1 Variable aleatoria

1. En cada uno de los siguientes casos, indica si se trata de una variable aleatoria discreta o continua.

   a) El número de pasajeros de un autobús urbano en un momento dado.

   b) El peso de un recién nacido.

   c) La superficie de una vivienda.

   d) La duración de la batería de un móvil.

   e) El número de huevos que pone una gallina al mes.

   f) El número de seguidores de una persona en una red social concreta.

a) Discreta.
b) Continua.
c) Continua.
d) Continua.
e) Discreta.
f) Discreta.

2. Estación de servicio. Una estación de servicio cuenta con cuatro surtidores. Describe el espacio muestral que analiza si un surtidor está ocupado o no en un momento del día. Posteriormente, asigna un número real a la variable aleatoria que cuenta el número de surtidores ocupados.

Resultados	Valores de *x*
OOO	3
OOV	2
OVO	2
OVV	1
VOO	2
VOV	1
VVO	1
VVV	0

3. Se lanzan dos dados al aire. Describe los resultados del espacio muestral y los valores asignados para cada una de las variables aleatorias siguientes:

   a) El resultado mayor de los dados.

   b) La suma de los resultados.

   c) La diferencia de resultados.

a)

Resultados	Valores de *x*
11	1
12, 21, 22	2
13, 23, 33, 31, 32	3
14, 24, 34, 44, 43, 42, 41	4
15, 25, 35, 45, 55, 51, 52, 53, 54	5
16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65	6

Mc Graw Hill Education © Mcgraw-Hill

b)

Resultados	Valores de *y*
11	2
12, 21	3
13, 22, 31	4
14, 23, 32, 41	5
15, 24, 33, 42, 51	6
16, 25, 34, 43, 52, 61	7
26, 35, 44, 53, 62	8
36, 45, 54, 63	9
46, 55, 64	10
56, 65	11
66	12

c)

Resultados	Valores de *w*
12, 23, 34, 45, 56	-1
13, 24, 35, 46	-2
14, 25, 36	-3
15, 26	-4
16	-5
11, 22, 33, 44, 55, 66	0
21, 32, 43, 54. 65	1
31, 42, 53, 64	2
41, 52, 63	3
51, 62	4
61	5

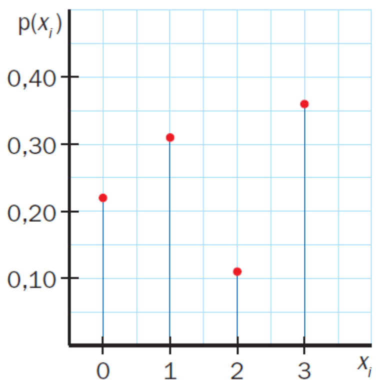
2 Función de probabilidad

4. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta es la siguiente:

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,22	0,31	0,11	0,36

Represéntala gráficamente y calcula $P(x<2)$ y $P(1\le x<2)$.

La gráfica de la función de probabilidad es:



$$P(x<2)=P(0)+P(1)=0,22+0,31=0,53$$

$$P(1\le x<2)=P(1)=0,22$$

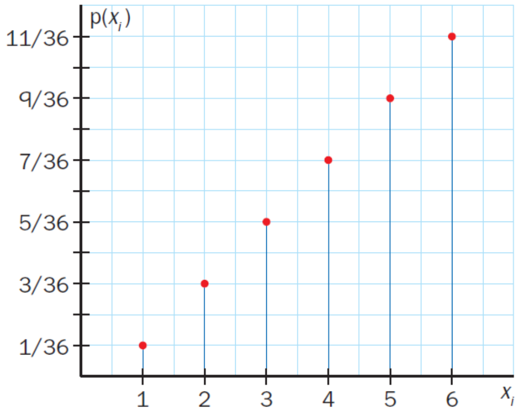
Mc Graw Hill Education © Mcgraw-Hill

5. Considera la variable aleatoria x que selecciona el resultado mayor al lanzar dos dados.

   a) Represéntala gráficamente

   b) Calcula $P(x<1), P(1\leq x<2)$ y $P(0<x\leq 4)$.

a)



b) $P(0< x \leq 4) = \dfrac{4}{9}$

3 Media y desviación típica

6. Correo electrónico. El número de mensajes enviados por correo electrónico, durante una hora, desde un ordenador presenta la siguiente función de probabilidad:

x_i	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	0,05	0,10	0,15	k	0,30

   a) Determina el valor de k .
   b) Calcula el número medio de mensajes enviados por hora y su desviación típica.

a) k= 0,40

b) La desviación típica del número de mensajes enviados es de 1,12.

7. Según la información facilitada por el ayuntamiento de un municipio, el número de infracciones cometidas durante el último año por los motoristas de entre 16 y 25 años viene dado por la siguiente función de probabilidad.

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	0,55	0,25	0,15	0,05

Determina el número medio de infracciones anuales para este grupo de motoristas. ¿Presenta mucha variabilidad?

Sí presenta mucha variabilidad, 0,9 es un valor elevado en el intervalo [0,3], y viene explicado porque hay muchos valores en el extremo inferior (ninguna infracción) y muy pocos en el superior (tres infracciones).

© Mcgraw-Hill

4 Distribución binomial

8. Control de calidad. Una empresa fabrica componentes para ordenador y tiene un porcentaje de unidades defectuosas en su fabricación del 5%. Su principal cliente le encarga un pedido de 200 componentes. Este cliente siempre realiza un control de calidad seleccionando una muestra aleatoria de 10 componentes y, si esta contiene dos o más unidades defectuosas, devuelve el pedido. ¿Qué probabilidad hay del que el cliente devuelva el pedido?

Hay un 8,61% de probabilidad de que el cliente devuelva el pedido.

9. Tasa de paro. La tasa de paro en una determinada comunidad autónoma es del 12%. Se realiza una encuesta a 20 personas de dicha comunidad:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna esté en paro?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos estén en paro?
c) ¿Cuáles son el número esperado de parados y la desviación típica de la muestra?

a) La probabilidad de que ninguna esté en paro es del 7, 76 %.

b) La probabilidad de que al menos dos personas de la muestra estén en paro es del 71, 09 %.

c) 1,45 parados.

10. Una pareja decide tener tres hijos. Admitiendo que la probabilidad de tener una niña es la misma que la de obtener un niño, ¿cuál es la probabilidad de que tengan más niñas que niños?

La probabilidad de que el número de niñas supere al de niños es del 50 %.

11. Vehículos eléctricos. En un país de la UE el 7% de los vehículos en circulación son eléctricos. Se elige una muestra aleatoria de 8 vehículos. Calcula la probabilidad de que…

a) …ninguno sea eléctrico?
b) …exactamente dos sean eléctricos?
c) … al menos dos sean eléctricos?
d) …más de la mitad sean eléctricos?

a) La probabilidad de que ningún vehículo sea eléctrico es: 55,96 %.

b) La probabilidad de que exactamente dos vehículos sean eléctricos es: 8,88 %.

c) La probabilidad de que al menos dos vehículos de los ocho sean eléctricos es: 71,09 %
d) La probabilidad de que más de la mitad sean eléctricos es: ≈ 0

5 Función de densidad

12. ¿Es $f(x)=\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}$, para $0\leq x\leq 1$, una función de densidad de una variable aleatoria continua x? En caso afirmativo calcula $P(x<0,25)$, $P(0,25<x<0,60)$ y $P(x>0,75)$.

© Mcgraw-Hill

$$P(x>0{,}75)=1-P(x\le 0{,}25)=1-0{,}3125=0{,}6875$$

13. Encuentra el valor de k necesario para que $\boldsymbol{f(x)=k+x,\ 0\le x\le 1}$ sea una función de densidad de una variable aleatoria continua $\boldsymbol{x}$.

Para $k=\frac{1}{2}$, además, $f(x)\ge 0$, $\forall x\in[0,1]$.

14. Tiempo de espera. El semáforo de un paso de peatones permanece en rojo durante 30 segundos. Una persona llega al azar y se lo encuentra en rojo. Sea x la variable aleatoria que mide el tiempo en segundos que una persona debe esperar hasta que el semáforo se pone en verde, cuya función de densidad es:

$$\boldsymbol{f(x)}=\frac{1}{30},\ 0\le \boldsymbol{x}\le 30$$

¿Cuál es la probabilidad de esperar más de diez segundos hasta poder cruzar? ¿Y menos de cinco segundos?

La probabilidad de que una persona tenga que esperar más de diez segundos hasta poder cruzar es de 2/3.

Mientras que la probabilidad de que una persona tenga que esperar menos de cinco segundos hasta poder cruzar es de 1/6.

6 Distribución normal

15. Cotización de acciones. La cotización diaria al cierre de las acciones de Matemáticas SA sigue una distribución normal de media 25 € y desviación típica 3 €.

a) Calcula la probabilidad de que un día elegido al azar la cotización sea superior a 24 €.

b) ¿Qué porcentajes de días se produce una cotización comprendida entre 22 y 25 €?

a) Hay un 62,93 % de probabilidad de que un día al cierre el precio de las acciones supere los 24 €.

b) El 34,13 % de los días se produce una cotización entre 22 y 25 €.

16. Ingresos empresariales. Los ingresos anuales de la plantilla de una empresa siguen una distribución normal de media 19 800 € y desviación típica 6 120 €.

a) Si quieres tener una probabilidad del 30% de ganar más de 24 000 €, ¿aceptarías trabajar en esta empresa?

b) ¿Cuáles son los ingresos mínimos anuales para estar situado en el 20% de las personas que más ganan?

a) Hay un 24,51 % de probabilidad de ganar menos de 24 000 € anualmente. Por tanto, no aceptaría el trabajo en esta empresa.

© Mcgraw-Hill

b) Los ingresos mínimos anuales, para pertenecer al grupo del 20% de los que más ganan, han de ser 24 941 €.

17. Control de calidad. Las botellas de cristal de un refresco muy conocido tienen una capacidad media de 0,5 l. Una máquina de llenado presenta ciertas oscilaciones en el volumen de las botellas, de modo que se realizan controles de calidad y no se ponen a la venta aquellas botellas que contengan un volumen inferior a 0,47 l o superior a 0,54 l.

Sabiendo que el volumen de llenado se distribuye normalmente con una desviación típica de 0,02 l, ¿qué porcentaje de botellas no se pondrán a la venta?

Por tanto, serán rechazadas el 6,68 % de las botellas por tener un volumen inferior a 0,47 litros y el 2,28 % de las botellas por contener un volumen superior a 0,54 litros. En total, el 8,96 % de las botellas no se pondrán a la venta por tener un volumen fuera de los límites permitidos.

18. Estudio de edad. Las edades de la plantilla de una empresa que cuenta con 400 trabajadores siguen una distribución normal de media 44 años y desviación típica 6 años. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) 10 empleados tienen una edad superior a 55 años.

b) 27 tienen una edad inferior a 35 años.

c) 180 tienen una edad superior a 44 años.

a) Hay, por tanto, $0,0336 \cdot 400 \approx 13$ trabajadores con una edad superior a 55 años. Luego, la afirmación «10 empleados tienen una edad superior a 55 años» es falsa.

b) Hay, por tanto, $0,0668 \cdot 400 \approx 27$ trabajadores con una edad inferior a 35 años y, en consecuencia, la afirmación «27 tienen una edad inferior a 35 años» es verdadera.

c) Hay, por tanto, $0,5 \cdot 400 = 200$ trabajadores con una edad superior a 44 años. Luego, la afirmación «180 tienen una edad superior a 44 años» es falsa.

19. Duración del trabajo. Sara se desplaza diariamente en tren desde su casa a su lugar de trabajo. La duración del trayecto sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica de 3 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración del viaje sea superior a media hora?

b) Si sale diariamente de su casa a las 7:35 horas y tiene que fichar en la oficina a las 8.00 horas, ¿qué porcentaje de veces llegará tarde?

c) Su novio, Pablo, que es tremendamente puntual, queda con ella todos los días en la puerta de la oficina entre las 7.45 y las 7:55 horas, pero no la espera si Sara llega más tarde. ¿Cuántos días coincidirá la pareja durante el próximo mes?

a) La probabilidad de que la duración del viaje supere la media hora es del 0,04%.

b) El 4,75 % de los días Sara llegará tarde al trabajo.

c) Si consideramos 24 días laborables al mes, entonces $0,4996 \cdot 24 \approx 12$ días. Es decir, Sara coincidirá con Pablo la mitad de los días del mes.

Mc Graw Hill Education © Mcgraw-Hill

20. Si una variable aleatoria x tiene una distribución $N(\mu,\sigma)$ y verifica $P(x<3)=0{,}1587$ y $P(x>9)=0{,}0228$. determina los valores de μ y σ.

$\mu=5\ y\ \sigma=2$

7 Aproximación normal de la distribución binomial

21. Sistema operativo IOS. El 30 % de todos los teléfonos móviles que se venden diariamente en un centro comercial tienen el sistema operativo iOS. De los 100 móviles vendidos un día determinado en dicho centro comercial, ¿cuál es la probabilidad de que más de 40 tengan ese sistema operativo?

La probabilidad de que más de 40 móviles de los 100 tengan el sistema operativo IOS es del 1,10 %.

22. Sondeo electoral. Un sondeo electoral en un determinado país ofrece una probabilidad del 21% de votos al partido Alternativa Ibérica. Si se elige al azar una muestra de 500 electores, ¿cuál es la probabilidad de que…

a) más de la mitad sean votantes de Alternativa Ibérica?
b) al menos 30 sean votantes de Alternativa Ibérica?

a) La probabilidad de que más de la mitad sean votantes de Alternativa Ibérica es 0.
b) La probabilidad de que al menos 30 sean votantes de Alternativa Ibérica es: 1,83 %.

23. Resultados de una encuesta. En un centro escolar hay 85 docentes, de los cuales 60 son mujeres. Se realiza una encuesta a un total de 40 docentes elegidos al azar.

a) Halla la probabilidad de que al menos la mitad sean mujeres.
b) Calcula la probabilidad del que el número de mujeres oscile entre 15 y 20.
c) Determina la probabilidad de que haya, como mucho, 10 hombres.

a) La probabilidad de que más de la mitad de los docentes sean mujeres es de 99,69 %.
b) La probabilidad del que el número de mujeres oscile entre 15 y 20 es de 0,31 %.
c) La probabilidad de que el número de docentes sea inferior o igual a 10 es del 33 %.

24. Grado Universitario. Un estudio realizado en un grado universitario revela que solo el 58% de los estudiantes que inician sus estudios consiguen graduarse. Calcula la probabilidad de que, en una muestra realizada a 200 estudiantes de primer curso de ese grado, se encuentren:

a) 110 que conseguirán graduarse.
b) Menos de 110 que lo conseguirán.

a) La probabilidad de que consigan graduarse 110 estudiantes es del 3,86 %.
b) La probabilidad de que se gradúen menos de 110 estudiantes es del 17,62 %.

25. Huella digital. Elsa se ha comprado un móvil y ha activado el sistema de reconocimiento mediante huella digital. Durante el primer mes ha comprobado que esta falla en el 5% de las ocasiones, lo que la obliga a introducir la contraseña. Realiza 40 intentos independientes durante varios días.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el reconocimiento mediante huella digital falle exactamente cinco veces?
b) ¿Cuántas veces por término medio fallará la huella?
c) ¿Qué probabilidad hay de que falle la huella digital en más del 25% de las ocasiones? (Utiliza la distribución normal y analiza razonadamente si dicha aproximación normal es buena).

© Mcgraw-Hill

a) La probabilidad de que el reconocimiento mediante huella digital falle exactamente cinco veces es del 3,42 %.

b) Por término medio el sistema de funcionamiento por huella digital fallará dos veces.

c) La probabilidad de que falle la huella digital en más del 25% de las ocasiones, es decir, más de diez veces, es prácticamente nula. En este caso cabe esperar que, aunque la aproximación normal no sea muy buena, no haya diferencias significativas si se realizara el cálculo directamente mediante la distribución binomial.

ACTIVIDADES

Variable aleatoria

26. En cada uno de los siguientes casos, determina si la variable aleatoria dada es discreta o continua.

a) Número de accidentes automovilísticos al año en una provincia.

b) Duración de un trayecto en autobús.

c) Tiempo de acceso a una web determinada.

d) Número de jugadoras lesionadas en un equipo de fútbol a lo largo de una temporada.

e) Número de usuarios de una línea de metro en un momento dado.

f) Cantidad de leche que produce una vaca en un mes.

a) Discreta.

b) Continua.

c) Continua.

d) Discreta.

e) Discreta.

f) Continua.

27. Se considera la variable aleatoria obtenida al lanzar dos dados y contar los números primos obtenidos en cada tirada. Describe los resultados del experimento aleatorio y los valores asignados.

Resultados	Valores de x
11, 14, 16, 41, 44, 46, 61, 64, 66	0
12, 13, 15, 21, 24, 26, 31, 34, 36, 42, 43, 45, 51, 54, 56, 62, 63, 65	1
22, 23, 25, 32, 33, 35, 52, 53, 55	2

Variables aleatorias discretas

28. Una moneda está cargada de tal forma que la probabilidad de que salga cruz es cuatro veces mayor que la de que salga cara. Halla la función de probabilidad y el número esperado de caras al lanzar dos veces esta moneda.

El número esperado de caras al lanzar esta moneda es de $\mu = E\,[x] = 0{,}4$.

29. El número de pasajeros que pierden un tren elegido al azar de una estación determinada tiene por función de probabilidad:

Mc Graw Hill Education © Mcgraw-Hill

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0,950	0,022	0,015	0,009	0,003	0,001

Por término medio, ¿cuántos pasajeros perderán el tren en esta estación?

Por término medio el número de pasajeros que perderán el tren es de 0,096.

30. Halla el valor de k para que $P(x)=k(x^2+4)$, $x=0,1,2,3$ sea una función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

$k=\frac{1}{30}$. Además, para ese valor de k la función de probabilidad es $P(x_i)\geq 0$, $\forall x_i$.

31. Se extraen dos cartas sin reemplazo de la baraja española de 40 cartas. Sea la variable aleatoria $x=$ «número de cartas del mismo palo». Calcula la función de probabilidad de la variable x.

Pero como hay cuatro palos, entonces la función de probabilidad pedida es:

$$P(x)=\frac{4\cdot\binom{10}{x}\cdot\binom{30}{10-x}}{\binom{40}{2}},\ x=0,1,2$$

32. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta x verifica:

x_i	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	a	0,1	b	0,2	c

Si $P(x\leq 2)=0,7$ y $P(x\geq 2)=0,75$, encuentra la media y la desviación típica de la variable x.

La media es: $\mu = E[x] = 2$

Por tanto, la desviación típica es: $\sigma = 1,14$

33. Una variable aleatoria toma los valores 0, 1 y 2. ¿Qué valores debemos asignar a esos valores para que la media sea 1 y la varianza 0,5?

Por tanto, la función de probabilidad que buscamos es:

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	0,25	0,5	0,25

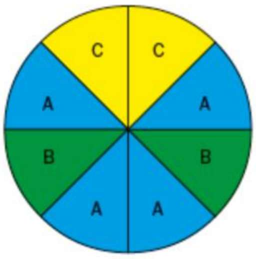
34. De una baraja se extraen tres cartas sin reemplazo. Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria $x=$ «número de cartas oros extraídas».

Así, la función de probabilidad viene dada por:

© Mcgraw-Hill

$$P(x)=\frac{\binom{10}{x}\binom{30}{3-x}}{\binom{40}{3}},x=0,1,2,3$$

35. Un juego consiste en girar la ruleta dos veces. Si las dos veces sale el resultado A, se obtiene como premio una entrada VIP para un concierto valorada en 250 puntos. Si las dos veces sale B, entonces gana una entrada para el palco de un estadio de fútbol valorada en 200 puntos. Si se consigue A y B o B y A, se obtiene un vale para una cena valorado en 100 puntos. Por último, si sale una o dos veces C, no se consigue ningún premio. Calcula la función de probabilidad de este juego. ¿Cuál es el número esperado de puntos que conseguirá un participante en este juego? ¿Resulta interesante participar?



Por tanto, la distribución de probabilidad de este juego es:

Sucesos	Valor x_i	Probabilidad $P(x_i)$
AA	250	$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}=0,25$
BB	200	$\frac{4}{64}=\frac{1}{16}=0,0625$
AB, BA	100	$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}=0,25$
AC, BC, CA, CB, CC	0	$\frac{28}{64}=\frac{7}{16}=0,4375$

El número esperado de puntos es: $\mu = E[x]$= 100 puntos. Sí resulta interesante participar en este juego porque después de realizarlo muchas veces la ganancia esperada es de 100 puntos.

❖ Distribución binomial

36. En unas elecciones a delegado de curso, la candidata A tiene una probabilidad de voto estimada del 23,1%. Si elegimos al azar a cinco estudiantes de este curso, ¿cuál es la probabilidad de que…

a) … todos sean votantes de la candidata A?

b) …al menos uno sea votante de A?

© Mcgraw-Hill

c) …exactamente dos sean votantes de A?

a) La probabilidad de que todos sean votantes de la candidata A es: 0,06 %
b) La probabilidad de que al menos una persona sea votante de A es: 73,11 %
c) La probabilidad de que exactamente dos de las cinco sean votantes de la candidata A es: 24,27 %.

37. Consideremos las distribuciones binomiales $B_1(20{,}0{,}1), B_2(20{,}0{,}5)$ y $B_3(20{,}0{,}8)$. Razona qué tipo de asimetría o simetría presentan.

La distribución $B(20{,}0{,}1)$ es asimétrica a la derecha.

La distribución binomial $B(20{,}0{,}5)$ es simétrica.

La distribución binomial $B(20{,}0{,}9)$ es asimétrica a la izquierda.

38. Sea x una variable binomial $B(10{,}0{,}6)$. ¿Cuál es la media de la variable $y = 2x + 100$? ¿Y su varianza?

La media y la varianza de la variable x son:

$$E[x] = \mu = np = 10 \cdot 0{,}6 = 6$$

$$V[x] = \sigma^2 = npq = 10 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$$

Por tanto, la media y la varianza de la variable $y = 2x + 100$ son:

$$E[y] = E[2x+100] = 2E[x] + 100 = 2 \cdot 6 + 100 = 112$$

$$V[y] = V[2x+100] = 4V[x] = 4 \cdot 2{,}4 = 9{,}6$$

39. Una bolsa contiene 7 bolas rojas, 4 verdes y 3 amarillas. Extraemos cuatro bolas con reemplazamiento y anotamos su color. Calcula la probabilidad de extraer una bola roja …

a) … en tres ocasiones.

b) … en dos o más extracciones.

c) … todas las veces.

a) La probabilidad de extraer una bola roja en tres extracciones es: 25 %.
b) La probabilidad de extraer una bola roja en dos o más extracciones es: 68,75 %
c) La probabilidad de extraer una bola roja en todas las ocasiones es: 6,25 %

40. Un padre propone a sus hijos el siguiente juego: lanzar una moneda varias veces y, siempre que el número de caras coincida con el de cruces, regalarles una entrada para un partido de fútbol. ¿Qué es más favorable para sus hijos, realizar 10 o 20 lanzamientos?

En consecuencia, es más favorables para los hijos realizar diez lanzamientos, un 24,61 % frente a un 17,62 %.

Mc Graw Hill Education © Mcgraw-Hill

41. Según un estudio, el 45% de la población española conoce las noticias diariamente a través de Internet. En una encuesta de 60 personas elegidas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la mitad se informe en la red?

Entonces, la probabilidad de que la mitad de los encuestados se informe en la red es: 7,59%.

42. Se forma al azar un código de ocho bits. Halla la probabilidad de que incluya al menos dos unos.

La probabilidad de que un código de ocho bits incluya al menos dos unos es:96,48 %.

43. Un examen tipo test consta de cinco preguntas, cada una con tres opciones de respuesta. Cada respuesta correcta vale 2 puntos. Si un estudiante responde al azar, determina la función de probabilidad que expresa la calificación obtenida. ¿Qué calificación es más probable obtener?

Por tanto, la calificación más probable es obtener un 2 o un 4 que tienen ambas una probabilidad de $\frac{80}{243}$.

❖ Variables aleatorias continuas

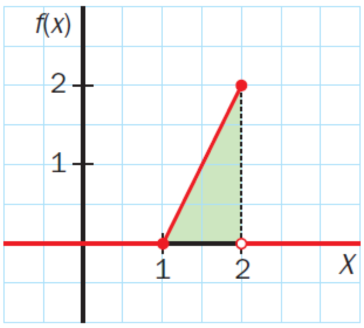
44. Una variable aleatoria continua tiene por función de densidad

$$f(x) = 2(x-1),\ 1 \le x \le 2$$

a) Represéntala gráficamente.

b) Calcula $P\left(1 < x < \frac{3}{2}\right)$ y $P\left(x > \frac{5}{4}\right)$.

a) La representación gráfica es:



b) $P(x > \frac{5}{4})$= 0,9375

45. Determina el valor de b para que sea la función de densidad de una variable aleatoria continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x, 0 \le x \le b \\ 0\ ,\ \text{resto} \end{cases}$$

$b = 1$. Además, $f(x) \ge 0\ , \forall x \in [0,1]$.

© Mcgraw-Hill

46. ¿Es $f(x)=x+\frac{1}{2}$, para $1\le x\le 3$, una función de densidad de alguna variable aleatoria continua x ?

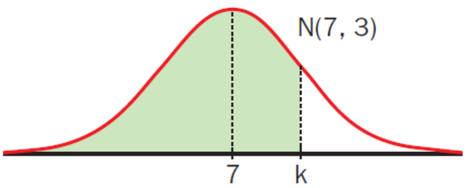
Por tanto, $f(x)$ no es una función de densidad

❖ Distribución normal

47. En una reunión familiar hay 60 personas. Por problemas logísticos de última hora, solo se dispone de 20 sillas. Por mayoría, se decide que dispongan de asiento los 20 familiares de más edad. Un aficionado a la estadística asegura que las edades de los miembros de la familia se distribuyen normalmente, con media 40 años y desviación típica 13 años. ¿A partir de qué edad se tendrá un asiento?

La edad mínima para disponer de una silla es de 46 años.

48. En una distribución normal $N(7,3)$, ¿qué valor deja a su izquierda un área igual al triple del que deja a su derecha?



k = 9,01

49. Las alturas de un grupo de 1200 chicas entre 14 y 18 años se distribuyen normalmente con media 165 cm y desviación típica 8 cm. Utiliza las características teóricas de toda distribución normal para averiguar el número de chicas que tienen una altura comprendida entre 157 y 173 cm. ¿Y entre 149 y 181 cm? El 99,73% de las chicas, ¿qué altura tendrán?

Según las características teóricas de toda distribución normal:

- Hay $\approx$ 819 chicas con una altura entre 157 y 173 cm.
- Hay $\approx$ 1145 chicas con una altura entre 149 y 181 cm.
- El 99,73 % de las chicas tendrá una altura comprendida entre 141 y 189 cm.

50. En un centro universitario, el peso de las chicas y los chicos se distribuye normalmente con medias $\mu_1=63$ kg y $\mu_2=72$ kg, y desviaciones típicas $\sigma_1=5$ kg y $\sigma_2=7$ kg, respectivamente. Si se elige una chica y un chico al azar, ¿qué es más probable, que una chica pese más de 61 kg o que un chico pese menos de 75 kg.

Por tanto, es más probable que un chico pese menos de 75 kg que una chica pese más de 61 kg.

© Mcgraw-Hill

51. El peso de un paquete de arroz es una variable aleatoria normal de media 1,04 kg y desviación típica 20 gramos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete elegido al alza pese menos de 1 kg?

b) Si se mantiene la misma desviación típica y se desea que la probabilidad de que un paquete pese menos de 1 kg sea del 3%, ¿cuál debería ser el valor del peso medio de los paquetes de arroz?

a) La probabilidad de que un paquete de arroz pese menos de 1 kg es el del 2,28 %.

b) El peso medio de los paquetes de arroz debería ser de aproximadamente 1038 gramos.

❖ Aplicaciones

52. Desperfectos en paquetería. Una empleada de transportes lleva diez paquetes, dos de los cuales presentan desperfectos. El primer destinatario recibe tres de esos paquetes, siendo x el número de paquetes con desperfectos que recibe. Calcula la distribución de probabilidad de x .

La función de probabilidad es:

$$P(x)=\frac{\binom{2}{x}\cdot\binom{8}{2-x}}{\binom{10}{3}},x=0,1,2$$

53. Compraventa. Pablo desea comprar un móvil y ha encontrado un chollo por Internet. Espera usar el teléfono seis meses y, a continuación, venderlo. Después de realizar diversos estudios, Pablo considera que, con su venta, podrá obtener unas ganancias de 100 € con probabilidad de 0,32, unas ganancias de 50 € con probabilidad de 0,56, y perder 50 € con una probabilidad 0,12. ¿Qué ganancia espera obtener Pablo? ¿Consideras interesantes sus cálculos?

Pablo espera obtener con esta operación 54 € y, por tanto, parece que resulta interesante la operación. No obstante, habría que valorar si la cantidad invertida hace rentable la operación.

54. Paquetería. El número de paquetes entregados durante una hora por un empleado de una empresa de distribución viene dado por la siguiente distribución de probabilidades:

x_i	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0,01	0,25	0,32	0,38	0,04

a) ¿Cuál es el número medio de paquetes entregados por hora?
b) Si el empleado cobra 5 € fijos más 3 € por paquete entregado, ¿qué ganancia por hora espera obtener?

a) Por tanto, el número medio de paquetes entregados por hora es de 3,19.

b) La ganancia media por hora que espera obtener es de 14, 57 €.

Mc Graw Hill Education © Mcgraw-Hill

55. Selección de jurado. La probabilidad de que un miembro de un jurado popular sea rechazado por alguna causa es de un 20 %. Halla la probabilidad de que, en una selección aleatoria de 25 miembros, al menos dos personas sean rechazadas.

Hay una probabilidad del 97,26 % de que más de dos miembros del jurado popular sean rechazados.

56. Contratos seguros. Una agente de seguros sabe por experiencia que solo el 4% de las personas contactadas acaban contratando un seguro. Si ella realiza cuarenta contactos, ¿cuál es el número medio de seguros que espera contratar? ¿Y la varianza?

μ = 1,6 contratos

σ^2= 1,536 contratos^2

57. Período de garantía. En una oferta de lanzamiento, una marca de ordenadores económica y poco fiable ofrece garantía de tres años, de modo que, si uno de los ordenadores falla durante ese periodo, se compromete a reemplazarlo por otro nuevo. Se estima que, en ese periodo de garantía, un ordenador falla en el 51% de las ocasiones. ¿Cuál es la probabilidad de que se averíen más de dos ordenadores, durante el periodo de garantía, si se realiza una compra de diez ordenadores para el aula de informática de un centro de enseñanza?

La probabilidad de que se averíen más de dos ordenadores durante el período de garantía en una muestra de diez ordenadores es: 95,29 %

58. Pagos con tarjeta de crédito. Según un estudio reciente, el 65% de los españoles realiza habitualmente sus pagos con tarjeta cuando el importe supera los 50 €. Sin embargo, entre los menores de 35 años el porcentaje se eleva al 80%. Si se realiza una encuesta entre diez jóvenes menores de 35 años, ¿cuál es la probabilidad de que todos realicen sus pagos habitualmente con tarjeta?

La probabilidad de que todos los jóvenes encuestados realicen habitualmente sus pagos con tarjeta es del 10,74 %.

59. Hogares con conexión a Internet. El porcentaje de hogares con conexión a Internet en los países en vías de desarrollo es del 15%. En una encuesta llevada a cabo en 30 hogares de un país con esas características, ¿qué probabilidad hay de que solo uno tenga conexión a Internet?

Entonces, la probabilidad de que solo un hogar tenga conexión a Internet es: 4,04 %

60. Renovación de teléfonos móviles. En un centro comercial se ha observado, durante un mes, que el 60% de la clientela ha renovado un móvil con menos de dos años de uso. Elegida una muestra al azar de 30 compradores, ¿cuál es el número esperado de clientes que hayan renovado su móvil con menos de dos años? ¿Cuál es la desviación típica?

$x \sim B(30{,}0{,}60)$. De los 40 compradores se espera que 18 hayan renovado su móvil antes de los dos años, siendo 2,68 la variabilidad.

61. Cierre de venta. La probabilidad de que un asesor comercial de un concesionario de automóviles venda un coche se estima en el 1% de los clientes que solicitan información. ¿Cuántos clientes deberían solicitar información para que la probabilidad de vender dos coches fuera de 0,1488?

Deberían solicitar información ocho clientes.

62. Componentes de un sistema. Un sistema electrónico consta de diez componentes que funcionan independientemente con una probabilidad de fallo de 0,05 cada una.

Mc Graw Hill Education © Mcgraw-Hill

a) Calcula la probabilidad de que el sistema funcione correctamente.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al menos, una de las componentes falle?

a) Hay una probabilidad del 59,87 % de que el sistema funcione correctamente.

b) La probabilidad de que, al menos, una de las componentes falle es: 40,13 %

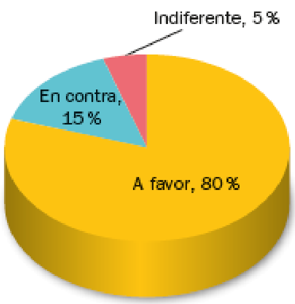
63. Equipo de mantenimiento. El tiempo, en minutos, que tarda el equipo de mantenimiento en arreglar una escalera mecánica de un centro comercial es una variable aleatoria x que tiene por función de densidad:

$$f(x)=\frac{1}{25},5\le x\le 30$$

¿Cuál es la probabilidad de que la escalera mecánica esté en funcionamiento antes de 20 minutos?

Hay un 60%

64. Horario flexible. En una encuesta realizada a la plantilla de una empresa sobre la conveniencia de adoptar un horario flexible arrojó los resultados que muestra el diagrama de sectores. Si se eligen al alzar a 20 personas entre las que participaron en la encuesta:



a) ¿Cuál es la probabilidad de que tres hayan votado a favor?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos hayan votado en contra?

a) P (x = 3) ≈0

b) La probabilidad de que al menos dos hayan votado en contra de un horario flexible es: 82, 44 %

65. Existencias panadería. El número de barras de pan que se venden diariamente en una panadería sigue una distribución normal de media $\mu=800$ barras y desviación típica $\sigma=90$ barras. Si al comenzar un día determinado se dispone de 1000 barras, ¿qué probabilidad hay de que se agoten las existencias al acabar el día?

La probabilidad de que se agoten las existencias al acabar el día es del 1,32 %.

66. Vasos de cartón. Una empresa líder en el comercio *online* de vasos de cartón biodegradables ofrece, entre otros productos, vasos para café y té de 175 ml de volumen y de 72 mm de diámetro. El diámetro de los vasos de una máquina de fabricación sigue una ley normal de media 72 mm y desviación típica 0,02 mm. Cualquier vaso fabricado cuyo diámetro quede fuera del intervalo $\mu\pm\sigma$ es rechazado y no se pone a la venta. ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso sea rechazado?

El 31,74 % de los vasos fabricados por esta máquina serán rechazados por tener un diámetro inferior a 71,98 mm o superior a 72,2 mm.

67. Tiempo de conexión a Internet. Un estudio sobre el tiempo que se conectan diariamente a Internet los jóvenes entre 16 y 18 años sigue una distribución normal de media 2,4 horas. Se observa, además, que un 33 % pasan más de 2,84 horas diarias conectados a Internet. Calcula la probabilidad de que un joven de este estudio pase más de 3 horas al día conectado a Internet.
Por tanto, la probabilidad de que un joven de este estudio pase más de 3 horas al día conectado a Internet es: 27,43 %

© Mcgraw-Hill

68. Resultados de un cuestionario. En un cuestionario realizado a 100 estudiantes de bachillerato sobre el tiempo que utilizan diariamente el móvil se observó que los valores se distribuían normalmente con una media de 2,3 horas y una desviación típica de 0,72 horas.

   a) ¿Qué proporción de estudiantes utilizan el móvil diariamente más de 3 horas?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar utilice el móvil diariamente entre 1,5 y 2 horas?

   c) ¿Cuánto tiempo utilizan diariamente el móvil el 10% de los estudiantes que menos lo hacen?

   a) Luego, $0{,}1660 \cdot 100 \approx 17$ estudiantes utilizan diariamente el móvil más de tres horas.

   b) La probabilidad de que un estudiante elegido al azar utilice el móvil diariamente entre 1,5 y 2 horas es: 20,37 %.

   c) El 10% de los estudiantes que menos utilizan diariamente el móvil lo hacen aproximadamente 1 hora y 23 minutos.

69. Precio de menú. El precio de las comidas servidas en un restaurante durante una semana se distribuye normalmente con desviación típica igual a 4 €. Sabiendo que solo el 8,08 % de los comensales paga más de 20 € y que en una semana 250 clientes han pagado 12 € o menos, ¿cuántas personas comieron en el restaurante durante esa semana?

   911 personas comieron en el restaurante durante esa semana.

70. Máquina embotelladora. Una máquina embotelladora vierte, por término medio, 250 cm^3 de agua dentro de cada botella. Supongamos que la variable aleatoria x = «cantidad de cm^3 vertidos en la botella» sigue una ley normal. Calcula su desviación típica sabiendo que, de 20 000 botellas elegidas al azar durante una semana, 456 reciben 260 cm^3 o más.

   La desviación típica de la cantidad servida por esta máquina embotelladora ha de ser de 5 cm^3.

71. Productos ecológicos. Una empresa de productos ecológicos dispone de una máquina que identifica los defectos de calidad (interna, externa o de calibre) de las distintas piezas de fruta. En particular, el 15% de los melocotones son rechazados en la línea completa de elaboración. En una muestra aleatoria de 10 piezas de melocotón, ¿qué probabilidad hay de que más del 25% sean rechazados por presentar algún defecto?

   Hay una probabilidad del 17,98 % de que más de que más del 25 % de los melocotones sean rechazados por presentar algún defecto.

72. Inspección de gasolineras. Una inspección de gasolineras toma muestras de un surtidor empleando un medidor de 10 litros. Se estima que, debido a errores de medida aleatorios, la cantidad real servida sigue una distribución normal de media 10 litros y desviación típica 0,1 litros.

   a) Se elige una muestra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad real servida sea inferior a 9,9 litros?

   b) En cinco muestras independientes elegidas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos cuatro servidas realmente con menos de 9,9 litros?

Mc Graw Hill Education © Mcgraw-Hill

Consideremos la variable aleatoria x = «cantidad real, en litros, servida en un surtidor» que sigue una distribución normal *N* (10 , 0,1), y la variable tipificada $z = \dfrac{x-10}{0{,}1}$ sigue una distribución estándar *N* (0,1).

a) La probabilidad de que la cantidad real servida en una muestra elegida al azar sea inferior a 9,9 litros es: 15,87 %

b) En cinco muestras independientes y elegidas al azar, la probabilidad de que haya al menos cuatro servidas realmente con menos de 9,9 litros es del 0,28 %.

73. Tráfico aéreo. De todos los aviones que aterrizan cada día en el aeropuerto de Málaga-Costa del Sol, el 30% procede de países de la Unión Europea.

a) Se eligen al azar 10 aviones que han aterrizado un día cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de que más de 4 procedan de la UE?

b) Se eligen al azar 100 aviones que han aterrizado un día cualquiera, ¿qué probabilidad hay de que más de 40 procedan de la UE?

a) Si se eligen al azar 10 aviones que han aterrizado un día cualquiera, entonces la probabilidad de que más de 4 procedan de la UE es del 15,03 %.

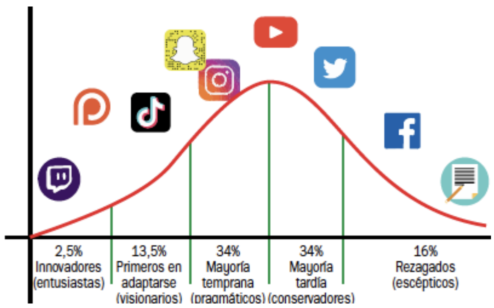
b) Si se eligen al azar 100 aviones que han aterrizado un día cualquiera, la probabilidad haya más de 40 procedan de la UE es del 0,1 %.

MUNDO MATEMÁTICO

1. Investiga quién fue Everett Rogers y su teoría sobre la difusión o de adopción de la innovación. ¿Qué fase o fases consideras que te describen mejor?

Puedes encontrar la biografía de Everett Rogers y su teoría de la adopción de innovaciones en internet. En cuanto a la fase o fases que te describen mejor es, obviamente, una respuesta abierta y personal.

2. En esta figura aparece la curva de innovación adaptada a las tendencias juveniles en las redes sociales. Compárala con la curva de la distribución normal y marca, cuando sea posible, los puntos que corresponden a μ, $\mu \pm \sigma$ y $\mu \pm 2\sigma$.



En resumen, hay coincidencia entre la curva normal y la curva de innovación de Rogers en cuatro de los cinco puntos considerados.

Mc Graw Hill Education © Mcgraw-Hill

3. El 62 % de los jóvenes de 13 a 17 años indican que su red social preferida es *Snapchat*. Utilizan la aplicación más de 16 veces al día y el tiempo diario que dedican se puede modelizar por una distribución normal de media de 38 minutos y desviación típica de 13 minutos. Si elegimos a un joven en esta franja de edad que tiene a esta red social como su preferida, ¿cuál es la probabilidad de que la utilice diariamente más de 45 minutos? ¿Y menos de media hora?

La probabilidad de que un joven con estas características pase diariamente más de 45 minutos es: 29,46 %

Mientras que la probabilidad de que pase diariamente menos de media hora es:26, 76 %

4. Busca productos que se encuentren en algunas de las fases se aladas en la gráfica del ciclo de vida de un producto. Compara la curva del ciclo de vida de un producto con la curva normal, y estudia sus semejanzas y diferencias.

La primera parte de la respuesta es abierta. En cuanto a la comparación de la curva del ciclo de vida de un producto y la curva normal, podemos afirmar que la primera es asimétrica debido a que las fases de introducción y crecimiento de un producto supone el 44 %, siendo un 56 % la suma de las fases de manteniendo y declive.

5. Según diversos estudios, solo el 30 % de los productos superan la fase de lanzamiento. En una muestra de 50 productos lanzados al mercado, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos superen esta fase? ¿Y más de la mitad?

La probabilidad de que, al menos, dos productos superen la fase de lanzamiento resulta: ≈ 1. Hay prácticamente un 100 % de probabilidad de que, al menos, dos de los cincuenta productos superen la fase de lanzamiento.

En la segunda preguntan nos piden la probabilidad de que más de la mitad de los cincuenta productos superen la primear fase o fase de lanzamiento, es decir,

$$P(x > 25) = 0{,}00059191012$$

6. Emplea la aproximación de la distribución binomial por la normal para calcular las probabilidades del apartado anterior. Razona si es aceptable esta aproximación.

La probabilidad de que, al menos, dos productos superen la fase de lanzamiento resulta =1

Y la probabilidad de que al menos 25 productos superen la fase de lanzamiento, efectuando la corrección de continuidad, es: 0,06 %. Es decir, la probabilidad es bajísima.

© Mcgraw-Hill

© Mcgraw-Hill