2 Ecuaciones, sistemas e inecuaciones

1 Expresiones algebraicas y polinomios

1. Calcula el valor numérico del polinomio $P(x)=x^2-2x-3$ para $x=-1$ y $x=3$. ¿Podrías encontrar algún otro valor de *x* para el que el valor numérico del polinomio sea cero?

$P(-1)=0$

$P(3)=0$

Ya no existen más raíces del polinomio. Un polinomio de segundo grado tendrá como mucho dos raíces.

2. Dados los polinomios $p(x)=2x^3-x-4$ y $q(x)=2x^2+x+2$, calcula las operaciones siguientes:

a) $p(x)+q(x)=2x^3+2x^2-2$

b) $p(x)-q(x)=2x^3-2x^2-2x-6$

c) $2p(x)+x\cdot q(x)=6x^3+x^2-8$

d) $p(x)\cdot q(x)=4x^5+2x^4+2x^3-9x^2-6x-8$

e) $p(x):q(x)$ Cociente: $x-\frac{1}{2}$ y resto: $\frac{-5}{2}x-3$

f) $(p(x))^2=p(x)\cdot p(x)=4x^6-16x^3+x^2+8x+16$

3. ¿Cuánto deben valer m y n para que $3x^4-x^3+mx^2+nx+1$ tenga como raíz $x=1$ y como resto 23 cuando se divide entre $(x-2)$?

El polinomio que cumple las condiciones es: $3x^4-x^3-6x^2+9x+1$

4. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3+3x^2-4x-12=(x+3)(x-2)(x+2)$

b) $x^3-x^2+x-1=(x-1)\left(x^2+1\right)$

c) $3x^3+4x^2-13x+6=3(x+3)(x-1)(x-\frac{2}{3})$

d) $2x^4+9x^3-18x^2-71x-30=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)(x+5)(x-3)$

5. Calcula el valor de m para que el polinomio $x^3-3x^2+mx+12$ tenga como raíz $x=3$. Calcula su descomposición factorial.

$m=-4$

$x^3-3x^2-4x+12=(x-3)\left(x^2-4\right)=(x-3)(x-2)(x+2)$

2 Binomio de Newton

6. Calcula el número combinatorio $\binom{7}{2}$. ¿Cuánto valdrá el número simétrico $\binom{7}{5}$? ¿Se cumple esto siempre?

$\binom{7}{2}=21$ y también $\binom{7}{5}=21$

Esta propiedad se cumple siempre. Se trata de la propiedad 2 de los números combinatorios.

7. Calcula el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(2x-x^2)^5$

El coeficiente que se pide es -80.

8. Calcula las siguientes potencias a partir de la fórmula del binomio de Newton:

a) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

b) $\left(\sqrt{x}-3\right)^4 = x^2 - 12x\sqrt{x} + 54x - 108\sqrt{x} + 81$

c) $\left(2x+3\right)^4 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

d) $\left(x^2+1\right)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

e) $(xy-y^2)^4 = x^4y^4 - 4x^3y^5 + 6x^2y^6 - 4xy^7 + y^8$

f) $\left(x-y\right)^7 = x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$

3 Ecuaciones

9. Localiza el error:

$$x=2 \xrightarrow{\text{por } x} x^2 = 2x \xrightarrow{\text{resta 4}} x^2-4 = 2x-4 \xrightarrow{\text{fact}}$$
$$\xrightarrow{\text{fact}} (x-2)(x+2) = 2(x-2) \xrightarrow{\text{simplif.}} x+2=2 \rightarrow x=0$$

En realidad, hay dos pasos donde se cambian la ecuación por otra no del todo equivalente. Al multiplicar la ecuación por x en el primer paso, se introduce como solución $x=0$. Los demás pasos son del todo correctos hasta que en el penúltimo paso se simplifica dividiendo la ecuación entre $x-2$. Esto hace que se elimine de la ecuación la solución $x=2$, por lo que la única solución es ahora $x=0$

10. Indica si los valores indicados son soluciones de las ecuaciones.

a) $2^x = 4;\ x=2,\ x=-2$

$x=2$ SI es solución.

$x=-2$ NO es solución.

b) $\sqrt{x^2-7e^x+2} = 4;\ x=-4$

$\sqrt{(-4)^2-7e^{-4}+2} \neq 4$ NO es solución

11. De las parejas de ecuaciones, indica cuáles son equivalentes y cuáles no.

a) $x=2;\ x^3=8$

Como ambas tienen las mismas soluciones, son equivalentes.

b) $3^x = 81;\ \log(2x+2)=1$

Ambas son equivalentes.

c) $2x-4 = x+9;\ 5x+2 = 3x-1$

No son equivalentes.

d) $x^3-4x^2+x\cdot 2^x = 0;\ x^2-4x+2^x=0$

No son equivalentes.

4 Ecuaciones de primer y segundo grado

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+\frac{8}{7}=0 \to x=\frac{-4}{7}$

b) $3(x-2)-2(5x+8)=0 \to x=-\frac{22}{7}$

c) $\frac{(x+1)}{3}-\frac{(3x+5)}{6}=1 \to x=-9$

d) $5-\frac{(x+2)}{4}=x-\frac{1}{2} \to x=4$

e) $3x^2-75=0 \to x=\pm 5$

f) $x^2-4x=x(2x+4) \to \begin{cases} x=0 \\ x=-8 \end{cases}$

13. Determina el valor de k para que la ecuación $x^2+kx+3=0$ tenga dos soluciones.

Para que la ecuación tenga dos soluciones, su discriminante deberá ser positivo:

$$\Delta = k^2-12>0 \quad k\in(-\infty,-\sqrt{12})\cup(\sqrt{12},\infty)$$

14. Determina el valor de k para que la ecuación $x^2+2x+k=0$ no tenga solución.

Para que la ecuación no tenga solución, su discriminante deberá ser negativo:

$$x^2+2x+k=0 \to 4-4k<0 \to 4<4k \to k>1 \to k\in(1,\infty)$$

15. Calcula las dimensiones de un rectángulo de diagonal 13 cm cuya base es 7 cm más grande que su altura.

La altura del rectángulo mide 5 cm y su altura 12 cm.

5 Ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2

16. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4-4x^2+3=0 \to \begin{cases} z=3 \to x=\pm\sqrt{3} \\ z=1 \to x=\pm 1 \end{cases}$

b) $2x^4-11x^2+5=0 \to \begin{cases} z=5 \to x=\pm\sqrt{5} \\ z=1/2 \to x=\pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$

c) $(x^2+1)x^2=5(2x^2-4) \to \begin{cases} z=5 \to x=\pm\sqrt{5} \\ z=4 \to x=\pm 2 \end{cases}$

d) $x^3-2x^2+x=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

e) $(3x+2)(x^2-4x)(x^2-9)=0 \to \begin{cases} x=-2/3 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases} \\ x=\pm 3 \end{cases}$

f) $x^3-4x^2+x+6=0;\quad x=-1, x=2, x=3$

g) $x^3-2x^2-4x+3=0$; $x=3, x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

h) $x^4-1=0 \rightarrow x=\pm 1$

17. Calcula el valor de k para que la ecuación $3x^3-x^2+kx+4=0$ tenga como solución $x=-2$. Para ese valor de k encuentra las otras soluciones.

$k=-12$

$$3x^3-x^2-12x+4=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ 3x^2-7x+2=0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1/3 \end{cases} \end{cases}$$

18. Halla las soluciones de la ecuación $(x-1)^4-5(x-1)^2+4=0$ utilizando previamente el cambio de variable $y=x-1$.

$x=2; x=0; x=3; x=-1$

6 Ecuaciones racionales

19. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-2}=1$; $x=-1$

b) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{1}{x-1}=1$; $x=2$

c) $\dfrac{3}{x^2-6x+8}+\dfrac{x-5}{x^2-5x+4}=\dfrac{1}{x-4}$; $x=5$

d) $\dfrac{1-x}{x+3}=\dfrac{2-x}{x+1}$; $x=5$

20. Dos grifos tardan 2 horas en llenar un depósito de agua. Si se llena utilizando solo uno de los grifos se sabe que el segundo grifo tarda 3 horas más que el primero. ¿Cuánto tiempo tardará cada grifo en llenar el depósito?

El primero tarda 3 horas y el segundo tarda 6h.

7 Ecuaciones con radicales

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+7}+5=x$

$$\sqrt{x+7}+5=x \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=9 \end{cases}$$

Se deben comprobar las soluciones.

$x=2 \rightarrow \sqrt{2+7}+5 \neq 2 \rightarrow \text{NO}$

$x=9 \rightarrow \sqrt{9+7}+5=9 \rightarrow \text{SI}$

b) $2\sqrt{x-1}+1=x$

$$2\sqrt{x-1}+1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow \text{SI} \\ x=5 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$$

Ambas soluciones son válidas.

c) $x-\sqrt{2x+3}=6$

$$x-\sqrt{2x+3} \rightarrow \begin{cases} x=11 \rightarrow \text{SI} \\ x=3 \rightarrow \text{NO} \end{cases}$$

d) $\sqrt{5x+6}-2x=3$

$$\sqrt{5x+6}-2x \rightarrow \begin{cases} x=-1 \rightarrow \text{SI} \\ x=-3/4 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$$

e) $\sqrt{x+4}=1+\sqrt{x-3}$

$$\sqrt{x+4} \rightarrow x=12 \rightarrow \text{SI}$$

f) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6} \rightarrow x=7 \rightarrow \text{SI}$$

22. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación: $x+3\sqrt{x-1}=-1$?

La ecuación no tiene solución.

23. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{3x+\sqrt{x+1}}=7$

$$\sqrt{3x+\sqrt{x+1}}=7 \rightarrow \begin{cases} x=15 \\ x=160/9 \end{cases}$$

Comprobamos su validez sustituyendo en la ecuación:

$x=15 \rightarrow \text{SI}$

$x=\frac{160}{9} \rightarrow \text{NO}$

b) $\sqrt[3]{x+1}+5=x$

$\sqrt[3]{x+1}+5=x \rightarrow x=7$

24. Encuentra un número tal que, si le quitas 10 unidades, obtienes la raíz cuadrada de dicho número más 10.

$$x-10=\sqrt{x+10}\rightarrow\begin{cases}x=6\rightarrow \text{NO}\\ x=15\rightarrow \text{SI}\end{cases}$$

Luego el número buscado es 15.

8 Ecuaciones logarítmicas

25. Resuelve las ecuaciones siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(2x+4)=2$

$\log(2x+4)=2\rightarrow x=48\rightarrow \text{SI}$

b) $3\log_x(2)+2\log_x(4)=-7$

$3\log_x(2)+2\log_x(4)=-7\rightarrow x=2^{-1}\rightarrow \text{SI}$

c) $\log_3(x)+\log_9(x)=3$

$\log_3(x)+\log_9(x)=3\rightarrow x=9\rightarrow \text{SI}$

d) $\log\left(5-x\right)+2\log\left(x\right)=\log(12)$

$$\log\left(5-x\right)+2\log\left(x\right)=\log(12)\rightarrow\begin{cases}x=2\rightarrow \text{SI}\\ x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}\rightarrow \text{SI}\\ x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}\rightarrow \text{NO}\end{cases}$$

26. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\log_2(x)=\log_8(x^2+2x)$

$$\log_2(x)=\log_8(x^2+2x)\rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow \text{NO}\\ x=2\rightarrow \text{SI}\\ x=-1\rightarrow \text{NO}\end{cases}$$

La única solución es $x=2$.

b) $2\log(x)=\log(64)+\log(4)$

$2\log(x)=\log(64)+\log(4)\rightarrow x=\pm 2^4$

La única solución válida es $x=16$.

c) $\log\left(x+5\right)+\log\left(3x+5\right)=\log\left(48\right)$

$$\log\left(x+5\right)+\log\left(3x+5\right)=\log\left(48\right)\rightarrow\begin{cases}x=1\rightarrow \text{SI}\\ x=-23/3\rightarrow \text{NO}\end{cases}$$

9 Ecuaciones exponenciales

27. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x=12$

$3^x=12\rightarrow x=\dfrac{\log 12}{\log 3}$

b) $3^{2x-5}=27$

$3^{2x-5}=27\rightarrow x=4$

c) $5^{x^2-x}=25$

$$5^{x^2-x}=25\rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=2\end{cases}$$

d) $2^{x-1}+3\cdot 2^x-2^{x+1}=24$

$2^{x-1}+3\cdot 2^x-2^{x+1}=24\rightarrow x=4$

e) $2\cdot 3^{1-x}+3^{x-1}=3^x$

$$2\cdot 3^{1-x}+3^{x-1}=3^x\rightarrow\begin{cases}u=3\rightarrow x=1\\\cancel{u=-3}\end{cases}$$

f) $9^{x-2}+3^{x+1}=90$

$$9^{x-2}+3^{x+1}=90\rightarrow\begin{cases}\cancel{u=-270}\\u=27=3^3\rightarrow x=3\end{cases}$$

g) $2^{2x-1}+2^x=5\cdot 2^3$

$$2^{2x-1}+2^x=5\cdot 2^3\rightarrow\begin{cases}\cancel{u=-10}\\u=8=2^3\rightarrow x=3\end{cases}$$

h) $2^x-4^{x+2}-2^{-2}=-1$

$$2^x-4^{x+2}-2^{-2}=-1\rightarrow\begin{cases}\cancel{u=-3/16}\\u=1/4=2^{-2}\rightarrow x=-2\end{cases}$$

28. Estudio biológico. Cierta colonia de bacterias crece de forma exponencial, pero si el medio posee recursos limitados o aparece un competidor, lo hace siguiendo la ecuación $N=\dfrac{200}{1+e^{-t}}$ (millones de bacterias) El tiempo está medido en días. ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que la población de bacterias llegue a 198 millones?

$4,595$ días

10 Sistemas de ecuaciones

29. Resuelve los siguientes sistemas lineales:

a) $\begin{cases}x-y+2z=5\\2x+y-z=11\\y+2z=4\end{cases}$

Las soluciones son $x=5, y=2, z=1$.

b) $\begin{cases}x-3y+z=-4\\3x+2y-2z=-11\\2x+y+2z=-1\end{cases}$

Las soluciones son: $x=-3, y=1, z=2$.

c) $\begin{cases}x-y-z=2\\-x+y-z=0\\x+y+z=0\end{cases}$

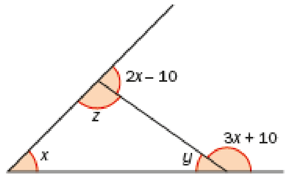
Las soluciones son: $x=1, y=0, z=-1$.

d) $\begin{cases} 3x+y+2z=11 \\ 2x+y+3z=13 \\ 5x+2y+z=8 \end{cases}$

Las soluciones son: $x=2, y=-3, z=4$

30. Encuentra los valores de los ángulos del triángulo:

$x=45^{\circ}, y=35^{\circ}, z=100^{\circ}$



11 Sistemas no lineales

31. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ 2x+y=11 \end{cases}$

Las soluciones son $\begin{cases} x_1=4 \rightarrow y_1=3 \\ x_2=\dfrac{32}{3} \rightarrow y_2=-\dfrac{31}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+3y^2=37 \\ xy=-10 \end{cases}$

Las soluciones son: $\begin{cases} x_1=5 \rightarrow y_1=-2 \\ x_2=-5 \rightarrow y_2=+2 \\ x_3=+2\sqrt{3} \rightarrow y_3=\dfrac{-5\sqrt{3}}{3} \\ x_4=2\sqrt{3} \rightarrow y_4=\dfrac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log(x)-\log(y-1)=1 \\ x-2y=14 \end{cases}$

Las soluciones son: $x=20, y=3$

d) $\begin{cases} \log(x)+2\log(y)=5 \\ 3\log(x)-\log(y)=1 \end{cases}$

Las soluciones son: $\begin{cases} x=10 \\ y=100 \end{cases}$

32. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{15} \\ 2x+y=13 \end{cases}$

Las soluciones son: $\begin{cases} x=5 \rightarrow y=3 \\ x=\dfrac{39}{16} \rightarrow y=\dfrac{65}{8} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=6 \\ (x-y)^2+y^2=64 \end{cases}$

Las soluciones son: $\begin{cases} x_1=8 \rightarrow y_1=8 \\ x_2=\dfrac{136}{13} \rightarrow y_2=\dfrac{40}{13} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x+3^{y+2}=11 \\ 2^{x+1}-3^{y+1}=15 \end{cases}$

Las soluciones son: $\begin{cases} u=8=2^3 \rightarrow x=3 \\ v=1/3=3^{-1} \rightarrow y=-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log(x)+\log(y)=1 \\ 3^x:3^y=27 \end{cases}$

Las soluciones son: $\begin{cases} x=5 \rightarrow y=2 \\ \cancel{x=-2} \rightarrow \nexists \log(-2) \end{cases}$

12 Inecuaciones

33. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x-3>4x+5$

La solución es: $x<-4 \rightarrow x\in(-\infty,-4)$

b) $2(x-3)\leq x+3(x+4)$

La solución es: $x\geq -9 \rightarrow x\in[-9,\infty)$

c) $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x+3}{2}<2(x+1)$

Las soluciones son: $x>-5/7 \rightarrow x\in(-5/7,\infty)$

d) $\dfrac{2(x+1)}{3}-\dfrac{5(x-8)}{4}\geq\dfrac{x}{2}$

Las soluciones son: $x\leq 128/13 \rightarrow x\in(-\infty,128/13]$

34. Precisión de balanza. En una tienda de caramelos compras unas gominolas al peso que cuestan 10 €/kg. La balanza que utilizan para pesar tiene un sello de certificación que afirma que la balanza tiene una precisión de ± 5 gramos. Según la balanza, has comprado 300 g de gominolas que te han costado 3 €. ¿Cuánto te han cobrado de más o de menos?

Han podido cobrar de más o de menos hasta 5 céntimos.

13 Inecuaciones de segundo grado o superior

35. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

a) $(3x-2)\cdot(x-1)<0$

Las soluciones son el intervalo $x\in(2/3,1)$.

b) $x^2+3x-4\leq 0$

Las soluciones son el intervalo $x\in[-4,1]$.

36. La inecuación $x^2+x+1>0$ tiene una solución inusual. Calcúlala.

La solución es toda la recta real: $x\in(-\infty,\infty)$.

14 Inecuaciones racionales

37. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

a) $\frac{x+2}{x-3}<0$

Las soluciones son $x\in(-2,3)$.

b) $\frac{x^2-5x+6}{x+1}\leq 0$

Las soluciones son $x\in(-\infty,-1)\cup[2,3]$

c) $\frac{x^2-4}{x^2-6x+9}>0$

Las soluciones son $x\in(-\infty,-2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$

d) $\frac{x-4}{4-x^2}>0$

Las soluciones son $x\in(-\infty,-2)\cup(2,4)$

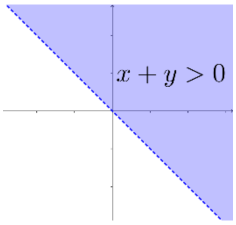
38. Resistencias. Cuando se conectan en paralelo varias resistencias, la resistencia total viene dada por la expresión $R=\dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}$. Se quiere fabricar un circuito con una resistencia $R_1=3\,\Omega$, y se sabe que la resistencia total debe ser mayor que 2Ω para que no se estropee el circuito. ¿Cuál deberá ser el valor de la segunda resistencia?

Como la resistencia debe ser positiva, las soluciones son $R_2\in(6,\infty)$.

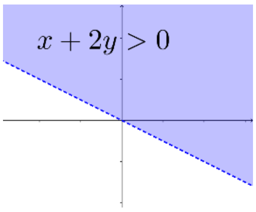
15 Inecuaciones lineales con dos incógnitas

39. Representa las soluciones de las siguientes inecuaciones con dos incógnitas.

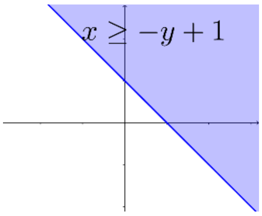
a) $x+y>0$



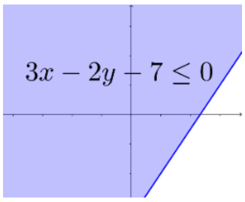
b) $x+2y>0$



c) $x\geq -y+1$

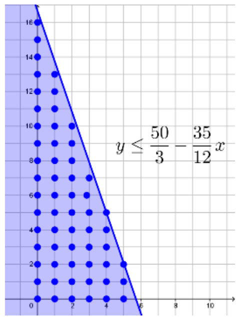


d) $3x-2y-7\leq 0$



40. Estudio calórico. Una barrita energética aporta 350 kcal por unidad, y un batido, 120 kcal. ¿Cuántas barras energéticas y batidos se podrán tomar al día para no exceder de las 2000 kcal diarias recomendadas? Plantea la inecuación del problema y dibuja la región solución.

$$y \le \frac{50}{3} - \frac{35}{12}x$$



16 Sistemas de inecuaciones lineales

41. Resuelve los siguientes sistemas con una incógnita:

a) $\begin{cases} 2x-3 \le 3x+1 \\ 2(3-x) \le x \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} 2x-3 \le 3x+1 \\ 2(3-x) \le x \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x \ge -4 \\ x \ge 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow x \in [2,\infty)$$

b) $\begin{cases} 3-|x| > 2 \\ 2(x+2) \le 3-x \end{cases} \rightarrow x \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right]$

c) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \frac{x+2}{3x-1} \ge 0 \end{cases} \quad \rightarrow x \in \{-2\} \cup -\frac{1}{3}, 3$

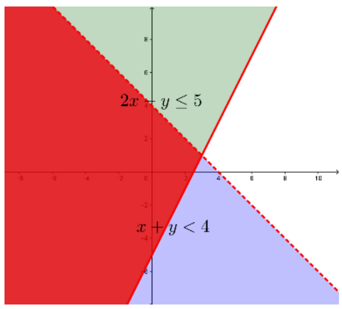
d) $\begin{cases} x < 0 \\ 2x+6 > 5x+3 \\ x^2 > 4 \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} x < 0 & x < 0 \\ 2x+6 > 5x+3 & x < 1 \\ x^2 > 4 & x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty) \end{cases}\right\} \rightarrow x \in (-\infty,-2)$$

42. Representa la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

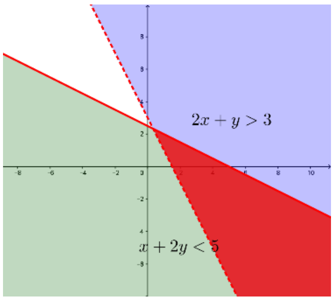
a) $\begin{cases} x+y < 4 \\ 2x-y \le 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y < 4 \rightarrow y < -x+4 \\ 2x-y \le 5 \rightarrow y \ge 2x-5 \end{cases}$$



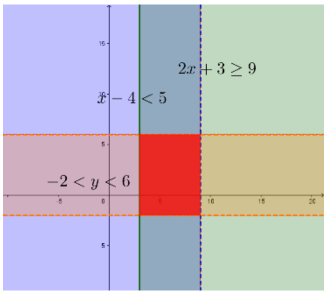
b) $\begin{cases} 2x+y>3 \\ x+2y<5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y>3 \rightarrow y>-2x+3 \\ x+2y<5 \rightarrow y<-x/2+5/2 \end{cases}$



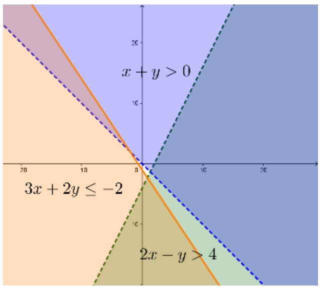
c) $\begin{cases} x-4<5 \\ 2x+3\geq 9 \\ -2<y<6 \end{cases}$

$\begin{cases} x-4<5 \rightarrow x<9 \\ 2x+3\geq 9 \rightarrow x\geq 3 \\ -2<y<6 \end{cases}$



d) $\begin{cases} x+y>0 \\ 2x-y>4 \\ 3x+2y\leq -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y>0 \rightarrow y>-x \\ 2x-y>4 \rightarrow y<2x-4 \\ 3x+2y\leq -2 \rightarrow y\leq -3x-2 \end{cases}$



El sistema no tiene solución, no hay ninguna zona donde se superpongan los tres semiplanos solución.

Actividades finales

Expresiones algebraicas y polinomios

43. Realiza las siguientes operaciones con polinomios simplificando su resultado:

a) $3(x-2)^2-(x+3)(x+2)$

$3(x-2)^2-(x+3)(x+2)=2x^2-17x+6$

b) $(x+2)(x^2-1)-6(x+3)(x+1)^2$

$(x+2)(x^2-1)-6(x+3)(x+1)^2=-5x^3-28x^2-43x-20$

c) $\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}\right)-x^2$

$\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}\right)-x^2=-\frac{19}{25}x^2-\frac{1}{10}-\frac{1}{4}$

d) $(4x^2-3x+2)^2$

$(4x^2-3x+2)^2=16x^4-24x^3+25x^2-12x+4$

44. Realiza las siguientes divisiones de polinomios indicando su cociente y su resto:

a) $(3x^4-2x^3+4x^2-3x+1):(x^2+2x-2)$

Cociente: $3x^2-8x+26$

Resto: $-71x+53$

b) $(6x^4+7x^3-11x^2-1):(2x^2+3x-2)$

Cociente: $3x^2-x-1$

Resto: $x-3$

45. Realiza las siguientes divisiones de polinomios aplicando la regla de Ruffini, indicando su cociente y su resto:

a) $(3x^5-6x^4+3x^3-2x^2+x-4):(x-2)$

Cociente: $3x^4+3x^2+4x+9$

Resto: 14

b) $(2x^4+x^3-4x^2+2x+1):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Cociente: $2x^3-4x+4$

Resto: -1

46. Determina el valor de *a* para que:

a) (x^2+ax+4) sea divisible entre $(x+3)$.

$a=\frac{13}{3}$

b) La división $(x^4+ax^2-5x+6):(x+3)$ tenga resto 4.

$a=\frac{-98}{9}$

c) Al dividir $\left(x^4-3x^3+ax^2-5x+6\right):\left(x-2\right)$ dé resto -2.

$a=\frac{5}{2}$

47. Determina los valores de *a* y *b* para que el polinomio $2x^4-3x^3+ax^2-2x+b$ sea divisible por $\left(2x^2-5x+3\right)$.

$a=0;b=3$

48. Calcula los valores de *a* y *b* para que el polinomio $3x^3-2x^2+ax+b$ tenga como raíces $x=2$ y $x=-3$.

$a=-23,b=30$

49. El perímetro de un rectángulo mide 50 cm y su diagonal mide *x*. Calcula la expresión algebraica de su área.

$$A=\frac{625-x^2}{2}$$

50. De un cartón de 2 dm de largo y 3 dm de ancho se cortan cuatro cuadrados en las esquinas para formar una caja. Obtén la expresión algebraica del volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado.

$V=4x^3-10x^2+6x$

Números combinatorios. Binomio de Newton

51. Calcula los siguientes números combinatorios

a) $\binom{5}{2}$ $\qquad\binom{5}{2}=10$

b) $\binom{7}{4}$ $\qquad\binom{7}{4}=35$

c) $\binom{10}{5}$ $\qquad\binom{10}{5}=252$

d) $\binom{12}{3}$ $\qquad\binom{12}{3}=220$

52. Comprueba que $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\binom{4}{3}$ ¿Es válida la igualdad $\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}$?

Se puede comprobar directamente:

$$\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{3!0!}=3+1=4$$

$$\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!1!}=4$$

53. ¿Cuál es el coeficiente del término con x^3 en el desarrollo de $(2x+4)^5$?

$1280x^3$.

54. Aplicando el desarrollo del binomio de Newton correspondiente, desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(x+3)^3$ $\quad (x+3)^3 = x^3+9x^2+27x+27$

b) $(2x+3)^4$ $\quad (2x+3)^4 = 16x^4+96x^3+216x^2+216x+81$

c) $(3+\sqrt{3})^4$ $\quad (3+\sqrt{3})^4 = 252+144\sqrt{3}$

d) $(2x+\sqrt[3]{x})^6$ $\quad (2x+\sqrt[3]{x})^6 = 64x^6+192x^{\frac{16}{3}}+240x^{\frac{14}{3}}+160x^4+60x^{\frac{10}{3}}+12x^{\frac{8}{3}}+x^2$

Ecuaciones. Solución e interpretación gráfica

55. ¿Son equivalentes las ecuaciones siguientes?

a) $x-3=0$ y $x^2-9=0$

No, la segunda tiene como solución $x=-3$, que no la tiene la primera.

b) $x+1=0$ y $x^2+x=0$

No, la segunda tiene como solución $x=0$, que no la tiene la primera.

c) $x+1=4$ y $x^2-6x+9=0$

Si, la única solución de ambas es $x=3$.

d) $\sqrt{2x-1}=x$ y $\frac{x+2}{5}-\frac{x}{2}=\frac{1}{10}$

Si, la única solución de ambas es $x=1$.

56. Indica si $x=-2$ es solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\log(x^2+2)=1$

No

b) $x^2-5x-14=0$

Si

c) $\sqrt{-x+6}-x=4$

No

d) $2^{-x}+\cos(\pi x)=5$

Si

57. Escribe dos ecuaciones diferentes que tengan como solución $x=3$.

Esta pregunta tiene soluciones abiertas. Hay muchas ecuaciones que tienen como solución $x=3$
Por ejemplo: $2^x=8$ y $2x-3=3$.

58. La ecuación $x^2-1=0$ no tiene como solución $x=0$. ¿Por cuánto deberás multiplicarla para que además de sus dos soluciones tenga también $x=0$?

Como se quiere introducir una solución, hay que multiplicar a la ecuación por el factor correspondiente, en este caso por x.

Ecuaciones polinómicas

59. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+2}{3}-\frac{x}{2}=1-\frac{2x+3}{6}$ $\qquad x=-1$

b) $(x+2)^2=(2x-1)(x+1)-x^2$ $\qquad x=\frac{-5}{3}$

c) $\frac{x-1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{x+1}$ $\qquad x=\pm 2$

d) $(x+4)(x-4)=20$ $\qquad x=\pm 6$

60. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4-169x^2+3600=0$

$$z^2-169z+3600=0\rightarrow\begin{cases}z=144\rightarrow x=\pm 12\\ z=25\rightarrow x=\pm 5\end{cases}$$

b) $4x^4-37x^2+9=0$

$$4z^2-37z+9=0\rightarrow\begin{cases}z=9\rightarrow x=\pm 3\\ z=\frac{1}{4}\rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\end{cases}$$

c) $x^4+x^2=4x^2-2$

$$z^2-3z+2=0\rightarrow\begin{cases}z=1\rightarrow x=\pm 1\\ z=2\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

d) $x^6-9x^3+8=0$

$$z^2-9z+8=0\rightarrow\begin{cases}z=1\rightarrow x=1\\ z=8\rightarrow x=2\end{cases}$$

61. Extrae factor común y resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4-5x^3+4x^2=0$

$$x^2\left(x^2-5x+4\right)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2-5x+4=0\rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=4\end{cases}\end{cases}$$

b) $x(x^2-1)+2(x^2-1)=0$

$$(x+2)(x^2-1)=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x^2-1=0 \to x=\pm 1 \end{cases}$$

c) $(x-3)(x^2+1)+(x-3)^2=(1-x)(x-3)$

$$(x-3)\left(x^2+2x-3\right)=0 \to \begin{cases} x=3 \\ x^2+2x-3=0 \to \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

d) $x^3+2x^2-x-2=0$

El factor común es $(x+2)$:

$$(x+2)\left(x^2-1\right)=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x^2-1=0 \to x=\pm 1 \end{cases}$$

62. Halla estas ecuaciones aplicando las identidades notables:

a) $x^2-1=0$; $x=\pm 1$

b) $x^2-8x+16=0$; $x=4$

c) $(x^2-3)(x^2-4)=0 \to \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 2 \end{cases}$

d) $(x^2-4x+4)(x^2+6x+9)=0 \to \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$

63. Resuelve estas ecuaciones factorizando por la regla de Ruffini:

a) $x^3-7x+6=0$

Soluciones: $x=1, x=2, x=-3$

b) $x^3-3x^2-x+3=0$

Soluciones: $x=1, x=-1, x=3$

c) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$

Soluciones: $x=1, x=-1, x=-2, x=3$

d) $2x^4-5x^3+5x-2=0$

Soluciones: $x=1, x=-1, x=2, x=\dfrac{1}{2}$

64. ¿Cuánto deberá valer b para que la ecuación $2x^2+bx+3=0$ tenga exactamente una solución? ¿Y para qué valores de b no hay solución?

$b=\pm\sqrt{24}$

65. Dada la ecuación $x^2+(m+2)x+(n-1)=0$, se sabe que la suma de sus soluciones es -6 y su producto 8. Calcula los valores de m y n. Calcula también las soluciones de la ecuación.

Según las relaciones de Cardano-Vietá:
$x_1+x_2=-6=-(m+2)\rightarrow m=4$
$x_1\cdot x_2=8=n-1\rightarrow n=9$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -2$ y $x_2 = -4$

66. El $x\%$ de x es 16, ¿cuánto vale x?

$x=\pm 40$

67. Andrea tiene más dinero que Carlos. Si Andrea le diera a Carlos 20 €, los dos tendrán el mismo dinero, y si Carlos le diera a Andrea 22 €, Andrea tendría el doble de dinero que Carlos. ¿Cuánto dinero tienen cada uno?

Andrea tiene 146€ y Carlos 106 €.

Ecuaciones racionales y radicales

68. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales convirtiéndolas en ecuaciones polinómicas. No olvides comprobar las soluciones.

a) $\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}=0\rightarrow\begin{cases}x=2\\x=3\end{cases}$

Las dos soluciones son válidas.

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{8x+1}{x^2+x}\rightarrow\begin{cases}\cancel{x=0}\\x=3\end{cases}$

La única solución válida es $x=3$

c) $x^3-\frac{1}{x^3}=\frac{15624}{125}\rightarrow\begin{cases}z=125\rightarrow x=5\\z=\frac{-1}{125}\rightarrow x=\frac{-1}{5}\end{cases}$

d) $\frac{x-1}{x}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{2x-3}{x-1}\rightarrow x=\pm 2$

69. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales. No olvides comprobar las soluciones:

a) $\sqrt{x-1}=13$; $x=170$. Si se comprueba la solución, se ve que es válida.

b) $\sqrt{7x-3}=2x-3\rightarrow\begin{cases}x=4\rightarrow\text{Válida}\\\cancel{x=\frac{3}{4}}\rightarrow\text{No es válida}\end{cases}$

c) $x+\sqrt{10x-4}=10 \rightarrow \begin{cases} \cancel{x=26} \rightarrow \text{No es válida} \\ x=4 \rightarrow \text{Válida} \end{cases}$

d) $\sqrt{x-5}+\sqrt{3x+7}=10 \rightarrow \begin{cases} x=14 \rightarrow \text{Válida} \\ x=174 \rightarrow \text{No es válida} \end{cases}$

70. La resta de los inversos de dos números consecutivos es 1/30. ¿Cuánto vales estos dos números?

Los números consecutivos son 5 y 6 o -6 y -5.

71. Un estanque tiene un grifo que lo llena en 6 horas y otro tarda en llenarlo 8 horas. También tiene un desagüe que lo vacía en 4 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el estanque si se abren los dos grifos y el desagüe?

$x = 24\text{ h}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

72. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $2^{3x+1}=2\sqrt[3]{2} \rightarrow x=\frac{1}{9}$

b) $4^{x}+4^{x+1}=20\cdot 4 \rightarrow x=2$

c) $2^{2x+1}-5\cdot 2^{x}+2=0 \rightarrow \begin{cases} u=2 \rightarrow x=1 \\ u=\frac{1}{2} \rightarrow x=-1 \end{cases}$

d) $3^{x+1}-3^{x}+3^{x-1}=21 \rightarrow x = 2$

e) $5^{x}-\frac{1}{5^{x-2}}=24 \rightarrow \begin{cases} \cancel{u=-1} \\ u=25 \rightarrow x=2 \end{cases}$

f) $9^{x}-28\cdot 3^{x-1}+3=0 \rightarrow \begin{cases} u=9 \rightarrow x=2 \\ u=\frac{1}{3} \rightarrow x=-1 \end{cases}$

73. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas. No olvides comprobar la validez de las soluciones.

a) $2\log(x-1)=1+\log\left(x+\frac{1}{10}\right) \rightarrow \begin{cases} \cancel{x=0} \\ x=12 \end{cases}$

b) $log_{27}(x)+log_{9}(x)+log_{3}(x)=11 \rightarrow x=3^{6}=729$

c) $\log(x+3)-\log(2)=2\log(x) \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ \cancel{x=-1} \end{cases}$

d) $\log(2)+\log(11-x^2)=2\log(5-x) \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1/3 \end{cases}$

e) $\log(2)+\log\left(4^{x-2}+9\right)=1+\log\left(2^{x-2}+1\right) \rightarrow \begin{cases} u=4 \rightarrow x=4 \\ u=1 \rightarrow x=2 \end{cases}$

f) $3\log(x)+2=2\left(3-\log(x)\right) \rightarrow x=10^{4/5}$

Sistemas de ecuaciones

74. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{3x}{2}+\dfrac{8y}{6}=2 \\ \dfrac{5x}{4}=1-\dfrac{4y}{3} \end{cases}$ $\qquad x=4, y=-3$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}-\dfrac{x-y}{2}=3 \\ \dfrac{x+3}{5}+\dfrac{y-2}{3}=3 \end{cases}$ $\qquad x=7, y=5$

c) $\begin{cases} \dfrac{3(y+2x)}{4}=\dfrac{4x+y-5}{3} \\ \dfrac{1}{3}(x+y-1)-\dfrac{1}{6}(x-y-1)=\dfrac{y-1}{6} \end{cases}$ $\qquad x=40, y=-20$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{2x+20y}{5}-\dfrac{8y+1}{3}=\dfrac{12x+16y}{15} \end{cases}$ $\qquad x=\dfrac{25}{42}, y=\dfrac{15}{7}$

75. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

a) $\begin{cases} 3^x-2^{y+2}=49 \\ 3^{x-2}-2^{y-2}=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u=81 \rightarrow x=4 \\ v=8 \rightarrow y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 4 \cdot 2^y = 24 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 8 \rightarrow x = 3,\ y = 2 \\ u = 16 \rightarrow x = 4,\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^{x+1} + 2^{y-1} = 89 \\ 9^x - 4^y = 473 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 27,\ v_1 = 16 \rightarrow x_1 = 3,\ y_1 = 4 \\ \cancel{u_1 = \dfrac{1191}{35},\ v_1 = \dfrac{-916}{35}} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \pi^x \cdot \pi^{2y} = \pi^9 \\ 2x + y = 12 \end{cases} \rightarrow x = 5,\ y = 2$

76. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x^2 - 2y^2 = 17 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{61}{7},\ y_1 = \dfrac{-38}{7}$ y $x_2 = 5,\ y_2 = 2$.

b) $\begin{cases} xy - x = -15 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$

Las soluciones son: $x_1 = 5,\ y_1 = -2$ y $x_2 = 2,\ y_2 = \dfrac{-13}{2}$

c) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ 3x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

Las soluciones son $x^2 = 4,\ y^2 = 1$, que dan cuatro parejas de soluciones diferentes: $x_1 = -2,\ y_1 = -1$, $x_2 = -2,\ y_2 = 1$, $x_3 = 2,\ y_3 = -1$ y $x_4 = 2,\ y_4 = 1$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 34 \\ xy = -12 \end{cases}$

Las soluciones son: $x_1 = -3\sqrt{2}, y_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = 3\sqrt{2}, y_2 = -2\sqrt{2}$, $x_3 = 4, y_3 = -3$ y $x_4 = -4, y_4 = 3$

e) $\begin{cases} 2xy + \dfrac{x}{2y} = -17 \\ 3xy - \dfrac{5x}{y} = -14 \end{cases}$

Mediante el cambio de variable $u = xy$ y $v = x/y$ se transforma en el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2u + \dfrac{v}{2} = -17 \\ 3u - 5v = -14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = -8 = xy \\ v = -2 = x/y \end{cases} \rightarrow \left\{ x = \pm\sqrt{uv} = \pm 4 \right.$$

Las soluciones son: $x_1 = 4,\ y_1 = -2$ y $x_2 = -4,\ y_2 = 2$

f) $\begin{cases} -2x+y=6 \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2} \end{cases}$

Las soluciones son: $x_1=3, y_1=12$ y $x_2=-2, y_2=2$

77. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicos:

a) $\begin{cases} \log x+3\log y=7 \\ \log x-2\log y=2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log x+3\log y=7 \\ \log x-2\log y=2 \end{cases} \to \begin{cases} u+3v=7 \\ u-2v=2 \end{cases} \to \begin{cases} u=4 \to x=10^4 \\ v=1 \to y=10 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \log_2(x)+\log_2(y)=1 \\ \log_2\left(x^2\right)-\log_2(y^3)=27 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_2(x)+\log_2(y)=1 \\ \log_2\left(x^2\right)-\log_2(y^3)=27 \end{cases} \to \begin{cases} u+v=1 \\ 2u-3v=27 \end{cases} \to \begin{cases} u=6 \to x=2^6=64 \\ v=-5 \to y=2^{-5} \end{cases}$$

c) $\begin{cases} \log_3(x)+\log_3(y)=5 \\ 2x+y=45 \end{cases}$

$$\begin{cases} log_3(x)+log_3(y)=5 \\ 2x+y=45 \end{cases} \to \begin{cases} xy=243 \\ 2x+y=45 \end{cases} \to \begin{cases} x_1=9,\ y_1=27 \\ x_2=\frac{27}{2},\ y_1=18 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ 3^{x-1}=9^y \end{cases}$

$$\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ 3^{x-1}=9^y \end{cases} \to \begin{cases} xy=10 \\ x-1=2y \end{cases} \to \begin{cases} x_1=-4,\ y_1=\frac{-5}{2} \\ x_2=5,\ y_2=2 \end{cases}$$

78. La diagonal de un rectángulo mide 26 cm y su área 240 cm^2. Calcula sus dimensiones.

Las dimensiones del rectángulo son 10 cm y 24 cm.

79. Una hoja metálica circular tiene un diámetro de 30 cm. Se recorta un rectángulo en su interior de 432 cm^2 de área. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

El rectángulo debe medir 18 cm y 24cm.

80. En un teatro hay 144 personas. Hay el doble de mujeres que de hombres, y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay en el teatro?

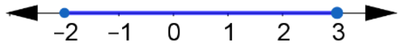
12 hombres, 24 mujeres y 108 niños.

Inecuaciones

81. Resuelve estas inecuaciones y representa el resultado:

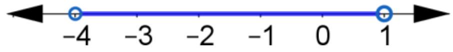
a) $(x+2)(x-3)\leq 0$

Por tanto, las soluciones son $x\in[-2,3]$



b) $x^2+3x-4<0$

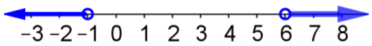
Por tanto, las soluciones son $x\in(-4,1)$



82. Resuelve las inecuaciones siguientes y representa el resultado:

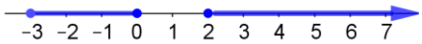
a) $x(x-5)>6$

Las soluciones son $x\in(-\infty,-1)\cup(6,\infty)$



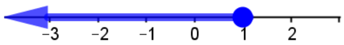
b) $x(x+3)(x-2)\geq 0$

Las soluciones son $x\in[-3,0]\cup[2,\infty)$



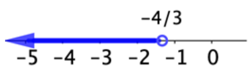
c) $3x+7\leq 2x+8$

La solución es: $x\leq 1\rightarrow x\in(-\infty,1]$

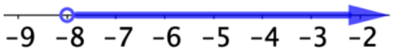


d) $x-3(x+1)>4x+5$

La solución es: $x<-\frac{4}{3}\rightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$

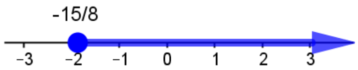


e) $\dfrac{3x-2}{2} < 2x+3$



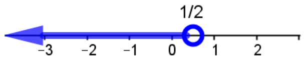
La solución es: x > - 8 → $x \in (-8, \infty)$

f) $\dfrac{x+3}{5} - \dfrac{2x-1}{3} \le \dfrac{x-1}{15} + 2$



La solución es: $x \ge -15/8 \rightarrow x \in [-15/8, \infty)$

g) $(x-3)^2 > (x+2)^2$



La solución es: $x < 1/2 \rightarrow x \in (-\infty, 1/2)$

h) $\dfrac{2x^2-1}{2} \ge (x-1)^2$

La solución es: $x \ge 3/4 \rightarrow x \in [3/4, \infty)$

i) $\dfrac{x-1}{x} < 0$

Las soluciones son: $x \in (0,1)$

j) $\dfrac{x-2}{x+3} < 0$

Las soluciones son: $x \in (-3, 2)$

k) $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} > 0$

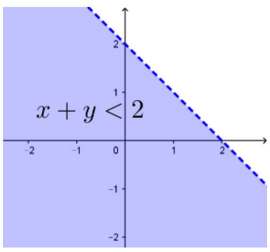
Las soluciones son: $x \in (-1,1) \cup (2, \infty)$

l) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{6}{x^3} \ge 0$

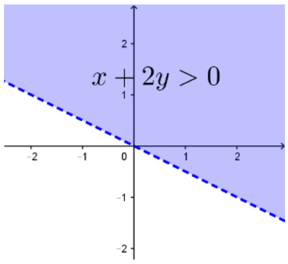
Las soluciones son: $x \in [-3, -2] \cup (0, \infty)$

83. Halla estas inecuaciones representando el semiplano solución:

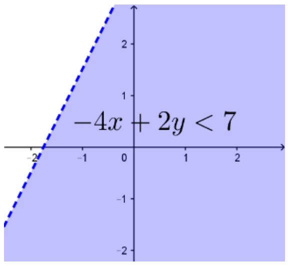
a) $x + y < 2$ $\qquad$ $y < -x + 2$



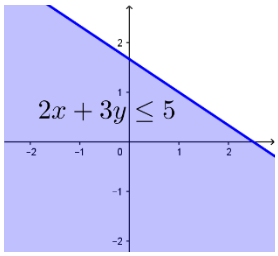
b) $x+2y>0$ $\qquad$ $y>-x/2$



c) $-4x+2y<7$ $\qquad$ $y<2x+7/2$



d) $2x+3y\leq 5$ $\qquad$ $y\leq -2x/3+5/3$

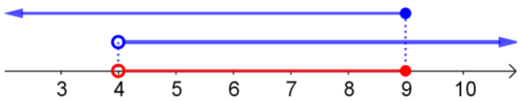


Sistemas de inecuaciones lineales

84. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones representando el resultado:

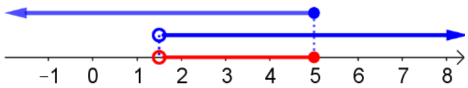
a) $\begin{cases} x+3<2x-1 \\ 2x+3\geq 3x-6 \end{cases}$

$\left.\begin{cases} x+3<2x-1 \rightarrow x>4 \\ 2x+3\geq 3x-6 \rightarrow x\leq 9 \end{cases}\right\} \rightarrow x(4,9]$

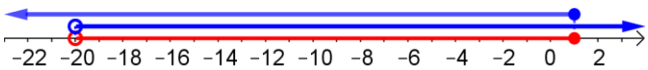


b) $\begin{cases} 2x-7\leq 3 \\ 2x+1>2 \end{cases}$

$\left.\begin{cases} 2x-7\leq 3 \rightarrow x\leq 5 \\ 2x+1>2 \rightarrow x>3/2 \end{cases}\right\} \rightarrow x\in(3/2,5]$

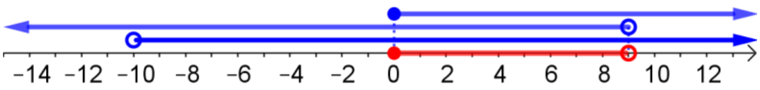


c) $\begin{cases} 2x-3(x+4)<8 \\ 4x+5\leq x+8 \end{cases}$



$$\left.\begin{cases} 2x-3(x+4)<8 \rightarrow x>-20 \\ 4x+5\leq x+8 \quad \rightarrow x\leq 1 \end{cases}\right\} \rightarrow x\in(-20,1]$$

d) $\begin{cases} 3x-8<2x+1 \\ 4x+4\geq 3(x-2) \\ x\geq 0 \end{cases}$



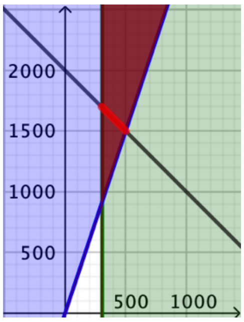
$$\left.\begin{cases} 3x-8<2x+1 \quad \rightarrow x<9 \\ 4x+4\geq 3(x-2) \rightarrow x>-10 \\ x\geq 0 \end{cases}\right\} \rightarrow x\in[0,9)$$

85. Las edades de dos primos se diferencian en 6 años. Hace algún tiempo, la edad del mayor superaba al triple de la del menor. ¿Cuántos años tenían entonces?

Tenían 3 y 9 años.

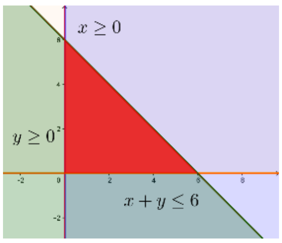
86. Una persona quiere invertir 2000 € que tiene en dos tipos de fondos. El primero debe invertir al menos 300 €, mientras que en el segundo invertirá al menos el triple de lo que va a invertir en el primero. Plantea el sistema de inecuaciones correspondiente, dibuja la solución y analiza todas las posibles inversiones que pueden realizar.

Deberá invertir entre 300 y 500 € en el primer fondo, y lo restante en el segundo fondo.

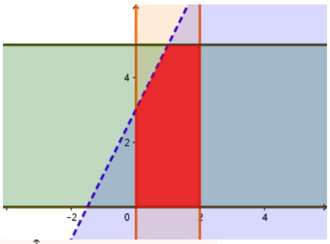


87. Dibuja el recinto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones

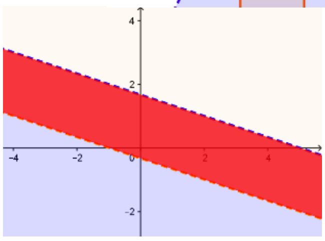
a) $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq 6 \end{cases}$



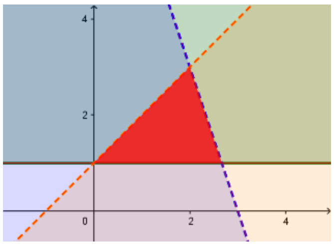
b) $\begin{cases} y-2x<3 \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 5 \end{cases}$



c) $\begin{cases} x+3y<5 \\ x+3y>-1 \end{cases}$



d) $\begin{cases} 3x+y<9 \\ x-y>-1 \\ y\ge 1 \end{cases}$



Aplicaciones

88. Distancia recorrida. Un coche se desplaza en línea recta a una velocidad que varía entre 60 km/h y 90 km/h ¿Entre qué distancias desde el punto de partida se encuentra al cabo de diez horas?

Al cabo de 10 horas, si fuera siempre a la velocidad mínima, habría recorrido 600 km, mientras que si fuera siempre a la máxima, habría recorrido 900 km.

89. Inversión e interés compuesto. Se invierten 2000 € a un interés compuesto variable durante 3 años. Si el interés va a variar entre el 1% y el 3 %, ¿cuánto dinero se tendrá al final?

$C\in[2060,60;2185,45]$ euros .

90. Beneficios de una empresa. Una empresa tiene unos costes fijos de 4500 € al mes. Cada producto fabricado le cuesta 1,5 € y lo vende por 2€. ¿Cuánto debe vender para tener beneficios?

9000 productos

91. Plantación de cultivos. Un agricultor tiene 2000 hectáreas en las que puede plantar avena, maíz o trigo. El coste por la producción de cada uno de esos cultivos es de 30 €/Ha por la avena, 45 €/Ha por el maíz y 50 €/Ha por el trigo. Sabe que va a plantar el doble de trigo que de avena y maíz juntos. Tiene un presupuesto de 87.500 € para pagar el coste de los cultivos. ¿Cuántas hectáreas de cada de cada tipo va a plantar?

Si llamamos x al terreno plantado por avena, y al terreno plantado de maíz y z al terreno plantado de trigo:

$$x=\frac{5500}{9},\ y=\frac{500}{9},\ z=\frac{4000}{3}$$

92. Desintegración de un isótopo. El periodo de semidesintegración de un isótopo es el tiempo necesario para que la cantidad de átomos de ese isótopo se reduzca a la mitad según la ley $m(t)=m_0\cdot 2^{-t/T}$ El ^{14}C tiene un periodo de semidesintegración de $T=5730$ años. Una muestra procedente de un enterramiento tiene 0,5 mg de ^{14}C. Se sabe que inicialmente la muestra tenía 2 mg de ese isótopo. Determina la edad de la muestra.

11460 años

93. Estudio farmacológico. El principio activo de un medicamento se elimina lentamente del organismo de manera que a las 24 h solo queda un 30 % de la cantidad ingerida. Cada píldora contiene 100 mg de principio activo. Un paciente debe tomar ese medicamento durante una semana, a razón de una píldora al día. ¿Cuánta cantidad de principio activo tendrá en total tras ingerir la última píldora del tratamiento? ¿Cuánto tiempo tardará en tener menos de 10 mg de principio activo?

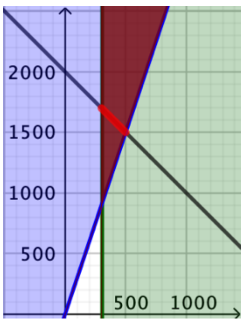
Después de n días de tomar el medicamento, la cantidad de éste que queda será 142,83 mg
A partir del tercer día tendrá menos de 10 mg en su organismo.

94. Entradas a un museo. Una entrada de un museo cuesta 3 € para niños y 8 € para adultos. Ayer entró un grupo de 30 turistas que pagaron 120 €. ¿Cuántos niños y cuántos adultos formaban el grupo?

$x=24$ niños, $y=6$ adultos

95. Fondos de inversión. Una persona quiere invertir 2000 € que tiene en dos tipos de fondos. El primero debe invertir al menos 300 €, mientras que en el segundo invertirá al menos el triple de lo que va a invertir en el primero. Plantea el sistema de inecuaciones correspondiente, dibuja la solución y analiza todas las posibles inversiones que pueden realizar.

Deberá invertir entre 300 y 500 € en el primer fondo, y lo restante en el segundo fondo.

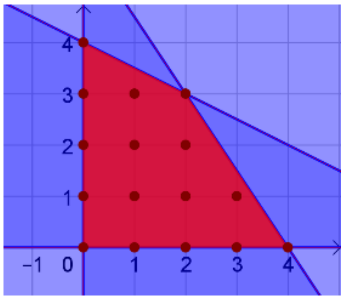


96. Fabricación artesanal. Dos artesanos fabrican dos productos A y B. El producto A requiere 3 horas de fabricación y 1 hora de secado. Cada producto B requiere 2 horas de fabricación y 2 horas de secado. Entre los dos, pueden sumar 12 horas de fabricación y 8 horas de secado al día. Plantea las inecuaciones para los tiempos de fabricación y secado en función de los productos A y B fabricados y escribe las soluciones.

Si llamamos x a los productos A fabricados e y a los productos B que se fabrican, entonces

$$\begin{cases} 3x+2y\le 12 \\ x+2y\le 8 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Las soluciones son los 16 puntos marcados en la gráfica.



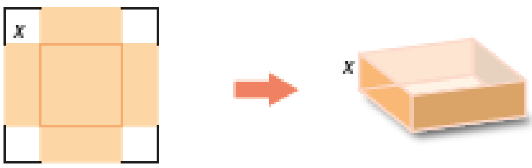
97. Trayectoria de un objeto. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba a una velocidad de 100 m/s. La ecuación de su trayectoria viene dada por:

$$h(t)=100t-4{,}9t^2$$

¿Cuánto tardará el objeto en alcanzar una altura de 400 m? ¿Cuánto tiempo tardará en caer al suelo?

Estará a 400 m de altura a los 5,46 s en la subida y a los 14,95 s en la bajada.
Volverá a caer a los 20,41 s.

98. Construcción de una caja. Con una hoja de papel de forma cuadrada de 20 cm de lado se recortan unos cuadrados de las esquinas para formar una caja que resulta tener 576 cm^3. ¿Cuál es la altura de la caja?



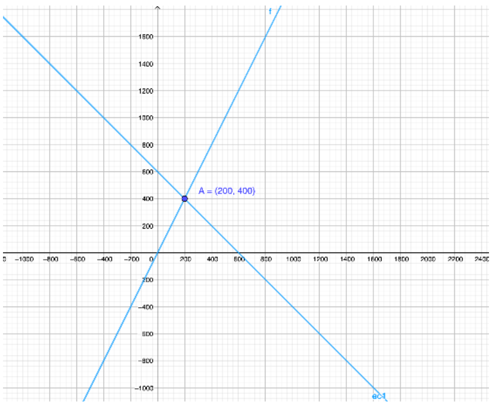
La caja puede tener 4 cm o 2,71 cm de altura.

Un mundo matemático

Resolver de forma gráfica y algebraica los cinco sistemas de ecuaciones e inecuaciones propuestos. Después diseñar el enunciado de cinco problemas que se adapten a cada uno de estos sistemas. En su contextualización utilizar distintos temas relacionados con las ODS, logística, las redes sociales, medioambiente, deporte...

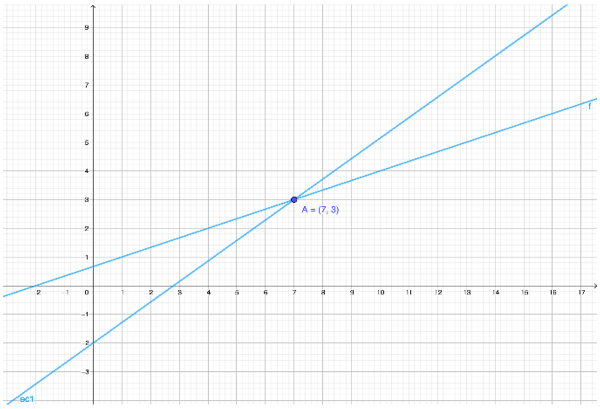
a) $\begin{cases} x + y = 600 \\ y = 2x \end{cases}$

La solución es: $x = 200\,, y = 400$



b) $\begin{cases} y = \frac{5}{7}x - 2 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$

La solución es: $x = 7\,, y = 3$



c) $\begin{cases} x + 3y \leq 50 \\ 2x + 3y \leq 70 \\ x, y \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$

La solución es $x = 20$, $y = 10$

d) $\begin{cases} 2x + y + z = 300 \\ x + 2y + z = 400 \\ x + y + 2z = 500 \end{cases}$

La solución es: $(x, y, z) = (0, 100, 200)$

e) $\begin{cases} y \geq 3x + 20 \\ x \geq 20 \\ y \geq 2x + 20 \end{cases} \qquad x, y \geq 0, \;\; x, y \in \mathbb{Z}$