, -2, 1)$ y corta a la recta r en el punto $P(1, 1, 2)$. El ángulo que forman estas dos rectas secantes es el ángulo que forman sus vectores directores:

$$\cos\theta = \frac{(0,1,2)\cdot(2,-2,1)}{|(0,1,2)|\cdot|(2,-2,1)|} = 0.$$

Por tanto las rectas r y t son perpendiculares.

c) La proyección del punto P sobre la recta s será el punto intersección de la recta s con plano que contiene a la recta r y es perpendicular a la recta s. El plano indicado tiene por ecuación implícita

$$2x - 2y + z - 2 = 0$$

y su intersección con la recta s, es decir, la proyección de P sobre s, es el punto $P'(2, 2, 2)$.

B.4.

a) Sea *Fal* ser una falsificación y A, B los dos tipos de productos.

$$P(Fal) = P(Fal|A)P(A) + P(Fal|B)P(B) = 0.029.$$

b)

$$P(A|Fal) = \frac{P(Fal|A)P(A)}{P(Fal)} = 0.517.$$

c) Sea X "ser pieza falsa entre 1000". Corresponde a una binomial $B(1000, 0.05)$ con una esperanza de 50 y $\sigma = \sqrt{47.5}$. Aproximando con una $N(50, \sigma)$

$$p\left(\frac{47.5-50}{\sigma} \leq \frac{X-50}{\sigma} \leq \frac{52.5-50}{\sigma}\right) \sim 0.2812.$$

ORIENTACIONES PARA LA EVALUACIÓN DEL ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE LA ASIGNATURA PORTUGUÉS.

Para la elaboración de las pruebas se seguirán las características, el diseño y el contenido establecido en el currículo básico de las enseñanzas del segundo curso de bachillerato LOMCE que está publicado en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.