1 Idea intuitiva de límite

1. Utiliza una tabla de valores para estimar los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

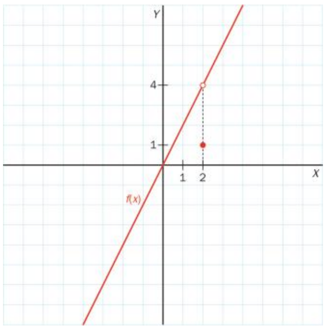
b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = 0{,}25$

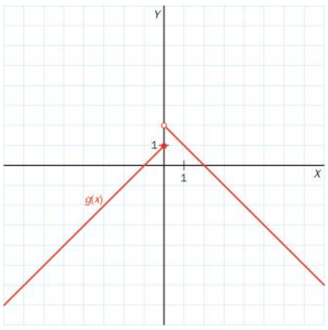
2. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones y utilízalas para averiguar si existe el límite en los puntos indicados.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$ b) $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ -x + 2, & x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$



b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ no existe



2 Límites laterales

3. Estudia si existe el límite en $x = 2$ de la función:

$$f(x)=\begin{cases}4-x, & \text{si } x\le 2\\ x^2-2, & \text{si } x>2\end{cases}$$

Los dos límites laterales existen y son iguales, $\lim_{x\to 2} f(x)=2$

4. Estudia si existe el límite en $x = 0$ de la función:

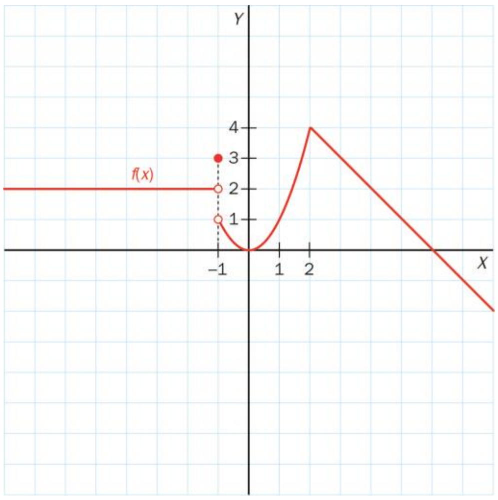
$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & \text{si } x<0\\ 1, & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

No existe el límite.

5. Dada la función, dibújala y estudia la existencia de límite en $x = -1$ y $x = 2$.

$$f(x)=\begin{cases}2, & \text{si } x<-1\\ 3, & \text{si } x=-1\\ x^2, & \text{si } -1<x<2\\ 6-x, & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

- $x=-1 \rightarrow$ No existe el límite.
- $x=2 \rightarrow$ Sí existe el límite.



© Mcgraw-Hill

3 y 4 Límites infinitos y cálculo de límites en un punto. Indeterminaciones

6. Utiliza una tabla de valores para estimar:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)$

a)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x}{x+1}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim\limits_{x\to -1}\frac{x}{x+1}$$

c)

$$\lim_{x\to 2^+}(\ln(x-2))=-\infty$$

7. Halla el valor del límite de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x-2}{x^3-x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+2)^3-8}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-x-2}{x^3-x}$ → No existe el límite.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+2)^3-8}{x}$ → 12

c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}$ → 4

8. Calcula estos límites, indicando en cada caso si se trata de una indeterminación y el procedimiento para resolverla.

a) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2-16}$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x-3}{|x-3|}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

© Mcgraw-Hill

a) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x+4}{x^2-16} \to -1/8$

b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-3}{|x-3|} \to 1$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1} \to 3$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \to \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

6 Cálculo de límites en el infinito

9. Calcula los siguientes límites, indicando en cada caso si se trata de una indeterminación y el procedimiento para resolverla.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+5x}{2x^3-x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4+3x}{x^3-5x+2}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{5x-2}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{4x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+5x}{2x^3-x^2-1} \to \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4+3x}{x^3-5x+2} \to +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{x}\right) \to +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{5x-2} \to \dfrac{\sqrt{2}}{5}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1} \to 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{4x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right) \to -\infty$

© Mcgraw-Hill

10. Costes y beneficios. Un comerciante determina que los ingresos (en euros) obtenidos por la venta de un producto de moda depende de su precio y viene dado por la función: $I(p) = 4000pe^{-0,05p}$

a) ¿Qué ingresos obtiene cuando el precio del producto es de 50 €? ¿Y cuándo es de 100 €? ¿Qué observas?
b) ¿Le resulta beneficioso incrementar el precio mucho más? ¿Por qué?

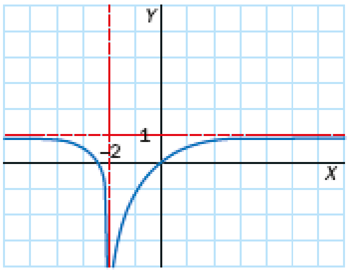
a) $I(50) \approx 16417$ € $\qquad I(100) \approx 1348$ €

b) Si se aumenta mucho el precio del producto los ingresos por su venta tienden a ser nulos y, en consecuencia, no resulta nada beneficioso incrementar mucho el precio.

11. Observa la gráfica de la función $f(x)$ que aparece dibujada y calcula:

$\lim_{x \to -2^-} f(x)$, $\lim_{x \to -2^+} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$



12. Calcula los límites laterales en $x = 2$ de la función $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

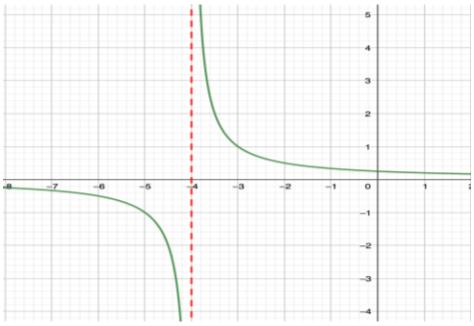
ó $\lim_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

7 Asíntotas

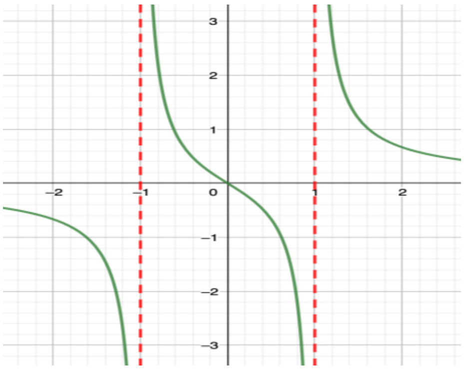
13. Calcula las asíntotas verticales y esboza la gráfica estas funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ $\qquad$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ $\qquad$ c) $h(x) = \dfrac{x^3-1}{1-x^2}$

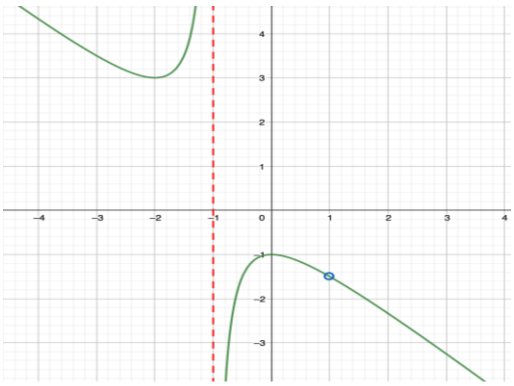
a) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$



b) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$



c) $h(x)=\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$



© Mcgraw-Hill

14. Halla todas las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x+3}$

- Asíntotas verticales.

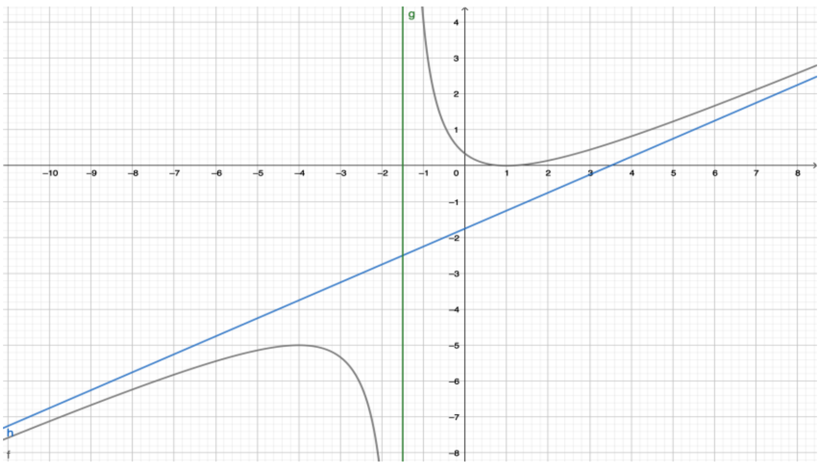
$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^-}\frac{x^2-2x+1}{2x+3}=-\infty \qquad \lim_{x\to -\frac{3}{2}^+}\frac{x^2-2x+1}{2x+3}=+\infty$$

- Asíntotas horizontales.

No hay asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas.

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{4}$ es una asíntota oblicua.



b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

- Asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=+\infty \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=-\infty$$

© Mcgraw-Hill

- Asíntotas horizontales.

  $y=1$ es una asíntota horizontal.

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$

- Asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3}{(x+2)^2}=-\infty \qquad \lim_{x\to -2^+}\frac{x^3}{(x+2)^2}=-\infty$$

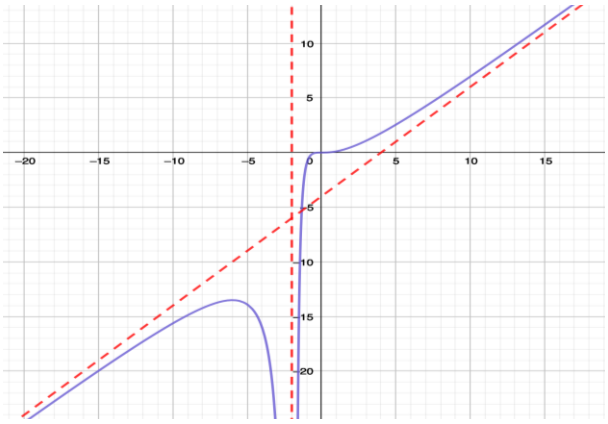
- Asíntotas horizontales.

  No hay asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas.

  $y=x-4$ es una asíntota oblicua.

  La gráfica es:



© Mcgraw-Hill

8 Continuidad

15. Estudia la continuidad en los puntos indicados y, si presentan alguna discontinuidad, indica de qué tipo es:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}, \text{ si } x\neq 1 \\ 1, \text{ si } x=1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, \text{ si } x\neq -1 \\ 2 \quad , \text{ si } x=-1 \end{cases}$

a) En $x=1$ es discontinua inevitable con salto infinito.

b) En $x=-1$ presenta $g(x)$ una discontinuidad evitable y bastaría redefinir $g(-1)=-2$.

16. ¿Cuál de las siguientes funciones presenta una discontinuidad evitable en los puntos indicados?

a) $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x+2}$, $x=-2$ b) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ c) $h(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}$, $x=-1$

a) $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x+2}$, en $x=-2$ presenta una discontinuidad evitable en $x=-2$ y bastaría definir $f(-2)=12.$

b) $g(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$, en $x=9$

$g(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x=9$ y y bastaría definir $g(9)=6.$

c) $h(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}$, en $x=-1$

$h(x)$ presenta una discontinuidad inevitable en $x=-1$ de salto 2 unidades.

17. Halla el intervalo de continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=xe^x$ b) $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3}$

a) Son continuas en todo $\mathbb{R}$.

b) $g(x)$ es continua en $(0,1)\cup(1,+\infty).$

c) $h(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3}$ es continua en $\mathbb{R}-\{-3,1\}=(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty).$

© Mcgraw-Hill

18. ¿Para qué valor de a la función $f(x)$ es continua en todos los números reales?

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & , \text{si } x<2 \\ ax+5 & , \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

Si $a=-\frac{1}{3}$, entonces la función $f(x)$ es continua en x=2 y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

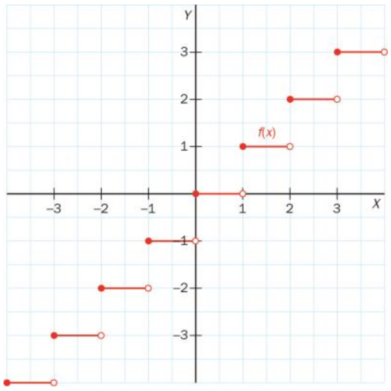
19. Encuentra el valor de a para que f(x) sea continua en x=1.

$$f(x)=\begin{cases} x+a & , \text{si } x<1 \\ e^{x-1} & , \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Si $a=0$, entonces la función $f(x)$ es continua en x=1.

20. Se define la función *f*(*x*)=*E*[*x*], o «parte entera de *x*», como el entero mayor, que sea menor o igual que *x*. Por ejemplo, *E*[2,1] = 2, *E*[3,8] = 3 , *E*[-2,1] = -3, *E*[-3,8] = -4. Dibuja la función y prueba que en los valores enteros no es continua.

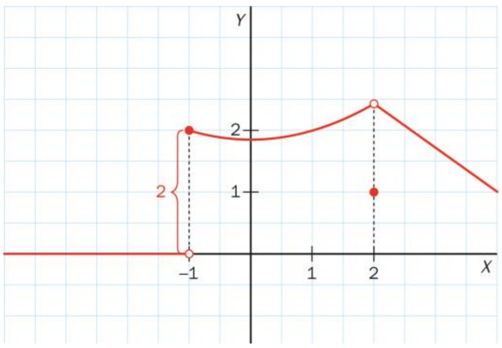
La gráfica de la función $f(x)=E[x]$ es:



En los valores enteros la función es discontinua inevitable con salto 1.

21. Dibuja una función que sea discontinua con salto 2 en x = -1, discontinua evitable en x = 2 y continua en el resto.

Por ejemplo, una función que cumple las condiciones del enunciado es la siguiente:



© Mcgraw-Hill

9 Sucesiones. Límites de sucesiones

22. Analiza si las siguientes sucesiones son convergentes. Si son divergentes, explica por qué.

a) $a_n = \dfrac{3n}{3n+1}$ b) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3}$ c) $a_n = \dfrac{5}{2^n+1}$

d) $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^2}$ e) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ f) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

a) Es convergente.

b) Es convergente.

c) Es convergente.

d) Es divergente.

e) Es divergente.

f) Es convergente.

23. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)^{n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{2n^2}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} \to \dfrac{1}{e}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)^{n} \to +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{2n^2} \to \dfrac{1}{e^2}$

© Mcgraw-Hill

Actividades finales

Idea intuitiva de límites

24. Utiliza una tabla de valores para estimar el límite de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $\lim_{x\to 2}(x^2-3x)$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x}{x}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

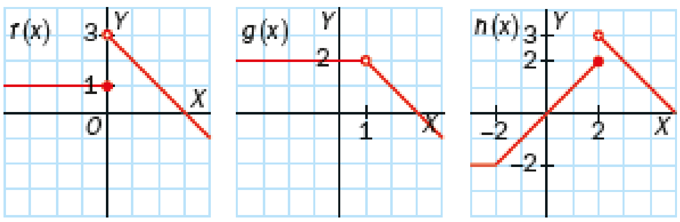
a) $\lim_{x\to 2}(x^2-3x)=-2$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=0,5$

c) ó $\lim_{x\to 0}\frac{2^x}{x}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

25. Utiliza las siguientes gráficas para estimar los límites correspondientes:



a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1} g(x)$ c) $\lim_{x\to -2} h(x)$ y $\lim_{x\to 2} h(x)$

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

b) $\lim_{x\to 1} g(x)=2$

c) $\lim_{x\to 2} h(x)$ no existe.

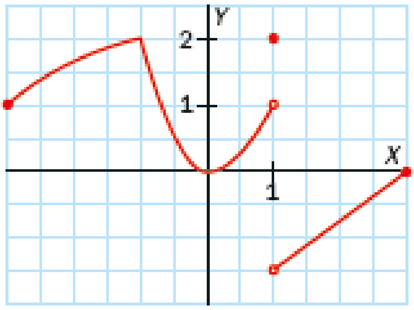
© Mcgraw-Hill

Límites laterales

26. Dada la gráfica de la función $f(x)$, calcula los valores que se proponen:

a) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ c) $f(-1)$

d) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ f) $f(1)$



a) $\lim_{x\to -1^-} f(x)=2$ b) $\lim_{x\to -1^+} f(x)=2$ c) $f(-1)=2$

d) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$ e) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-1{,}5$ f) $f(1)=2$

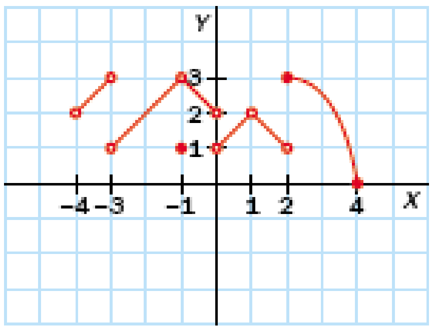
27. Dada la gráfica de la función $g(x)$, calcula los valores que se proponen:

a) $\lim_{x\to -3^-} g(x)$ b) $\lim_{x\to -3^+} g(x)$ c) $g(-3)$

d) $\lim_{x\to -1^-} g(x)$ e) $\lim_{x\to -1^+} g(x)$ f) $g(-1)$

g) $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ h) $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ i) $g(0)$

j) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ k) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ l) $g(2)$



a) $\lim_{x\to -3^-} g(x)=3$ b) $\lim_{x\to -3^+} g(x)=1$ c) $g(-3)$ no existe

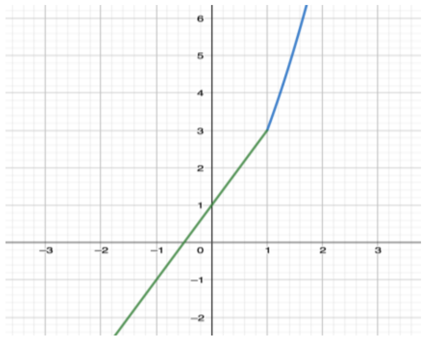
d) $\lim_{x\to -1^-} g(x)=3$ e) $\lim_{x\to -1^+} g(x)=3$ f) $g(-1)=3$

g) $\lim_{x\to 0^-} g(x)=2$ h) $\lim_{x\to 0^+} g(x)=1$ i) $g(0)$ no existe

j) $\lim_{x\to 2^-} g(x)=1$ k) $\lim_{x\to 2^+} g(x)=3$ l) $g(2)=3$

© Mcgraw-Hill

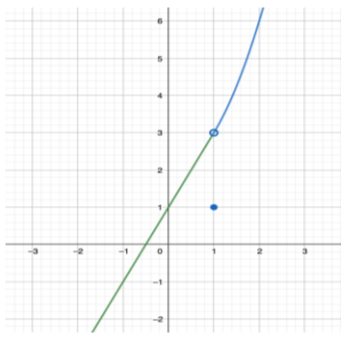
28. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ x^2+2x, & x\geq 1 \end{cases}$, represéntala gráficamente y estudia la existencia de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.



$$\lim_{x\to 1} f(x)=3$$

29. Representa gráficamente la función $f(x)$ y estudia la existencia de límites laterales en x=1.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 \ , \text{si } x<1 \\ 1 \ , \text{si } x=1 \\ \boldsymbol{x}^2+2 \ , \text{si } x>1 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 1} f(x)=3$$

30. Halla los límites laterales en los puntos indicados.

a) $f(x)=\dfrac{5}{x^2}$, $x=0$

b) $f(x)=\dfrac{-3}{x+1}$, $x=-1$

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

b) $\text{ó} \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

31. Halla los límites laterales de la función $f(x)=\text{arctg}\dfrac{1}{x}$ cuando $\boldsymbol{x}\to 0$.

$$\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Cálculo de límites

32. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+1}{x^2+1}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^4-16}$ c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ e) $\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}$ f) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{x-1}\right)$

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+1}{x^2+1}\to -1$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^4-16}\to \frac{1}{32}$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}\to -\frac{1}{2}$

d) $\acute{o}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

e) $\acute{o}\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}$

f) $\acute{o}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{x-1}\right)$

33. Calcula estos límites de funciones con radicales:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ c) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

d) $\lim_{x\to 9}\frac{2\sqrt{x}-6}{x-9}$ e) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{11-x}-3}$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\to \frac{1}{6}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\to \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\to \frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{2\sqrt{x}-6}{x-9}\to\dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{11-x}-3}\to 3$

34. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-9}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$ e) $\lim\limits_{x\to \pi}\operatorname{tg} x$ f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} x$

a) $\text{ó}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x}{x-1}$

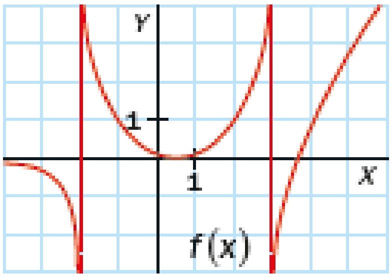
b) $\text{ó}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-9}$

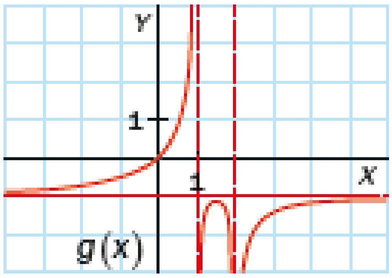
c) $\text{ó}\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(\pi)=0$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

35. Dadas las gráficas de las dos funciones siguientes, calcula los límites indicados:





a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

© Mcgraw-Hill

a)

- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b)

- $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$,
- $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -1$
- $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -1$

36. Calcula estos límites, en los que interviene el valor absoluto:

a) $\lim_{x\to 2} |x-2|$ b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}\right)$

a) $\lim_{x\to 2} |x-2| = 0$

b) $\text{ó} \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}\right)$

37. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = e^x$, estudia:

a) $\lim_{x\to 0} \left[f(x)+g(x)\right]$ b) $\lim_{x\to +\infty} \left[f(x)+g(x)\right]$

a) $\text{ó} \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} + e^x\right)$

b) $\lim_{x\to +\infty} \left[f(x)+g(x)\right] \to +\infty$

38. Calcula los siguientes límites en el infinito:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-5}{x^2+3}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x}{6x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x}{6x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x^3+3}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5x^2-\dfrac{1}{x}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{3x+2}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-5}{x^2+3}=6$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x}{6x-1}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x}{6x-1}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x^3+3}=0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5x^2-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

39. Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2+4}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x+2}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+3x-1}{\sqrt{x^4+2x}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1+\sqrt{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2+4}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x+2}}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+3x-1}{\sqrt{x^4+2x}}=3$

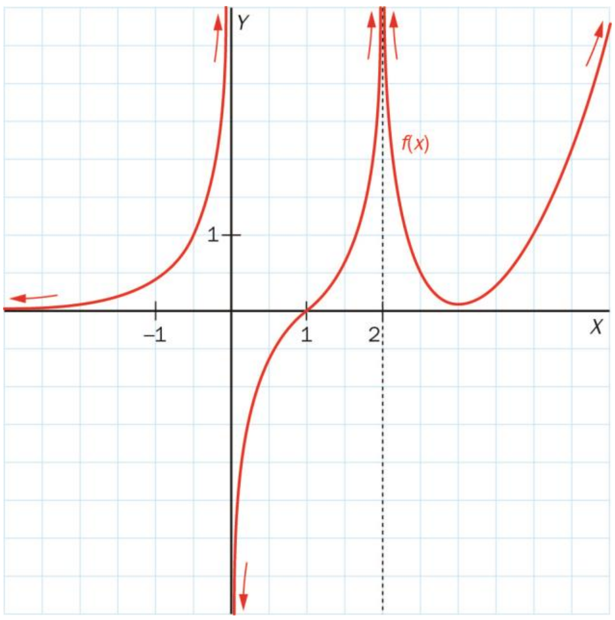
e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+\sqrt{x}}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}=0$

40. Esboza la gráfica de una función f(x) que cumpla las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

La gráfica de una función que cumple las condiciones del enunciado es:



41. Calcula los siguientes límites en el infinito:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{1+e^x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{1+e^x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1\right)e^{-x}$

© Mcgraw-Hill

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+e^{x}\right)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+e^{x}}\right)$ = 0

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{1+e^{x}}\right)$ = 2

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln x\right)=+\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

f) $\lim_{x\to-\infty}\left(x-1\right)e^{-x}=-\infty$

42. Estudia según los valores de k el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-k\right)x^{3}-kx^{2}+2}{3x^{2}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-k\right)x^{3}-kx^{2}+2}{3x^{2}+1}=\frac{\infty}{\infty}$$ (Indeterminación)

- Si $k<1$, entonces: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-k\right)x^{3}-kx^{2}+2}{3x^{2}+1}=+\infty$
- Si $k>1$, entonces: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-k\right)x^{3}-kx^{2}+2}{3x^{2}+1}=-\infty$
- Si $k=1$, entonces: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-k\right)x^{3}-kx^{2}+2}{3x^{2}+1}=\frac{1}{3}$

Asíntotas

43. Halla, si existen, las asíntotas verticales de las siguientes funciones.

a) $f\left(x\right)=\frac{1}{x^{2}}$ b) $f\left(x\right)=\frac{2}{x^{2}+x-2}$ c) $f\left(x\right)=\frac{2}{\left(x-1\right)^{3}}$

d) $f\left(x\right)=\frac{x}{\operatorname{sen}x}$ e) $f\left(x\right)=\frac{x+1}{x^{2}+1}$ f) $f\left(x\right)=\frac{x}{\ln x}$

a) $x=0$ es una asíntota vertical

b) $x=1$ y $x=-2$ son asíntotas verticales.

c) $x = 1$ es una asíntota vertical.

d) Hay asíntotas verticales en $x=k\pi,\quad k\in Z$ y $k\neq 0$.

e) No tiene asíntotas verticales.

f) $x=1$ es una asíntota vertical.

44. Halla, si existen, las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\operatorname{arctg} x$ b) $f(x)=e^x$ c) $f(x)=\ln x$ d) $f(x)=e^{-x}$

a) $y=-\dfrac{\pi}{2}$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

$y=\dfrac{\pi}{2}$ es una asíntota horizontal por la derecha.

b) $y=0$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

c) No tiene asíntotas horizontales.

d) $y=0$ es una asíntota horizontal por la derecha.

45. Determina todas las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+x}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-5x+4}$

d) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ e) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$

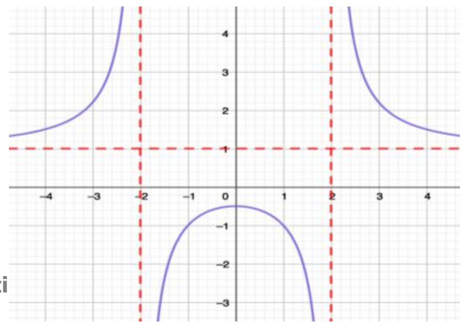
- Asíntotas verticales

  $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales

  $y=1$ es una asíntota horizontal.

Su gráfica es:



Mc Graw Hill © Mcgraw-Hill

b) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+x}$

- Asíntotas verticales

  $x=0$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales

  $y=1$ es una asíntota horizontal.

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-5x+4}$

- Asíntotas verticales

  $x=1$ y $x=4$ son asíntotas verticales.

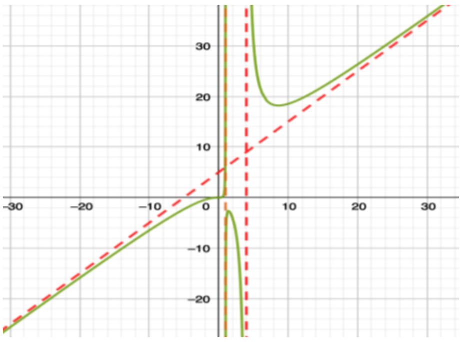
- Asíntotas horizontales

  Esta función no tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas

  $y=x+5$ es una asíntota oblicua de la curva.

Su gráfica es:



d) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$

- Asíntotas verticales

  $x=-1$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales

  $y=0$ es una asíntota horizontal

e) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

- Asíntotas verticales

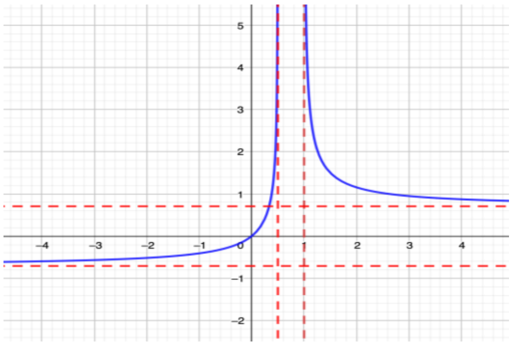
  $x=1$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales

  $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ es una asíntota horizontal por la derecha

  $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

  A continuación, figura su gráfica.



f) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{x(x-1)}$

- Asíntotas verticales

  Por tanto, $x=0$ y $x=1$ son asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales

  $y=0$ es una asíntota horizontal.

46. Determina los valores de $a, b y c$ de la función $f(x)=\frac{ax+b}{cx-3}$, sabiendo que pasa por el punto (4,9) y que las rectas $y=2$ y $x=3$ son sus asíntotas horizontal y vertical, respectivamente.

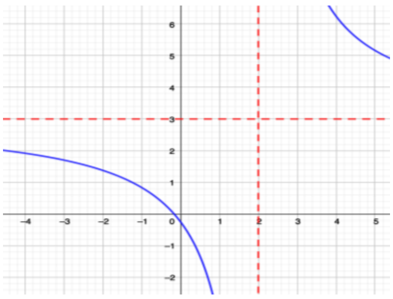
$c=1$, $a=2$ y $b=1$

47. Encuentra los valores de a y b de tal forma que la gráfica de la función $f(x)=\frac{ax+1}{bx-4}$ tenga asíntota vertical en x = 2 y asíntota horizontal en y = 3. A continuación, calcula $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, y esboza la gráfica de $f(x)$.

a = 6; *b* = 2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{6x+1}{2x-4}=\frac{13}{0^-}=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{6x+1}{2x-4}=\frac{13}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{6x+1}{2x-4}=\frac{6}{2}=3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x+1}{2x-4}=\frac{6}{2}=3$$



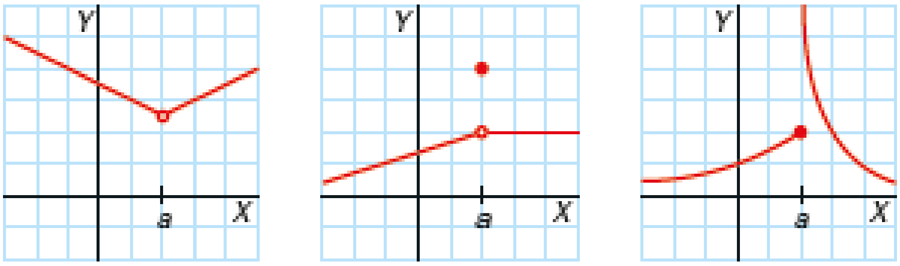
Continuidad

48. Estudia la continuidad en x=2 de la función

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & , \text{si } x\le 2 \\ x^2-2x & , \text{si } x>2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ no es continua en x=2 .

49. En cada una de las siguientes gráficas indica, si es posible, cómo evitar la discontinuidad en x=a.



a) Basta definir $f(a)=2,5$ para evitar la discontinuidad en x=a.

b) En este caso evitamos la discontinuidad en x=a definiendo $f(a)=2$.

c) En esta gráfica no es posible evitar la discontinuidad en x=a.

50. Halla el valor de $\boldsymbol{a}$ para que la función

$$f(x)=\begin{cases} \boldsymbol{e}^{x-1}+a, \text{ si } x<1 \\ \ln \boldsymbol{x} \quad\quad , \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$$ sea continua en x= 1.

Para $a=-1$ la función $f(x)$ es continua en x=1.

51. Estudia su continuidad y calcula, si existen, sus asíntotas.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & , \text{ si } x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & , \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$$

a) La función $f(x)$ es continua en $\mathrm{R}-\{0\}$.

b) No tiene asíntotas verticales.

$y=1$ es una asíntota horizontal por la derecha de la curva $f(x)$.

52. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x), \text{ si } x<0 \\ x^2e^{-x} \quad\quad , \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$$

a) Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Halla el valor de $\boldsymbol{a}$ para que $f(x)$ sea continua en todo R.

Mc Graw Hill © Mcgraw-Hill

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) si $a=0$, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

53. Halla el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} x+a & , \text{si } x<-1 \\ 3 & , \text{si } x\geq -1 \end{cases}$$

Para $a=4$ y $a=1$, la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

54. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones. En los puntos que presenten discontinuidad evitable, encuentra el valor de la función para que sea continua.

a) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-4}$ b) $g(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

a) No es continua en los puntos $x=-2$ y $x=2$.

b) No es continua en los puntos $x=-2$ y $x=2$.

c) No es continua en x=1.

55. Estudia si son continuas en todo $\mathbb{R}$ las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$ b) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ c) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$

a) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$ no es continua en $x=-1$.

b) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ no es continua en $x=0$.

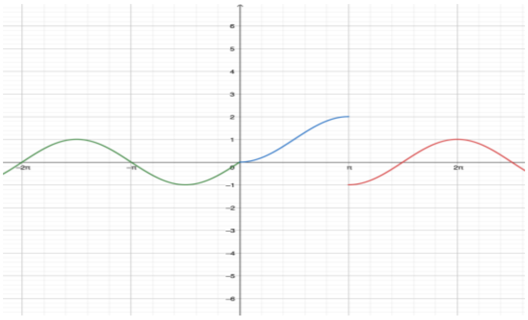
c) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$ no es continua en $x=-1$.

© Mcgraw-Hill

56. Halla los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Si $a=1$ y $b=2$ la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

57. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x<0 \\ 1-\cos x, & \text{si } 0\le x\le \pi \\ \cos x, & \text{si } x\ge \pi \end{cases}$. Dibújala y estudia la continuidad en los puntos $x=0$ y $x=\pi$.



Sucesiones

58. Prueba que la sucesión de término general $a_n=\dfrac{3n+5}{1-4n}$ es monótona creciente. ¿Está acotada? ¿Es convergente?

Como es creciente y convergente, entonces la sucesión está acotada entre el primer término y el límite. Así:

$$-\frac{8}{3}\le a_n\le -\frac{3}{4} \quad , \quad \forall\, n\in \mathbb{N}$$

59. Encuentra el término general de la sucesión $\frac{1}{3},\frac{4}{6},\frac{9}{11},\frac{16}{18},\ldots$ ¿Es monótona? ¿Está acotada? Calcula su límite.

El término general de esta sucesión es: $a_n=\dfrac{n^2}{n^2+2}$

60. Calcula los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)^x=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}=e^{km}$

61. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n}$ b) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n-1}-n\right)$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n+2}$ d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2}$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n-1}-n\right) = -\infty$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n+2} = +\infty$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2} = 0$

Aplicaciones

62. Venta por internet. En una plataforma de internet se oferta un teléfono móvil cuyo precio, p, en euros, depende del número de unidades, x, en stock, y se puede modelar mediante la siguiente función de demanda.

$$p(x) = 300\left(1+\frac{2}{2+e^{-0,01x}}\right) \quad , \quad x>0$$

a) Halla los precios si dispone de un stock de 100, 200 y 1000 móviles.
b) Si el stock es muy elevado, el precio del móvil tiende a estabilizarse alrededor de un precio, ¿cuál es este? ¿Qué interpretación puedes dar?

a) $p(100) \approx 553€$
$p(200) \approx 581€$
$p(1000) \approx 600$ €

b) Cuando el stock de móviles es muy elevado el precio tiende a estabilizarse alrededor de 600 €.

© Mcgraw-Hill

63. Venta de un producto. El número de unidades que vende una empresa de un producto depende del precio p, en euros, y viene dado por:

$$N(p)=\frac{40p+8}{p}$$

Si se aumenta el precio indefinidamente, ¿qué ocurrirá con las ventas?

Las ventas tenderán a estabilizarse en 40 unidades.

64. Estudio de población. Se estima que, el número de habitantes en cierta ciudad dentro de t años viene dado por la función:

$$N(t)=\frac{100000}{4+6e^{-0,03t}}$$

a) ¿Cuál es la población inicial?
b) ¿Cuál es la población esperada dentro de 20 años? ¿Y dentro de 50 años?
c) A largo plazo, ¿qué población se espera que tenga esta ciudad?

a)
Inicialmente había 10000 habitantes

b) La población esperada en esta población dentro de 20 años es de aproximadamente 13712 habitantes. Mientras que dentro de 50 años, si se mantiene esta tendencia, será de 18731 habitantes.

c) A largo plazo esta ciudad tendrá aproximadamente 25000 habitantes, es decir, dos veces y media la población inicial.

65. Estudio farmacológico. La concentración en la sangre de un medicamento después de t horas de administrárselo a un paciente viene dada por la función

$$C(t)=3te^{-2t} \quad , \quad t\geq 0$$

a) ¿Cuál será la concentración al cabo de dos horas? ¿Y de cuatro horas?
b) ¿Qué le ocurre a la concentración "a largo plazo"?

a) La concentración en la sangre de este medicamento al cabo de dos horas es de 0,1099. La concentración en la sangre del paciente del medicamento después cuatro horas es de 0,0040.

b) Se puede decir que "a largo plazo" la concentración en la sangre de ese medicamento es prácticamente nula.

© Mcgraw-Hill

66. Velocidad de un paracaídas. La velocidad de un paracaidista en función del tiempo t, en segundos, viene dada por $v(t)=60\left(1-e^{-0,1t}\right)$, donde $v(t)$ se mide en metros por segundo.

a) ¿Cuál es la velocidad después de 20 s? ¿Y después de 40 s?

b) La velocidad máxima de un cuerpo en caída libre, considerando la resistencia del viento, se llama velocidad terminal. Calcula la velocidad terminal, es decir, la velocidad cuando $t \to \infty$.

La velocidad del paracaidista después de 20 segundos es de aproximadamente $51,88\,m/s$; mientras que transcurridos 40 segundos es de aproximadamente $58,90\,m/s$.

La velocidad terminal del paracaidista es de aproximadamente $60\,m/s$.

67. Propagación de un virus. El número de miles de personas de una población contagiadas por un tipo de virus después t semanas, viene dado por:

$$N(t)=\frac{3}{1+5e^{-0,5t}}$$

a) ¿Cuántas personas estaban contagiadas por este virus inicialmente? ¿Y después de cuatro semanas?

b) Si la tendencia continúa, ¿cuántas personas acabarán contagiándose?

a) Inicialmente había en la población 750 personas contagiadas por este virus. Después de cuatro semanas había en la población aproximadamente 1789 personas contagiadas por este virus.

b) A “largo plazo” habrá aproximadamente 3000 personas contagiadas.

68. Crecimiento de un árbol. El diámetro d, en centímetros, de un tipo de árbol depende de la edad t, en años, y sigue el modelo de crecimiento logístico

$$d(t)=\frac{20}{1+1,8e^{-0,02t}}$$

a) ¿Qué diámetro se espera que tenga este tipo de árbol al cabo de un año? ¿Y después de 40 años?¿Y después de 100 años?

b) A lo largo del tiempo, ¿qué diámetro se espera que alcance?

a) Al cabo de un año el árbol tendrá un diámetro de aproximadamente 7,2 cm.
Al cabo de cuarenta años el árbol tendrá un diámetro de aproximadamente 11,1 cm.
Después de cien años el árbol tendrá un diámetro de aproximadamente 16,1 cm.

b) A lo largo del tiempo el árbol tenderá a tener un diámetro de aproximadamente 20 cm.

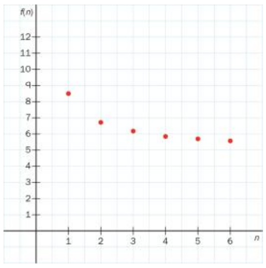
© Mcgraw-Hill

69. Comportamiento animal. Para estudiar cómo aprenden los animales, una estudiante de psicología llevó a cabo un experimento en el laboratorio con el fin de averiguar cuánto tiempo tarda un ratón en salir de un laberinto. Después de varias pruebas logró modelar el tiempo, en minutos, que tarda en salir al enésimo intento mediante la función

$$f(n) = a_n = 5 + \frac{7}{2n}$$

a) Calcula los seis primeros términos de la sucesión y represéntala gráficamente.
b) Cuando el número de intentos crece de forma ilimitada, ¿qué se puede afirmar del tiempo que tardaría el ratón en salir del laberinto?

a) $a_1 = 8,5$, $a_2 = 6,75$, $a_3 = 6,16$, $a_4 = 5,875$, $a_5 = 5,7$, $a_6 \approx 5,583$



b)

Después de un número ilimitado de intentos el ratón tardará aproximadamente cinco minutos en salir del laberinto.

70. Logística. El coste, en euros, de mantener un stock de *x* unidades de la *playstation* PS4 *pro* viene dado por la función:

$$C(x) = 3x + \frac{5000}{x} \quad , \quad x > 0$$

a) Halla todas las asíntotas de la función de costes.

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x)$.

c) ¿Qué relación existe entre la recta $y = 3x$ y la función $C(x)$?

d) Utiliza la información de los apartados anteriores para esbozar la gráfica de la función de costes.

a) La recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la función de costes, definida para $x > 0$,

No tiene asíntotas horizontales.

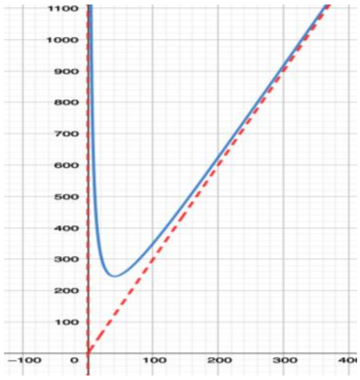
b) $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{5000}{x^2}\right) = 3 + 0 = 3$

$n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[C(x) - mx\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[3x + \frac{5000}{x} - 3x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5000}{x} = 0$

c) La recta $y = 3x$ es una asíntota oblicua de la función de costes $C(x)$.

© Mcgraw-Hill

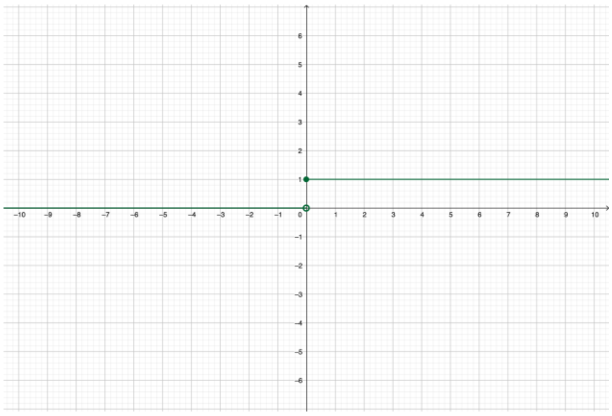
d) Con la información de los apartados anteriores podemos esbozar la gráfica de la función de costes $C(x)$.



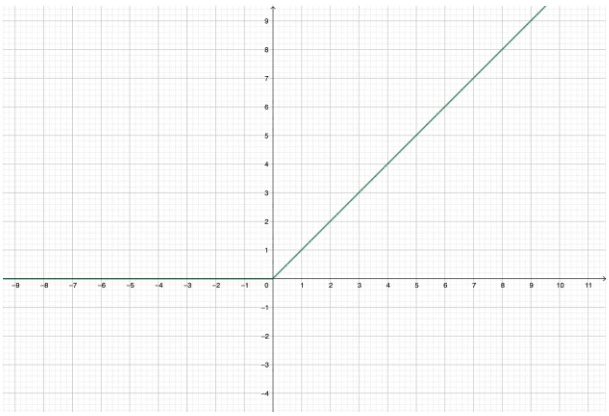
Un mundo matemático

1. Representa gráficamente las tres funciones y estudia su continuidad. ¿Hacen honor a su nombre?

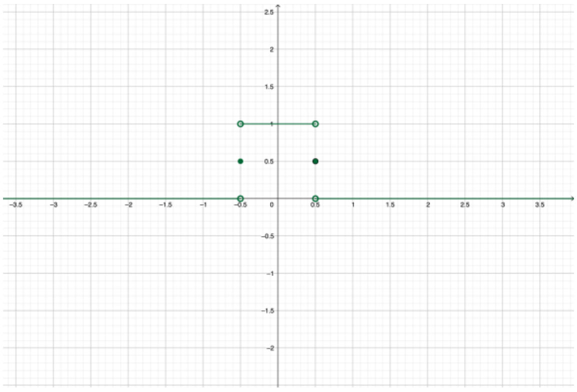
- Función escalón de Heaviside



- Función rampa



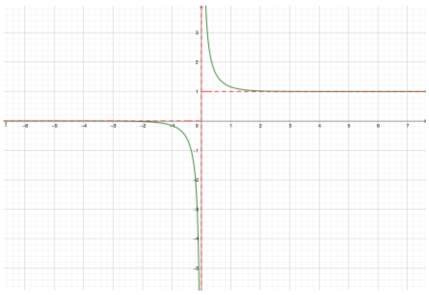
- Función rectángulo o pulso unitario



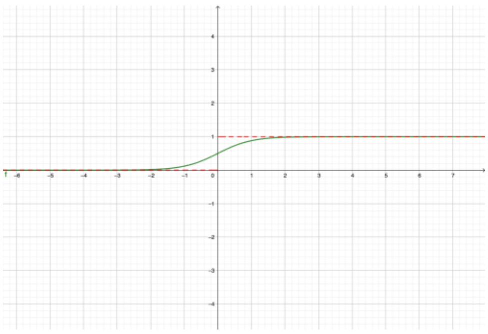
2. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2t)^{2n}+1} = \pi(t)$, para n ∈ Z.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2t)^{2n}+1} = \begin{cases} \frac{1}{+\infty+1} = \frac{1}{+\infty} = 0, & si\ |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \quad , & si\ |t| = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{0+1} = 1 \quad , & si\ |t| < \frac{1}{2} \end{cases} = \pi(t)$$

3. Sean $f(x) = \frac{1}{1-e^{-2x}}$ y $g(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$. Utiliza una herramienta gráfica para dibujarlas. A continuación, calcula los límites de ambas funciones cuando $x \to -\infty$, $x \to 0$ y $x \to +\infty$. ¿Cuáles son sus asíntotas? ¿En alguna de ellas coinciden los límites anteriores con los de la función Heaviside?



$f(x) = \frac{1}{1-e^{-2x}}$



$g(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$

© Mcgraw-Hill

La función $f(x) = \frac{1}{1-e^{-2x}}$ tiene, a y=0 como asíntota horizontal por la izquierda, y a y=1 como asíntota horizontal por la derecha. Además, x=0 es una asíntota vertical.

Por su parte, también deducimos que la función $g(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$ tiene, a y=0 como asíntota horizontal por la izquierda, y a y=1 como asíntota horizontal por la derecha. Pero no tiene asíntotas verticales.

Por otro lado, comprobamos que, cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$, los límites de ambas funciones coinciden con los de la función Heaviside.

© Mcgraw-Hill