1 De los números naturales a los racionales

1. Expresa la fracción de estos números:

a) 5,42

$5{,}42 = \frac{542}{100}$

b) 3,825825…

$3,\overparen{825} = \frac{3825-3}{999} = \frac{3822}{999}$

c) 1,34242….

$1{,}3\,\overparen{42} = \frac{1342-13}{990} = \frac{1329}{990}$

2. Escribe tres números racionales comprendidos entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$.

Basta amplificar las fracciones y se pueden encontrar muchos números racionales comprendidos entre ellos. Por ejemplo:

$\frac{3}{5} = \frac{30}{50} < \frac{31}{50} < \frac{33}{50} < \frac{36}{50} < \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

3. Calcula 2 – 1,9999...

Para calcular la resta se puede pasar el segundo número a su forma fraccionaria: $1,\overparen{9} = \frac{19-1}{9} = \frac{18}{9}$ Entonces: $2 - 1,\overparen{9} = 2 - \frac{18}{9} = \frac{18-18}{9} = 0$
Ambos números son iguales, Se trata de dos maneras de expresar la misma cantidad. Esto sucede con cualquier cantidad con periodo de nueves.

4. Analiza si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El cociente de dos números enteros siempre es un número entero.
Es obvio que si se divide 5 entre 3 el resultado no es un número entero. Luego la afirmación es falsa.

b) Todo número entero es racional.
En efecto, cualquier número entero se puede escribir como el cociente de ese número entre la unidad, luego es un número racional

2 De los números irracionales a los reales

5. Indica a qué conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ pertenecen estos números:

a) 2/3: El número es racional. Pertenece a $\mathbb{Q}$.

b) 1,5: El número es racional, pertenece a $\mathbb{Q}$.

c) –3: El número es entero negativo, y por tanto pertenece a $\mathbb{Z}$ y a $\mathbb{Q}$.

d) 1: El número es natural y por tanto pertenece a $\mathbb{N}$, a $\mathbb{Z}$ y a $\mathbb{Q}$.

e) π^2: No siempre es posible demostrar la irracionalidad de un número. π^2 posiblemente sea irracional, pero no se ha conseguido demostrar. Pertenece a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{I}$, pero no se sabe a cuál.

f) –4,888… : Se trata de un número decimal periódico y por tanto racional. Pertenece a $\mathbb{Q}$.

g) $\sqrt[4]{15}$ **:** La raíz no exacta de cualquier número es irracional. Pertenece a $\mathbb{I}$.

h) $\sqrt[3]{8}$: Aunque se trata de una raíz cúbica, en este caso el resultado es un número natural, por lo tanto, pertenece a $\mathbb{N}$, a $\mathbb{Z}$ y a $\mathbb{Q}$.

6. Escribe dos números racionales y dos irracionales que se encuentren entre el 3 y el 4.

Para encontrar dos números racionales entre 3 y 4, basta tomar dos números decimales exactos, por ejemplo 3,5 y 3,8. Para los irracionales, lo más cómodo es buscar dos raíces no exactas. Por ejemplo $\sqrt{10}$ y $\sqrt{11}$ están entre 3 y 4. Otro irracional importante entre ambos es π.

7. ¿Verdadero o falso? Razona.

a) Al sumar números irracionales se obtiene siempre un número irracional.

Vamos a ver que es falsa con un contraejemplo. No resulta muy complicado demostrar que $2-\sqrt{2}$ por ejemplo es irracional. Basta pensar que si existiera una fracción equivalente $\frac{a}{b}$, entonces $2-\frac{a}{b}$ sería racional y por tanto $\sqrt{2}$ también lo sería.

La suma de $2-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, ambos irracionales, da un número racional, luego la proposición es falsa.

b) Al multiplicar un número racional por uno irracional, se obtiene un número irracional.

En este caso es cierto. Sea $\frac{a}{b}$ el número racional, y c el irracional. Si su producto $c\cdot\frac{a}{b}$ fuera racional, entonces,

$$c\cdot\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\Rightarrow c=\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}\Rightarrow c\in\mathbb{Q}$$

Lo cual es imposible. Por tanto, la proposición es cierta.

c) Todo número decimal se puede expresar como una fracción.

Todo número decimal exacto o periódico puede expresarse como una fracción. Hemos visto el método en la unidad. Sin embargo, cuando el número tiene infinitas cifras decimales no periódicas, no existe ningún procedimiento para construir la fracción. $\sqrt{2}$ es un número decimal que no se puede expresar como una fracción.

8. Distancias. Dos corredores parten de un punto P de una pista circular (de radio 40 m) a velocidad constante e igual. Uno de ellos recorre la circunferencia y el otro va y vuelve por su diámetro. ¿Coincidirán en algún punto de su recorrido?

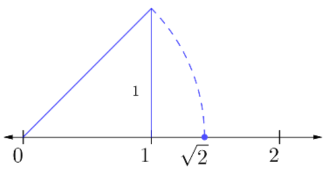
Hay dos puntos en los que pueden coincidir, el punto de partida y el opuesto. Como los dos llevan la misma velocidad, el que recorre la circunferencia tarda en ir de un punto a otro un tiempo $t_1 = \frac{\pi r}{v}$. Por su parte, el que va y vuelve por el diámetro tarda $t_2 = \frac{2r}{v}$. Para que coincidan debe existir un múltiplo común de ambas cantidades: $T = m \cdot t_1 = n \cdot t_2$, con $n, m \in \mathbb{N}$. Despejando en la igualdad se llega a:

$$m \cdot t_1 = n \cdot t_2 \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{n}{m} \text{ pero } \frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{\pi r}{v}}{\frac{2r}{v}} = \frac{\pi}{2} \neq \frac{n}{m}$$

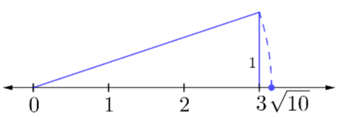
Dado que π no se puede escribir como fracción, no van a existir dos números $n, m \in \mathbb{N}$ para los que se cumpla $T = m \cdot t_1 = n \cdot t_2$. Eso significa que nunca coincidirán al mismo tiempo en ninguno de los dos puntos.

9. Representa en la recta numérica estos números:

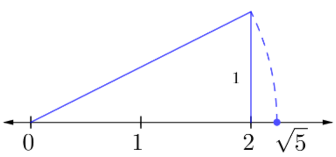
a) $\sqrt{2}$ $\quad$ $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 1^1$



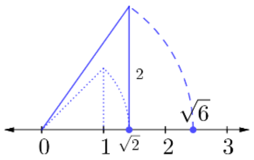
b) $\sqrt{10}$ $\quad$ $\left(\sqrt{10}\right)^2 = 3^2 + 1^2$



c) $\sqrt{5}$ $\quad$ $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 1^2$



d) $\sqrt{6}$ $\quad\quad (\sqrt{6})^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2$



10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < 0$ y $b < 0$, ¿qué relación existe entre $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$? Pon varios ejemplos con números. Ahora, sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, ¿es siempre cierto que $a^2 < b^2$? ¿Y $a^3 < b^3$? Busca ejemplos con números para mostrar tu afirmación.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < 0$, $\;b > 0$ entonces $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$. Lo podemos comprobar con varios ejemplos: a = -4, b = 2 → $\frac{1}{-4} < 0 < \frac{1}{2}$

La segunda afirmación no es cierta en general. Por ejemplo $-3 < 1$ pero sin embargo $(-3)^2 = 9 > 1$

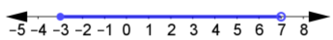
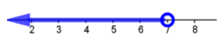
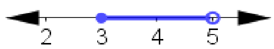
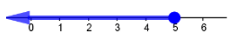
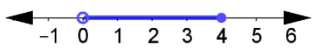
Por último, si es cierta la tercera relación, puesto que elevar al cubo mantiene el signo.

11. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, ¿qué valores de a y b no cumplen que $a^2 + b^2 > 0$?

Los únicos valores de $a, b \in \mathbb{R}$ cuya suma de cuadrados no es mayor que cero son $a = b = 0$

3 Intervalos en la recta real

12. Copia y completa la tabla.

Intervalo	Desigualdad	Representación gráfica
$x \in [-3,7)$	$\{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < 7\}$	
$x \in (-\infty, 7)$	$\{x \in \mathbb{R}, x < 7\}$	
$x \in [3,5)$	$\{x \in \mathbb{R}, 3 \leq x < 5\}$	
$x \in (-\infty, 5]$	$\{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$	
$x \in (0,4]$	$\{x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 4\}$	

4 Valor absoluto

13. Calcula el valor de las siguientes operaciones.

a) $\left|2-\frac{8}{3}\right|-\left|1-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{-2}{3}\right|-\left|\frac{-1}{2}\right|=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

b) $\left|3-|1-7|\right|-2=|3-6|-2=3-2=1$

c) $\left|2-\sqrt{6}\right|-\left|\sqrt{6}+2\right|=\sqrt{6}-2-\sqrt{6}-2=-4$

14. Resuelve la desigualdad $|2x-1|<2$

Si $|2x-1|<2$, entonces, por la propiedad 2 del valor absoluto:

$$-2<2x-1<2\rightarrow -2+1<2x<2+1\rightarrow \frac{-1}{2}<x<\frac{3}{2}$$

Entonces la solución es el intervalo $x\in\left(\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right)$

15. ¿Cuál es el valor de $\left|\sqrt{2}-\pi\right|$: $\left(\pi-\sqrt{2}\right)$ o $\left(\sqrt{2}-\pi\right)$?

Como π es mayor que $\sqrt{2}$, entonces $\left|\sqrt{2}-\pi\right|=\pi-\sqrt{2}$

16. Si $a>0$ y $b<0$, halla el resultado de las expresiones:

a) $|a|-b=a-b$

b) $|a\cdot b|=a\cdot|b|=-a\cdot b$

c) $a\cdot b-|a\cdot b|=a\cdot b-(-a\cdot b)=2ab$

5 Distancia y entorno

17. ¿Qué números están a distancia 6 unidades del -3?

Buscamos los números $x\in\mathbb{R}$ que cumplen:

$$d(-3,x)=6\rightarrow|x+3|=6\rightarrow\begin{cases}x+3=6\rightarrow x=3\\-(x+3)=6\rightarrow x=-9\end{cases}$$

18. Busca todos los números reales qué se encuentran a una distancia inferior a 3 unidades de -2.

Buscamos los números $x\in\mathbb{R}$ que cumplen:

$$d(x,-2)<3\rightarrow|x+2|<3\rightarrow -3<x+2<3\rightarrow -5<x<1\rightarrow x\in(-5,1)$$

19. Escribe todos $\mathbb{R}$ cuya distancia a 5 es mayor de 10.

Buscamos todos los números $x\in\mathbb{R}$ que cumplen:

$$d(x,5)>10\rightarrow|x-5|>10\rightarrow\begin{cases}x-5>10\rightarrow x>15\\-(x-5)>10\rightarrow x-5<-10\rightarrow x<-5\end{cases}$$

La solución es $x\in(-\infty,-5)\cup(15,\infty)$

20. Escribe en forma de entorno todos los números cuya distancia a -1 sea menor de 8.

Buscamos todos los números $x \in \mathbb{R}$ que cumplen:

$d(x,-1) < 8 \to x \in E_8(-1)$

21. Expresa $E_4(-2)$ en términos de distancia a un valor.

El entorno $E_4(-2)$ se refiere a todos los $x \in \mathbb{R}$que cumplen que están a una distancia menor que 4 del centro -2. Así $E_4(-2) \to d(x,-2) < 4$.

22. Escribe los siguientes intervalos en forma de entornos.

a) $(-2,2)$ El centro es $c = \frac{(-2+2)}{2} = 0$ y el radio es $r = \frac{(2-(-2))}{2} = 2$. Entonces es el entorno $E_2(0)$

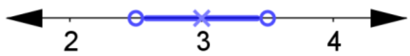
b) $(-3,8)$ Análogamente, $c = \frac{(-3+8)}{2} = 2{,}5$ y $r = \frac{(8-(-3))}{2} = 5{,}5$. Entonces es el entorno $E_{5,5}(2{,}5)$.

c) $\left(2,\ \frac{9}{2}\right) \to E_{1,25}(3{,}25)$

23. Escribe los siguientes entornos en forma de intervalo y represéntalos gráficamente.

a) $E_2(6) \to (4{,}8)$

b) $E_3\left(\frac{1}{2}\right) \to \left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$



c) $E_{\frac{3}{5}}\left(\frac{4}{5}\right) \to \left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$

6 Aproximaciones

24. Aproxima el valor de $\sqrt{23}$ a la décima, a la milésima y a la diezmilésima.

Calculando $\sqrt{23} = 4{,}7958315233\ldots$ y por tanto, sus aproximaciones son:

- A la décima: $\sqrt{23} \simeq 4{,}8$
- A la milésima: $\sqrt{23} \simeq 4{,}796$
- A la diezmilésima: $\sqrt{23} \simeq 4{,}7958$

25. Calcula utilizando la calculadora y redondea a tres cifras decimales

a) $\sqrt{5} \cdot \pi \simeq 7{,}025$

b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} \simeq 2{,}040$

c) $\frac{3\pi}{5} \simeq 1{,}885$

d) $\pi^{\sqrt{2}} \simeq 5{,}047$

7 Errores y notación científica

26. Presupuesto. El presupuesto de la reparación de mi móvil era de 150 €. Finalmente, el precio acabó siendo de 157 €. ¿Qué error relativo se cometió al presupuestarlo?

El error absoluto es de 7 €. Como el presupuesto eran 150 €, se ha cometido un error relativo de $e_R = \frac{7}{150} = 0{,}047$.

27. ¿Están bien escritas en notación científica estas cantidades?

a) $23{,}09 \cdot 10^5$: Mal, la forma correcta sería $2{,}309 \cdot 10^6$

b) $3{,}09 \cdot 10^{-4}$: Bien

c) $0{,}29 \cdot 10^7$: Mal, la forma correcta sería $2{,}9 \cdot 10^6$

28. Escribe en notación científica usando una mantisa con tres cifras significativas:

a) Distancia Tierra-Luna: 384 400 km: $3{,}84 \cdot 10^5 km$

b) Longitud de un virus: 0,00000009231 m: $9{,}23 \cdot 10^{-8} m$

8 Potencias y radicales

29. Calcula el valor de las siguientes expresiones escribiéndolas previamente en forma de raíz.

a) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2$

b) $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

c) $(-125)^{1/3} = \sqrt[3]{-125} = -5$

d) $0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0} = 0$

30. Simplifica los radicales aplicando las propiedades.

a) $\sqrt{\sqrt{9}}$; $\quad \sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$; $\quad \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt{\left(\sqrt[3]{3}\right)^6}$; $\quad \sqrt{\left(\sqrt[3]{3}\right)^6} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$; $\quad \sqrt{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$

31. Ordena de menor a mayor: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{5}$.

Si reducimos a índice común las tres raíces:

$\sqrt{3} = \sqrt[30]{3^{15}} = \sqrt[30]{14348907}$, $\sqrt[3]{4} = \sqrt[30]{4^{10}} = \sqrt[30]{1048576}$, $\sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6} = \sqrt[30]{15625}$

Por tanto $\sqrt[5]{5} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{3}$

32. Racionaliza:

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; $\quad \frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$

b) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\quad \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

c) $\frac{2}{1+\sqrt{a}}$; $\quad \frac{2}{1+\sqrt{a}}=\frac{2(1-\sqrt{a})}{1-a}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$; $\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3^2}}{3}$

e) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; $\quad \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{1(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$

f) $\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; $\quad \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2}$

33. Introduce los factores en la raíz.

a) $3\sqrt{2}$; $\quad 3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$

b) $x\sqrt{3}$; $\quad x\sqrt{3}=\sqrt{3x^2}$

c) $2\sqrt[3]{2x}$; $\quad 2\sqrt[3]{2x}=\sqrt[3]{2^4x}=\sqrt[3]{16x}$

d) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; $\quad a\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{a^2\frac{b}{a}}=\sqrt{ab}$

34. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}$; $\quad \sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-5\sqrt{3}=0$

b) $\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}$

$$\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{3^4}-2\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\sqrt[3]{5^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}-2\cdot 2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3}$$

c) $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{2x}}$; $\quad \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{2x}}=\frac{\sqrt[6]{(2x)^3}}{\sqrt[6]{(2x)^2}}=\sqrt[6]{2x}$

d) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}\cdot\sqrt[4]{x}$; $\quad \sqrt{3x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}\cdot\sqrt[4]{x}=\sqrt[12]{(3x)^6}\cdot\sqrt[12]{(2x^2)^4}\cdot\sqrt[12]{x^3}=\sqrt[12]{3^6 2^4 x^{17}}$

9 Logaritmos

35. Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición.

a) $log_4(64)$ $\quad log_4(64)=log_4(4^3)=3$

b) $log_{\sqrt{3}}(3)$ $\quad log_{\sqrt{3}}(3)=log_{\sqrt{3}}\left((\sqrt{3})^2\right)=2$

c) $log_{\frac{1}{2}}(4)$ $\quad log_{\frac{1}{2}}(4)=log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)=-2$

d) $log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{5}\right)$ $\quad log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{5}\right)=log_{\sqrt{5}}(5^{-1})=log_{\sqrt{5}}\left(\left((\sqrt{5})^2\right)^{-1}\right)=-2$

36. Calcula el valor de la x en cada caso:

a) $log_x(4) = 8$

$log_x(4) = 8 \rightarrow x^8 = 4 \rightarrow x = \sqrt[8]{4} = \sqrt[4]{2}$

b) $log_4(x) = 5$

$log_4(x) = 5 \rightarrow x = 4^5 = 1024$

c) $log_{\sqrt{2}}(x) = 4$

$log_{\sqrt{2}}(x) = 4 \rightarrow x = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^2 = 4$

d) $log_x \sqrt{2} = 4$

$log_x(\sqrt{2}) = 4 \rightarrow x^4 = \sqrt{2} \rightarrow x = \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$

37. Calcula $log_a b \cdot log_b a$

$$log_a b \cdot log_b a = log_a b \cdot \frac{log_a a}{log_a b} = log_a a = 1$$

38. Despeja x en cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $2 = e^{5x}$

$2 = e^{5x} \rightarrow ln\, 2 = 5x \rightarrow x = \frac{ln\, 2}{5}$

b) $3 = 2\, ln\, x$

$3 = 2\, ln\, x \rightarrow \frac{3}{2} = ln\, x \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$

c) $-2\, ln\, x = 5$

$-2\, ln\, x = 5 \rightarrow ln\, x = -\frac{5}{2} \rightarrow x = e^{-\frac{5}{2}}$

39. Sabiendo que $log(2) = 0{,}301$ y que $log(3) = 0{,}477$ calcula:

a) $log(24)$

$$log(24) = log(2^3 \cdot 3) = 3\, log(2) + log(3) = 1{,}380$$

b) $log(15)$

$$log(15) = log\left(\frac{30}{2}\right) = log(3) + log(10) - log(2) = 1{,}176$$

c) $log(0{,}25)$

$$log(0{,}25) = log\left(\frac{1}{4}\right) = -2\, log(2) = -0{,}602$$

d) $log_2(3)$

$$log_2(3) = \frac{log(3)}{log(2)} = 1{,}585$$

40. Aplicando logaritmos calcula 7^{900}.

Esta cifra no se puede calcular directamente con una calculadora normal. Sin embargo, tomando logaritmos:

$log(7^{900}) = 900\,log(7) = 760{,}588$

Entonces, deshaciendo la expresión escribiéndola como potencia de 10, se puede emplear notación científica:

$7^{900} = 10^{760{,}588} = 10^{760} \cdot 10^{0{,}588} = 3{,}8747 \cdot 10^{760}$

41. Estudio bacteriológico. Una bacteria se duplica cada hora si tiene las condiciones óptimas. ¿Cuántas horas habrán de pasar para que una bacteria inicial cree una colonia con mil millones de bacterias?

El número de bacterias transcurridas t horas vale $N = 1 \cdot 2^t$ Por tanto, hay que ver qué valor debe tomar el tiempo para que $N = 10^9$

$$10^9 = 2^t \rightarrow log(10^9) = log(2^t) \rightarrow 9 = t \cdot log(2) \rightarrow t = \frac{9}{log(2)} = 29{,}897h$$

Actividades finales

De los naturales a los reales

42. Indica el menor de los conjuntos numéricos a los que pertenecen los siguientes números:

$$\sqrt{5}\text{ ; 2; -3; }\frac{24}{6}\text{; 2,45; -1,33; 2,3}\,\widehat{45}\text{; }\pi^{log_\pi(4)}\text{; }\frac{5}{12}\text{; 0}$$

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
2; 0; $\pi^{log_\pi(4)}$ 24/6	-3	2,45; -1,33; 2,3 $\widehat{45}$; $\frac{5}{12}$	$\sqrt{5}$

43. Escribe dos números racionales y otros dos irracionales entre π y $\frac{22}{7}$.

Racionales: basta con coger un par de decimales exactos, por ejemplo 3,142 y 3,1425.

Irracionales: La suma de un número racional con otro irracional es un número irracional. Así que basta, por ejemplo, con coger los promedios:

$$\frac{\pi + \frac{22}{7}}{2} \qquad \frac{\pi + 3{,}142}{2}$$

44. Ordena de menor a mayor estos números:

$$-3;\ 1;\ \sqrt[3]{-25};\ \frac{-16}{3};\ -\sqrt{17};\ 0{,}21;\ 2,\widehat{5};\ \pi$$

$$\frac{-16}{3} < -\sqrt{17} < -3 < \sqrt[3]{-25} < 0{,}21 < 1 < 2,\widehat{5} < \pi$$

45. Expresa la fracción de estos números:

$$4{,}56 \quad 2{,}0\,\widehat{5} \quad 4,\widehat{78} \quad -2{,}6 \quad -1{,}02\,\widehat{56} \quad 0,\widehat{9}$$

$$4{,}56 = \frac{456}{100} = \frac{114}{25}$$

$$2{,}0\,\widehat{5} = \frac{205-20}{90} = \frac{185}{90} = \frac{37}{18}$$

$$4,\widehat{78} = \frac{478-4}{99} = \frac{474}{99} = \frac{158}{33}$$

$$-2{,}6 = \frac{-26}{10} = -\frac{13}{5}$$

$$-1{,}02\,\widehat{56} = \frac{-(10256-102)}{9900} = -\frac{10154}{9900} = -\frac{5077}{4950}$$

$0,\widehat{9} = \frac{9}{9} = 1$ Las cifras con 9 como periodo se corresponden en realidad con números exactos (enteros o decimales exactos).

46. Realiza estas operaciones escribiendo previamente los números en forma de fracción:

a) $2,\widehat{7} + 3,\widehat{4} - 1,\widehat{1}$

$$\frac{25}{9} + \frac{81}{9} - \frac{10}{9} = \frac{46}{9}$$

b) $1{,}2\,\widehat{3} + 4{,}572 - 2{,}5\,\widehat{67}$

$$1{,}2\,\widehat{3} + 4{,}572 - 2{,}5\,\widehat{67} = \frac{111}{90} + \frac{4572}{1000} - \frac{2542}{990} = \frac{40066}{12375}$$

c) $1,\widehat{8} + 0,\widehat{1}$

$$1,\widehat{8} + 0,\widehat{1} = \frac{17}{9} + \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

d) $3,\widehat{45} \cdot 1{,}23\,\widehat{4} - 2{,}5$

$$3,\widehat{45} \cdot 1{,}23\,\widehat{4} - 2{,}5 = \frac{342}{99} \cdot \frac{1111}{900} - \frac{25}{10} = \frac{397}{225}$$

47. Indica cuáles de estas fracciones son números decimales exactos y cuáles decimales periódicos:

a) $\frac{3}{5}$ El denominador es 5. Entonces es decimal exacto

b) $\frac{4}{3}$ El denominador es 3. Entonces es decimal periódico puro

c) $\frac{7}{8}$ El denominador es $8 = 2^3$. Es decimal exacto.

d) $\frac{7}{75}$El denominador es $75 = 3 \cdot 5^2$. Es decimal periódico mixto.

e) $\frac{17}{40}$ El denominador es $40 = 2^5 \cdot 5$. Es exacto.

f) $\frac{13}{7}$ El denominador es 7. Es periódico puro.

48. Utiliza ejemplos para analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Todo número entero es racional.

Verdadero, así, por ejemplo $4 = \frac{8}{2}$.

b) Todo número decimal se puede representar en forma de fracción.

Falso, hay números decimales como $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ que son irracionales.

c) Todo número natural se puede escribir como una fracción.

Verdadero, un número natural es también entero y racional: $4 = \frac{8}{2}$

d) Si se suman dos números racionales, el resultado es siempre otro número racional.

Cierto, si se suman dos fracciones, el resultado siempre es una fracción (nº racional).

e) Si se multiplican dos números enteros, el resultado es siempre un número entero.

Verdadero. El producto de dos números enteros es también un número entero. Basta por ejemplo con recordar las tablas de multiplicar.

49. Al sumar dos números irracionales, ¿el resultado es siempre un número irracional? Pon un ejemplo de números cuya suma es irracional y otro par de números irracionales cuya suma sea racional. ¿Y el producto?

Según queda implícito en el enunciado, la suma de dos números irracionales no siempre resulta irracional.

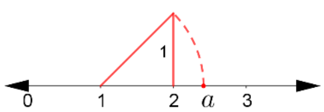
Un caso en el que al sumar se obtiene un número irracional sería la suma $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Este número es irracional.

Por el contrario, los números $\sqrt{2}$ y $\left(1 - \sqrt{2}\right)$ son ambos irracionales, pero al sumarlos se obtiene 1, que es racional (y también entero y natural).

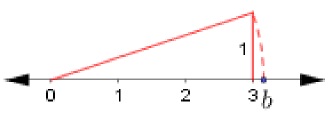
Respecto al producto, sucede algo parecido: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ que es irracional, mientras que $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ que es racional.

La recta real

50. Indica los números reales representados en cada una de estas figuras:



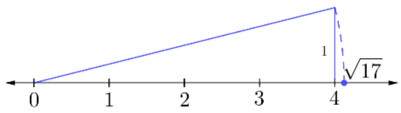
a) El número representado es $1 + \sqrt{1^2 + 1^2} = 1 + \sqrt{2}$



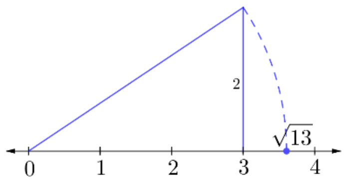
b) El número representado es $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

51. Representa los siguientes números en la recta real:

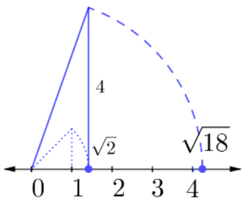
a) $\sqrt{17}$ $\qquad (\sqrt{17})^2 = 4^2 + 1^2$



b) $\sqrt{13}$ $\qquad (\sqrt{13})^2 = 3^2 + 2^2$



c) $\sqrt{18}$ $\qquad (\sqrt{18})^2 = 4^2 + (\sqrt{2})^2$



52. Indica qué números reales x cumplen que $\sqrt{x} > x$.

Para que exista$x$ debe ser positivo. Habitualmente la relación es al revés: $\sqrt{4} = 2 < 4$, pero si se toma un valor menor que la unidad: $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 < 0{,}25$. Por lo tanto, los valores buscados son la raíz, los $x \in (0{,}1)$.

53. Escribe en forma de desigualdad estos enunciados:

a) Hay más de 40 libros en la estantería.

$n > 40$

b) En ese local hay menos de 30 personas.

$p < 30$

c) Los virus miden entre 0,6 y 1,2 μm.

$0{,}6 < v < 1{,}2$

d) Prohibida la entrada a menores de edad.

$e \geq 18$

54. Dados dos números reales positivos a y b de manera que a<b. ¿Cuáles de las siguientes desigualdades son ciertas?

a) $a\ + 1 < b + 1$

Verdadero, por la propiedad aditiva.

b) $3a < 3b$

Verdadero por la propiedad multiplicativa con constante $3 > 0$

c) $-2a < -2b$

Falso, según la propiedad multiplicativa con constante $-2 < 0$ debería ser al revés: $-2a > -2b$

d) $a^3 < b^3$

Verdadero. La demostración se basa en la propiedad multiplicativa, pero resulta un poco larga de desarrollar. Como tanto a como b son constantes positivas, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot a < b \cdot a \\ a \cdot b < b \cdot b \end{array}\right\} \rightarrow a^2 < ab < b^2 \text{ luego } a^2 < b^2$$

Volviendo a operar del mismo modo, esta expresión se puede generalizar a cualquier potencia. Así:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \cdot a < b^2 \cdot a \\ a \cdot b^2 < b \cdot b^2 \end{array}\right\} \rightarrow a^3 < ab^2 < b^3 \text{ luego } a^3 < b^3$$

e) $-a < -b$

Falso, según la propiedad multiplicativa con constante $-1 < 0$ debería ser al revés: $-a > -b$

f) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Falso, según la propiedad de inversión, la relación debe ser al revés: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

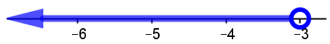
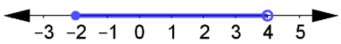
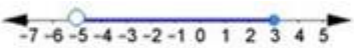
Intervalos

55. Di cuáles de los siguientes números pertenecen al intervalo (1, 6):

$$\sqrt{21};\ \frac{15}{2};\ 5{,}67;\ \pi^2;\ \sqrt[3]{50};\ 7-\sqrt{2};\ 2^{5/3};\ \sqrt{5}-5$$

Pertenecen al intervalo los números: $\sqrt{21}$, 5,67, $\sqrt[3]{50}$, $7-\sqrt{2}$, $2^{5/3}$.

56. Copia y completa la tabla:

Desigualdad	Intervalo	Representación
$x < -3$	$x \in (-\infty, -3)$	
$-2 \leq x < 4$	$x \in [-2{,}4)$	
$-2 < x \leq 3$	$x \in (-2{,}3]$	
$-5 < x \leq 3$	$x \in (-5{,}3]$	
$x > 4$	$x \in (4, \infty)$	

57. Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) $E_4(2)$ $\qquad E_4(2) = (2-4{,}2+4) = (-2{,}6)$

b) $E_2(4)$ $\qquad E_2(4) = (4-2{,}4+2) = (2{,}6)$

c) $E_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{6}\right)$ $\qquad E_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$

d) $E_{\frac{1}{6}}(-4)$ $\qquad E_{\frac{1}{6}}(-4) = \left(-4-\frac{1}{6}, -4+\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{25}{6}, -\frac{23}{6}\right)$

58. Escribe en forma de entorno estos intervalos:

a) $(-3,7)$ $\qquad (-3,7) \rightarrow$ Centro: $\frac{(-3+7)}{2} = 2;$ radio: 7-2=5 $\rightarrow E_5(2)$

b) $(-1,7)$ $\qquad (-1,7) \rightarrow$ Centro: $\frac{(-1+7)}{2} = 3;$ radio: 7-3=4 $\rightarrow E_4(3)$

c) $(\frac{3}{2},2)$ $\qquad (\frac{3}{2},2) \rightarrow$ Centro: $\frac{\left(\frac{3}{2}+2\right)}{2} = \frac{7}{4};$ radio: 2-$\frac{7}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow E_{\frac{1}{4}}(\frac{7}{4})$

d) $\left(\frac{-2}{5},\frac{5}{6}\right)$ $\qquad \left(\frac{-2}{5},\frac{5}{6}\right) \rightarrow$ Centro: $\frac{\left(\frac{-2}{5}+\frac{5}{6}\right)}{2} = \frac{13}{60};$ radio: $\frac{5}{6} - \frac{13}{60} = \frac{37}{60} \rightarrow E_{\frac{37}{60}}(\frac{13}{60})$

59. Escribe en forma de intervalo los valores de x que satisfacen cada una de las siguientes desigualdades:

a) $-2 \leq 3x < 9$

$$-2 \leq 3x < 9 \rightarrow -\frac{2}{3} \leq x < 3 \rightarrow x \in \left(-\frac{2}{3},3\right)$$

b) $-7 < x - 5 < 6$

$$-7 < x - 5 < 6 \rightarrow -2 < x < 11 \rightarrow x \in (-2,11)$$

c) $0 < 2x - 1 \leq 10$

$$0 < 2x - 1 \leq 10 \rightarrow 1 < 2x \leq 11 \rightarrow \frac{1}{2} < x \leq \frac{11}{2} \rightarrow x \in \frac{1}{2},\frac{11}{2}$$

60. Escribe en forma de intervalo los valores de *x* para los que se puede calcular estas expresiones:

a) $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow x \in [0,\infty)$$

b) $\sqrt{x^2}$

$$\sqrt{x^2} \rightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty,\infty)$$

c) $\sqrt{1-x}$

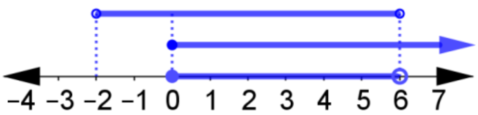
$$\sqrt{1-x} \rightarrow 1 - x \geq 0 \rightarrow 1 \geqslant x \rightarrow x \in (-\infty,1]$$

d) $\sqrt{9-x^2}$

$$\sqrt{9-x^2} \rightarrow 9 - x^2 \geq 0 \rightarrow 9 \geq x^2 \rightarrow -3 \leq x \leq 3 \rightarrow x \in [-3,3]$$

61. Representa los intervalos $(-2,6)$ y $[0,\infty)$ en la misma gráfica y señala su intersección.

La intersección es el intervalo 0,6)



62. Escribe dos intervalos cuya intersección sea $(-1,4)$.

La respuesta es abierta. Pueden ser infinitos intervalos, por ejemplo $[-3,4) \cap (-1,12)$

63. Expresa como intervalo o unión de intervalos disjuntos:

a) $(-1,3) \cup [0,4)$

$$(-1,3) \cup [0,4) = (-1,4)$$

b) $[1,6) \cup (3,7]$

$$[1,6) \cup (3,7] = [1,7]$$

c) $(-\infty, 6) \cap (2,8)$

$$(-\infty, 6) \cap (2,8) = (2,6)$$

d) $[-3,0) \cup (-3,0]$

$$[-3,0) \cup (-3,0] = [-3,0]$$

e) $E_2(3) \cup E_3(1)$

$$E_2(3) \cup E_3(1) = (1,5) \cup (-2,4) = (-2,5)$$

f) $E_2(3) \cap E_3(1)$

$$E_2(3) \cap E_3(1) = (1,5) \cap (-2,4) = (1,4)$$

Valor absoluto y distancia

64. Calcula el valor de estas operaciones:

a) $\big|3 - |-5|\big| = |3-5| = |-2| = 2$

b) $\big|2 - |1-8|\big| + 1 = |2 - |-7|| + 1 = |2-7| + 1 = +5 + 1 = 6$

c) $|3-5| + |1-5| = |-2| + |-4| = 2 + 4 = 6$

d) $\left|\sqrt{5} - \sqrt{2}\right| - \left|\sqrt{2} - \sqrt{5}\right| = (\sqrt{5} - \sqrt{2}) - (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 0$

e) $\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right| - \left|\frac{1}{4} - \frac{4}{5}\right| = \left|-\frac{1}{10}\right| - \left|-\frac{11}{20}\right| = \frac{1}{10} - \frac{11}{20} = \frac{-9}{20}$

f) $|(-2) \cdot |4 + (-3)| - 5| = |(-2) \cdot 1 - 5| = |-2-5| = +7$

65. ¿Cuál es la distancia entre $\sqrt{10}$ y π: $\left(\pi - \sqrt{10}\right)$ o $\left(\sqrt{10} - \pi\right)$?

La distancia vale $d(\sqrt{10}, \pi) = |\sqrt{10} - \pi| = \sqrt{10} - \pi$ porque $\sqrt{10} > \pi$

66. Averigua qué intervalos de números cumplen las siguientes desigualdades:

a) $|3x| < 4 \rightarrow -4 < 3x < 4 \rightarrow \frac{-4}{3} < x < \frac{4}{3} \rightarrow x \in \left(\frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

b) $|2x - 3| < 5 \rightarrow -5 < 2x - 3 < 5 \rightarrow -2 < 2x < 8 \rightarrow -1 < x < 4 \rightarrow x \in (-1,4)$

c) $|-x| > 6 \rightarrow |x| > 6 \rightarrow \begin{cases} x > 6 \rightarrow x \in (6, \infty) \\ x < -6 \rightarrow x \in (-\infty, -6) \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (6, \infty)$

67. Desarrolla las siguientes expresiones aplicando la definición de valor absoluto:

a) $2x - |x - 2| = \begin{cases} 2x - (x-2) & \text{si } x > 2 \\ 2x + x - 2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2 & \text{si } x > 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

b) $|x| + |3x| = |x| + 3 \cdot |x| = 4|x| \rightarrow \begin{cases} 4x & \text{si } x > 0 \\ -4x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c) $|x+2|-|2x| = \begin{cases} x+2-2|x| & si \;\; x \geq -2 \\ -x-2-2|x| & si \;\; x < -2 \end{cases} = \begin{cases} x+2-2x & si \;\; x \geq 0 \\ x+2+2x & si \;\; -2 \leq x < 0 \\ -x-2+2x & si \;\; x < -2 \end{cases} =$
$\begin{cases} 2-x & si \;\; x \geq 0 \\ 3x+2 & si \;\; -2 \leq x < 0 \\ x-2 & si \;\; x < -2 \end{cases}$

$d)$ $\big||x|+|1-x|\big| = |x|+|1-x| = \begin{cases} x+|1-x| \text{ si } x \geq 0 \\ -x+|1-x| \text{ si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-(1-x) \text{ si } x > 1 \\ x+1-x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x+1-x \text{ si } x < 0 \end{cases}$
$= \begin{cases} 2x-1 \text{ si } x > 1 \\ 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x+1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Aproximaciones y errores

68. Aproxima las expresiones a dos cifras decimales:

a) $2{,}23 \cdot 5{,}02 = 11{,}1946 \simeq 11{,}19$
b) $5{,}25 : (3{,}12-3{,}03) = 58,\widehat{3} \simeq 58{,}33$
c) $\sqrt{7} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^3} : \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{7} = 1{,}383087 \ldots \simeq 1{,}38$

69. Opera y redondea el resultado a 3 cifras significativas:

a) $5{,}76 : 0{,}00238 = 2420{,}16807 \ldots \simeq 2420$
b) $5{,}43 \cdot (21{,}6-12{,}7) = 48{,}327 \simeq 48{,}3$
c) $4{,}78 : (78600+243) \simeq 6{,}06 \cdot 10^{-5}$
d) $\sqrt{5} \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) \simeq 5{,}40$

70. Calcula el error absoluto y relativo de estas aproximaciones:

a) $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09 \rightarrow e_A = \left|\frac{2\pi}{3} - 2{,}09\right| = 0{,}0043051 \rightarrow e_R = 0{,}0021$
b) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \rightarrow e_A = \left|1{,}618 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = 0{,}0000340 \rightarrow e_R = 0{,}000021$
c) $\pi^2 \approx 10 \rightarrow e_A = |\pi^2 - 10| = 0{,}130 \ldots \rightarrow e_R = 0{,}0132$

71. Calcula una aproximación al valor de $\frac{23}{19}$ con un error inferior al 1%.

Para que el error relativo sea menor de 1%, debe cumplirse:

$$e_R = \frac{\left|\frac{23}{19} - a\right|}{\frac{23}{19}} < \frac{1}{100} \rightarrow \left|\frac{23}{19} - a\right| < \frac{23}{1900} \rightarrow \frac{-23}{1900} < \frac{23}{19} - a < \frac{23}{1900}$$
$$\rightarrow \frac{-23}{1900} + \frac{2300}{1900} \leq a < \frac{23}{1900} + \frac{23300}{1900} \rightarrow \frac{2277}{1900} < a < \frac{2323}{1900}$$

72. Brahmagupta (India, s.VII a.C.) aproximó el valor de π por $\sqrt{10}$. Arquímedes (Grecia, s. III a.C.) utilizó la aproximación $\pi \approx \frac{245}{78}$. Para cada una de las aproximaciones, ¿cuántas cifras decimales exactas tienen? ¿Qué error absoluto y relativo tienen cada una?

Brahmagupta: $\sqrt{10} \simeq 3{,}16228$ que coincide con π en 2 cifras. El error cometido en esta aproximación es: $e_A = 0{,}020685$ y $e_R = 0{,}00658$.

Arquímedes: $\frac{245}{78} = 3{,}1410256$ que tiene 4 cifras de π. Los errores absoluto y relativo son: $e_A = 0{,}000567$ y $e_R = 0{,}00018049$.

73. Para construir un cubo de 2 m^3 de volumen, un escultor lo fabrica tomando una arista de 1,26 m. ¿Qué error absoluto comete? ¿Qué error relativo? Calcula el error relativo que comete en el volumen del cubo en comparación con el que quería construir.

El valor de la arista debería ser $\sqrt[3]{2} = 1{,}259821$, por tanto comete un error de $e_A = 0{,}00007895\ m$. El error relativo es $e_R = 0{,}00006266$.

Para el volumen, al utilizar como arista 1,26 m, resulta un volumen de $1{,}26^3 = 2{,}000376\ m^3$ en lugar de los 2 m^3 buscados. Comete un error de $e_A = 0{,}000376\ m^3$ y $e_R = 0{,}000188$

Notación científica

74. Expresa en notación científica y calcula:

a) $25.000.000^4 \cdot 92^3 = 3{,}906 \cdot 10^{29} \cdot 7{,}787 \cdot 10^5 = 3{,}042 \cdot 10^{35}$

b) $\sqrt{0{,}0005^2 + 0{,}0012^2} = \sqrt{2{,}55 \cdot 10^{-7} + 1{,}44 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{1{,}69 \cdot 10^{-6}} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$

c) $\frac{500^5 \cdot 0{,}0004^5}{400^2 + 378{,}5^2} = \frac{3{,}125 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}024 \cdot 10^{-17}}{1{,}6 \cdot 10^5 + 1{,}433 \cdot 10^5} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-4}}{3{,}033 \cdot 10^5} = 1{,}05 \cdot 10^{-9}$

d) $3^{(3^3)} = 3^{27} = 7{,}626 \cdot 10^{12}$

75. Realiza las operaciones en notación científica:

a) $(9{,}21 \cdot 10^5)^3 = 7{,}8123 \cdot 10^{17}$

b) $5{,}21 \cdot 10^2 + 4{,}01 \cdot 10^3 - 1{,}02 \cdot 10^{-1} = 4{,}53 \cdot 10^3$

c) $6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 2{,}45 \cdot 10^{-12} = 1{,}475 \cdot 10^{12}$

d) $\frac{4{,}80 \cdot 10^{-3} + 2{,}33 \cdot 10^{-4}}{1{,}04 \cdot 10^{-5}} = 4{,}839 \cdot 10^2$

76. La distancia media entre el Sol y la Tierra es de $1{,}49 \cdot 10^{11}$ m, y la velocidad a la que viaja la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s. ¿Cuánto tiempo tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra?

Despejando de la fórmula de la velocidad:

$$t = \frac{e}{v} = \frac{1{,}49 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 496{,}6\ \text{s} = 8\,min\,16{,}\widehat{6}\ \text{s}$$

77. Recientemente un estudio ha revelado que en el mundo hay en total $9{,}04 \cdot 10^{13}$ \$ y la población mundial es de $7.35 \cdot 10^{9}$ personas. Si repartiéramos el dinero equitativamente, ¿cuánto dinero tocaría a cada persona?

Para saber cuánto dinero toca a cada una de las personas basta dividir ambas cantidades:

$$\frac{9{,}04 \cdot 10^{13}}{7{,}35 \cdot 10^{5}} = 1{,}23 \cdot 10^{4}\ \$/\mathrm{persona}$$

Potencias y radicales

78. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades. Para las expresiones erróneas, busca un contraejemplo y corrígelas:

a) $(x^a)^b = x^{a+b}$

Es falsa, debería ser $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

b) $(x \cdot y)^{a \cdot b} = x^a \cdot y^b$

Falsa, debería ser $(xy)^{ab} = x^{ab} y^{ab}$

c) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

Falsa, debería ser $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

d) $x^a \cdot x^b = x^{a \cdot b}$

Falsa, debería ser $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

e) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Falsa, la expresión no se puede desarrollar de ningún modo. Habría que realizar primero la suma y después calcular la raíz.

79. Expresa en forma de potencia los siguientes radicales:

a) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$

c) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

d) $\sqrt[5]{7^{10}} = 7^{\frac{10}{5}} = 7^2$

80. Expresa en forma radical estas potencias:

a) $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

b) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

c) $2^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{2^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$

d) $5^{\frac{-3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5^3}}$

e) $2^{1{,}5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$

f) $3^{1{,}\widehat{4}} = 3^{\frac{13}{9}} = \sqrt[9]{3^{13}}$

g) $5^{3{,}2\widehat{5}} = 5^{\frac{293}{90}} = \sqrt[90]{5^{293}}$

h) $2^{-2{,}45} = \frac{1}{2^{\frac{49}{20}}} = \frac{1}{\sqrt[20]{2^{49}}}$

81. Introduce los factores dentro de la raíz:

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$

b) $3x^2\sqrt{2x} = \sqrt{3^2x^4 2x} = \sqrt{18x^5}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$

e) $\frac{a^2b}{c^3}\sqrt{\frac{c^2}{a^2b^3}} = \sqrt{\frac{a^4b^2c^2}{c^6a^2b^3}} = \sqrt{\frac{a^2}{c^4b}}$

f) $3\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^5}$

g) $2x\sqrt[3]{\frac{2}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^3x^3 2}{x^2}} = \sqrt[3]{16x}$

h) $\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^6b}{b^3a^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2}}$

82. Extrae los factores posibles de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{\frac{3^3 \cdot 7^5}{2^7}} = \frac{3 \cdot 7^2}{2^3}\sqrt{\frac{3 \cdot 7}{2}}$

c) $\sqrt{a^5b^3c^6} = a^2bc^3\sqrt{ab}$

d) $\sqrt{\frac{x^3}{y^5}} = \frac{x}{y^2}\sqrt{\frac{x}{y}}$

e) $\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^5} = 2 \cdot 3\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}$

f) $\sqrt[4]{\frac{3^5}{2^3}} = 3\sqrt[4]{\frac{3}{2^3}}$

g) $\sqrt[5]{a^7b^5c^{12}} = abc^2\sqrt[5]{a^2c^2}$

h) $\sqrt[3]{\frac{x^8}{y^5}} = \frac{x^2}{y}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}$

83. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[5]{a^{10}b^5} = a^2b$

b) $\sqrt[4]{16x^2} = \sqrt[4]{2^4x^2} = 2\sqrt{x}$

c) $\sqrt[6]{8x^3} = \sqrt[6]{2^3x^3} = \sqrt{2x}$

d) $\left(\sqrt[6]{25x^4}\right)^3 = \sqrt{25x^4} = 5x^2$

84. Realiza las operaciones siguientes reduciendo a índice común los radicales:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^3}\sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{3^5}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{2^3}\sqrt[12]{2^2} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[4]{2^3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{3}$

d) $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^5}} = \frac{\sqrt[12]{a^4}\sqrt[12]{a^6}}{\sqrt[12]{a^{15}}} = \sqrt[12]{\frac{a^{10}}{a^{15}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^5}}$

85. Racionaliza la expresión: $\frac{3}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$$\frac{3}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})}{2}$$

86. Racionaliza estas expresiones.

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5\sqrt{x}}{x}$

c) $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \sqrt{3} - 1$

d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 5 + 2\sqrt{5}$

e) $\frac{x}{x+\sqrt{x}} = \frac{x(x-\sqrt{x})}{x^2-x} = \frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$

f) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}$

g) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{7+2\sqrt{10}}{3}$

h) $\frac{4}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{4\sqrt[5]{2^2}}{2} = 2\sqrt[5]{2^2}$

87. Realiza estas operaciones y simplifica el resultado:

a) $\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{125} + 3\sqrt{45} - 2\sqrt{20} = 5\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{27} - \frac{4}{5}\sqrt{75} + \frac{1}{2}\sqrt{48} = \frac{2}{3}3\sqrt{3} - \frac{4}{5}5\sqrt{3} + \frac{1}{2}4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$

d) $2\sqrt[3]{72} + \sqrt[3]{243} - \sqrt[3]{1125} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{3^2} + 3\sqrt[3]{3^2} - 5 \cdot \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{3^2}$

88. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a) $(1+\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$

b) $\frac{2}{1+\sqrt{2}} - \frac{2}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2})-2(1+\sqrt{2})}{1-2} = \frac{-4\sqrt{2}}{-1} = 4\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1 - \frac{(\sqrt{2}-1)}{2-1} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2$

89. Comprueba, sustituyendo y simplificando, que el número $\sqrt{2}+1$ es una raíz del polinomio x^2-2x-1.

Debe cumplirse que al sustituir x por $\sqrt{2}+1$ el polinomio debe valer 0:

$$(\sqrt{2}+1)^2-2(\sqrt{2}+1)-1=2+2\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}-2-1=0$$

90. ¿Para qué valores de x se verifican estas igualdades?

a) $\sqrt{x^2}=x \rightarrow x \geq 0$

b) $\sqrt{x^2}=|x| \rightarrow x \in \mathbb{R}$

c) $\sqrt[3]{x^3}=x \rightarrow x \in \mathbb{R}$

d) $\sqrt[4]{x^4}=-x \rightarrow x \leq 0$

Logaritmos

91. Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $log_2(128)=log_2(2^7)=7$

b) $log_2(\sqrt{32})=log_2 2^{5/2}=\frac{5}{2}$

c) $log_4(2)=log_4\sqrt{4}=\frac{1}{2}$

d) $log_{\sqrt{2}}(4)=log_{\sqrt{2}}(4)\left((\sqrt{2})^4\right)=4$

e) $\log_4\left(\sqrt[3]{2}\right)=\log_4\left(2^{\frac{1}{3}}\right)=\log_4\left(\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{6}$

f) $\log_2(0{,}125)=\log_2\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2 2^{-3}=-3$

g) $log_a\left(\frac{1}{a^2}\right)=log_a(a^{-2})=-2$

h) $log_{\sqrt[3]{a}}(a^3)=log_{\sqrt[3]{a}}\left(\left(\sqrt[3]{a^3}\right)^3\right)=9$

92. Aplica la definición y calcula la base de estos logaritmos:

a) $log_x 8=3 \rightarrow x^3=8 \rightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$

b) $log_x 2=\frac{1}{2} \rightarrow x^{1/2}=2 \rightarrow x=2^2=4$

c) $log_x \frac{1}{16}=4 \rightarrow x^4=\frac{1}{16}=2^{-4} \rightarrow x=2^{-1}$

d) $log_x 25=\frac{-1}{2} \rightarrow x^{-\frac{1}{2}}=25=5^2 \rightarrow x=5^{-4}$

93. Utilizando logaritmos, calcula el valor de *x* en cada caso:

a) $7^x=4 \rightarrow x=log_7(4)$

b) $2\cdot 3^x=7 \rightarrow 3^x=\frac{7}{2} \rightarrow x=log_3\left(\frac{7}{2}\right)$

c) $\frac{3^x}{23}=5 \rightarrow 3^x=115 \rightarrow x=log_3(115)$

d) $(4^x)^2=7 \rightarrow 4^x=\sqrt{7} \rightarrow x=log_4(\sqrt{7})$

94. Sabiendo que $log(2) = 0{,}301$ y $log(3) = 0{,}477$ calcula el valor de los siguientes logaritmos:

a) $log(8) = log\ 2^3 = 3\ log\ 2 = 0{,}903$

b) $log(12) = log(2^2 3) = 2\ log\ 2 + log\ 3 = 0{,}602 + 0{,}477 = 1{,}079$

c) $log(1{,}5) = log\left(\frac{3}{2}\right) = log\ 3 - log\ 2 = 0{,}477 - 0{,}301 = 0{,}176$

d) $log(5) = log(\frac{10}{2}) = 1 - log\ 2 = 0{,}699$

e) $log_3(8) = \frac{log\ 8}{log\ 3} = \frac{3 \cdot log\ 2}{log\ 3} = \frac{0{,}903}{0{,}477} = 1{,}893$

f) $log(14{,}4) = log\left(\frac{12^2}{10}\right) = log\left(\frac{2^4 \cdot 3^2}{10}\right) = 4\ log\ 2 + 2\ log\ 3 - 1 = 1{,}158$

g) $log_2(3) = \frac{log(3)}{log(2)} = \frac{0{,}477}{0{,}301} = 1{,}585$

h) $log_3(10) = \frac{log\ 10}{log\ 3} = \frac{1}{0{,}477} = 2{,}096$

95. Sabiendo que $log_a(x) = 1{,}23$ y que $log_a(y) = 0{,}854$, calcula estos logaritmos:

a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y = 1,23 + 0,854 = 2,084$

b) $\log_a(x^2 y^3) = 2\log_a x + 3\log_a(y) = 2,46 + 2,562 = 5,022$

c) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y = 1,23 - 0,854 = 0,376$

d) $log_a(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} log\quad_a x = \frac{1}{3} 1{,}23 = 0{,}41$

e) $\log_a\left(ax^2\right) = \log_a a + 2\log_a x = 1 + 2 \cdot 1,23 = 3,46$

f) $log_a\left(\frac{a}{x}\right) = 1 - log\quad_a x = 1 - 1{,}23 = -0{,}23$

g) $\log_x(a) = \frac{\log_a a}{\log_a x} = \frac{1}{1,23} = 0,813$

h) $\log_x(y) = \frac{\log_a y}{\log_a x} = \frac{0,854}{1,23} = 0,694$

96. Demuestra la veracidad de las siguientes expresiones:

a) $\log_{1/a}(x) = -\log_a(x) \rightarrow \log_{1/a}(x) = \frac{\log_a(x)}{\log a\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log_a x}{-\log_a a} = -\log_a x$

b) $\log_{\sqrt{a}}(x) = 2\log_a(x) \rightarrow \log_{\sqrt{a}}(x) = \frac{\log_a x}{\log_a(\sqrt{a})} = \frac{\log_a(x)}{1/2} = 2 \cdot \log_8 x$

97. Aplicando logaritmos calcula estas expresiones:

a) $6^{4000} \to log(6^{4000}) = 4000 \cdot log\, 6 = 3112{,}605 \to 6^{4000} = 10^{3112{,}605} = 10^{3112} \cdot 10^{0{,}605} = 4{,}0242 \cdot 10^{3112}$

b) $5^{-999} \to log(5^{-999}) = -999\, log(5) = -698{,}271 \to 5^{-999} = 10^{-698{,}271} = 10^{-698} \cdot 10^{-0{,}271} = 5{,}3575 \cdot 10^{-699}$

c) $4^{300} \cdot 3^{100} \to log(4^{300} \cdot 3^{100}) = 300 \cdot log\, 4 + 100 \cdot log\, 3 = 228{,}33$ entonces:

$$4^{300} \cdot 3^{100} = 10^{228{,}33} = 10^{228} \cdot 10^{0{,}33} = 2{,}1386 \cdot 10^{228}$$

d) $\frac{7^{(6^5)}}{2^{(3^4)}} \to log\left(\frac{7^{(6^5)}}{2^{(3^4)}}\right) = 6^5\, log\, 7 - 3^4\, log\, 2 = 7776\, log\, 7 - 81\, log\, 2 =$ 6547,099 entonces:

$$\frac{7^{(6^5)}}{2^{(3^4)}} = 10^{6547{,}099} = 1{,}256 \cdot 10^{6547}$$

98. Aplicando las propiedades de los logaritmos, calcula el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $log(x) = 3\, log(2) + 2\, log(5) \to log(x) = log(2^3 \cdot 5^2) \to x = 200$

b) $\log_3(x) = 2\log_3(5) - \log_3(4) \to \log_3 x = \log_3\left(5^2/4\right) \to x = \frac{25}{4}$

c) $ln(x) = 1 + 2\, ln(3) - \frac{1}{2}(ln(7) + ln(3)) \to ln(x) = ln\, e + ln\, 3^2 - ln(\sqrt{7 \cdot 3}) = ln\left(\frac{9e}{\sqrt{21}}\right) \to x = \frac{9e}{\sqrt{21}}$

99. Aplica logaritmos en las siguientes expresiones desarrollando adecuadamente cada expresión:

a) $F = x \cdot y^a \to log\, F = log\, x + a\, log\, y$

b) $F = 3\frac{x^5}{y^2} \to log\, F = log\, 3 + 5\, log\, x - 2\, log\, y$

c) $F = \frac{3\sqrt{x}}{5\sqrt[3]{y^2}} \to log\, F = log\, 3 + \frac{1}{2} log\, x - log\, 5 - \frac{2}{3} log\, y$

d) $F = \frac{\sqrt[5]{x^3 y}}{10\sqrt[3]{x^5 y^2}} \to log\, F = \frac{3}{5} log\, x + \frac{1}{5} log\, y - 1 - \frac{5}{3} log\, x - \frac{2}{3} log\, y$

100. Agrupa las siguientes expresiones y escribe el valor de F en función del resto de variables:

a) $ln\, F = 3\, ln\, x + 2\, ln\, y \to F = x^3 y^2$

b) $log\, F = 2 - log\, x - 3\, log\, y \to F = \frac{100}{x \cdot y^3}$

c) $log\, F = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} log\, x + log\, y \to F = \frac{\sqrt{10}y}{x^{2/3}}$

Aplicaciones

101. Crecimiento de la población. Se estima que la población mundial es de 7 mil millones de personas y crece un 2% anual. ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 30 años?

Como la población crece un 2% cada año, se multiplica por 1,02. Entonces:

$$P = 7 \cdot 10^9 \cdot (1{,}02)^{30} = 1{,}268 \cdot 10^{10} \text{ personas} = 12{,}7 \text{ miles de millones de personas}$$

102. Distancia entre el Sol y la Tierra. Escribe estas cantidades en notación científica, usando tres cifras significativas:

a) 125 083 000 b) 2980,5 c) 0,0001568
d) 0,00001002 e) 2,983 f) 40 083 197

a) 125 083 000 → 1,25 · 108
b) 2980,5 → 2,98 · 103
c) 0,0001568 → 1,56 · 10-4
d) 0,00001002 → 1 · 10-5
e) 2,983 → 2,93 · 100
f) 40 083 197 → 4 · 107

103. Coste de los coches eléctricos. El precio de los coches eléctricos ha estado disminuyendo un 5% anual los últimos tiempos, de manera que ahora cuestan la mitad de lo que costaban al principio. ¿Cuántos años hace que salieron al mercado?

Como cada año cae un 5% el precio se debe multiplicar por 0,95. Entonces si el precio acaba siendo la mitad, el factor por el que se debe multiplicar debe valer 0,5:

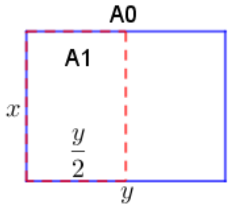
$$0{,}5 = (0{,}95)^t \to ln\,0\,,5 = t \cdot ln(0{,}95) \to t = \frac{ln\,0{,}5}{ln\,0{,}95} = 13{,}51 \text{ años}$$

104. Nota musical. La nota la tiene una frecuencia estándar de 440 Hz y en la siguiente octava, su frecuencia es el doble, 880 Hz. Cada octava está formada por 12 notas diferentes que se forman al multiplicar cada una por una cantidad constante. ¿Por cuánto hay que multiplicar a cada nota para obtener la siguiente? Si un fabricante aproxima esa cantidad por 1,06, ¿cuál será la frecuencia de la nota La en la octava mayor? Calcula el error absoluto y el relativo de la nota la de la octava mayor en el instrumento del fabricante.

Si llamamos x al número por el que se multiplica cada nota para obtener la siguiente, entonces, tras 12 notas se tiene que $880 = 440 \cdot x^{12} \to x^{12} = 2 \to x = \sqrt[12]{2} = 1{,}0595 \simeq 1{,}06$

Si partiendo de la nota La de 440 Hz, multiplicamos 12 veces por 1,06, en lugar de llegar a la nota de 880 Hz, se llega a $440 \cdot 1{,}06^{12} = 885{,}37$ Hz. Se produce un error absoluto $e_4 = 5{,}37$ Hz y relativo $e_R = 0{,}0061$.

105. Formato hojas. El formato DIN-A es un estándar para el tamaño de hojas de papel. La familia se forma a partir del DIN-A0, cuya superficie es de 1 m^2, y a partir de ahí cada tamaño se define dividiendo el anterior en dos partes.



Los distintos tamaños son semejantes entre sí, de manera que sus lados son proporcionales

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\frac{y}{2}}$$

Por cuestiones prácticas, las dimensiones de los lados se redondean al milímetro. ¿Cuáles son las dimensiones del DIN-A0? Aproxímalas al milímetro. ¿Cuál es el error absoluto cometido en cada lado? ¿Cuál es el error del área?

La relación entre los lados de la hoja se puede escribir $\frac{y^2}{2} = x^2 \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{2}}$ y sustituyendo en el área del DIN-A0: $x \cdot y = 1\ \text{m}^2 \rightarrow \frac{y^2}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow y^2 = \sqrt{2} \rightarrow y = \sqrt[4]{2} = 1{,}189\ \text{m}$; $x = 0{,}841\ \text{m}$

Si se aproximan al milímetro, sus dimensiones son 1 189 mm y 841 mm.

El error absoluto que se comete en la altura es $e_A = 0{,}207\ \text{mm}$ y en la anchura $e_A = 0{,}104\ \text{mm}$

Multiplicando ambas cantidades se tiene que en área de la hoja vale:

$A = xy = 0{,}999949\ \text{m}^2$ por lo que el error cometido en el área es de $e_A = 0{,}000051\ \text{m}^2$.

Un mundo matemático

1. ¿Quién fue el fundador de la escala Richter? En la actualidad, ¿existen otros procedimientos para medir la intensidad sísmica? Cítalos.

Puedes visitar las siguientes webs:

- https://www.ign.es/web/sis-area-sismicidad
- https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/investigacion/richter-y-la-magnitud-de-los-terremotos/
- https://es.wikipedia.org/wiki/Escalas_de_magnitud_s%C3%ADsmica

o descargarte la aplicación: **Sismología PRO**

2. Averigua la magnitud de los terremotos producidos en España en los últimos 20 años. Una fuente fiable que puedes consultar es la del IGME.

Puedes consultar el siguiente enlace: https://www.igme.es

3. ¿Cuál es la magnitud de un terremoto en el que la vibración mueve la aguja 1 mm?

$M = log\left(\frac{1}{0{,}001}\right) = 3$

4. El 11 de mayo de 2011 se produjo un terremoto de magnitud 5,2 en la región de Murcia. Este sismo sacudió principalmente a la localidad de Lorca y provocó numerosos daños, tanto materiales como personales. ¿Cuál fue el desplazamiento de las agujas de los sismógrafos durante el terremoto de Lorca?

$5{,}2 = \log\left(\frac{x}{0{,}001}\right) = \log x - \log(0{,}001) = \log x + 3 \Rightarrow \log x = 2{,}2 \;\Rightarrow\; x = 10^{2{,}2} \approx 158\, mm$

El desplazamiento de las agujas de los sismógrafos durante el terremoto de Lorca fue de 158 mm.

5. El mismo año, en Japón, se produjo un gran seísmo. Investiga cuál fue su intensidad y sus réplicas, así como sus efectos devastadores.

Además, de alguna de las webs anteriores, puedes utilizar:
https://es.wikipedia.org/wiki/Terremoto_y_tsunami_de_Japón_de_2011

6. ¿Cuál fue el movimiento que detectaron los sismógrafos durante el terremoto de Japón?

Considerando que en Japón en 2011 hubo un terremoto de magnitud de 9,1 en la escala Richter, entonces el movimiento que detectaron los sismógrafos fue:

$$9{,}1 = \log\left(\frac{x}{0{,}001}\right) = \log x - \log(0{,}001) = \log x + 3 \Rightarrow \log x = 6{,}1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 10^{6{,}1} \approx 1258925\, mm$$

7. ¿Cuántas veces más se movió la aguja en el terremoto de Japón que en el de Lorca?

$\frac{10^{6{,}1}}{10^{2{,}2}} = 10^{3{,}9} = 7943$ veces más se movió la aguja en Japón que en Lorca.

8. ¿Un terremoto de magnitud 7 es diez veces más fuerte que uno de magnitud 6?

Si M=6, entonces:

$$6 = \log\left(\frac{x}{0{,}001}\right) = \log x - \log(0{,}001) = \log x + 3 \Longrightarrow \log x = 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = 10^3 = 1000$$

Por otra parte, si M=7, entonces:

$$7 = \log\left(\frac{x}{0{,}001}\right) = \log x - \log(0{,}001) = \log x + 3 \Longrightarrow \log x = 4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = 10^4 = 10000$$

Efectivamente, es 10 veces más fuerte un terremoto de magnitud 7 que uno de magnitud 6.

9. ¿Qué es un sonómetro? ¿Existe alguna legislación sobre el nivel de ruido en el municipio en que vives?

Un sonómetro es un instrumento de medida que se utiliza para medir el nivel de ruido en un determinado lugar y en un momento dado.

La segunda parte de la respuesta está abierta puesto que depende del lugar en el que vivas.

10. Calcula el nivel de intensidad de sonido en un concierto si se ha medido una intensidad de 10 W/m^2. ¿Se sobrepasan los límites establecido por la OMS?

$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{10}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log 10^{13} = 10 \cdot 13 = 130$ dB

El nivel de intensidad de sonido de este concierto es de 130 decibelios. Obviamente se superan los límites marcados por la OMS que son de 65 dB durante el día y 55 dB de noche.

11. Averigua el nivel de ruido estimado de un avión al despegar, de una cortadora de césped, del tráfico en una calle de una ciudad o de una cafetería. Analiza si en el entorno en el que te mueves se supera o no ese límite.

Los valores que damos a continuación son aproximados y pueden variar.

- Un avión al despegar: 130 dB
- Una cortadora de césped: 100 dB
- Tráfico en una ciudad: 70 dB
- En una cafetería: 60 dB

12. Investiga la relación entre el pH y la salud.

Respuesta abierta.

13. Consulta el valor del pH en el agua de las piscinas y de algunas frutas y verduras.

El pH óptimo del agua de las piscinas es de 7,4. Se considera aceptable si el pH se encuentra entre 7,2 y 7,6.

El PH de algunas frutas y verduras son:

Zanahoria	5,71
Aguacate	6,24
Espinaca	6,99
Plátano	4,93
Manzana	3,47
Mandarina	3,20

14. La concentración de un ion de hidrógeno en una muestra de agua de mar ha sido [H+] = 5 · 10–9 M. Calcula el pH.

$pH = -\log[H^+] = -\log[5 \cdot 10^{-9}] \approx 8{,}3$

15. El nivel idóneo del pH en la sangre debe oscilar entre 7,35 y 7,45. Encuentra la variación correspondiente de iones de hidrógeno.

$$7{,}35 \leq pH \leq 7{,}45 \ \Rightarrow 7{,}35 \leq -\log[H^+] \leq 7{,}45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7{,}35 \geq \log[H^+] \geq -7{,}45 \Rightarrow 10^{-7{,}45} \leq [H^+] \leq 10^{-7{,}35} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3{,}55 \cdot 10^{-8} \leq [H^+] \leq 4{,}42 \cdot 10^{-8}$$

Por tanto, la concentración de iones de hidrógeno variará entre $3{,}55 \cdot 10^{-8}$ y $4{,}42 \cdot 10^{-8}$ moles por litro.