1 Vectores en el plano

1. Dado el vector libre $\vec{u} = (3, -2)$, encuentra:

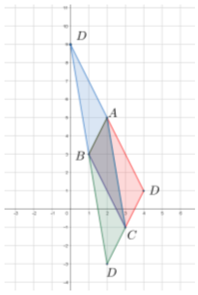
   a) El extremo *Q* de su representante $\overrightarrow{PQ}$ si el origen es *P* (4,2).

   b) El origen A de su representante $\overrightarrow{AB}$ si el extremo es *B* (5,-1).

   a) $Q(7,0)$

   b) $B(2,1)$

2. Dados los puntos *A*(2,5), *B*(1,3) y *C*(3,–1), determinar las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y calcular las coordenadas del punto *D* para que *ABCD* sea un paralelogramo. ¿Cuáles deben ser las coordenadas de *D* para que el paralelogramo sea *ABDC*? ¿Y para que lo sea *ADBC*?



$\overrightarrow{AB} = (-1, -2)$; $\overrightarrow{AC} = (1, -6)$

Para que *ABCD* sea un paralelogramo $\Rightarrow D(4,1)$

Para que el paralelogramo sea ABDC $\Rightarrow D(2,-3)$

Finalmente, para que el paralelogramo sea ADBC $\Rightarrow D(0,9)$

2 Características de un vector

3. Calcula los módulos y los ángulos que forma el eje OX con los vectores representados por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$, siendo *A*(2,5), *B*(1,3) y *C*(3,-1). Expresa las coordenadas polares de dichos vectores.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -2) \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5} \\ \theta = 243°26' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}_{243°26'}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, -6) \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{37} \\ \theta = 279°28' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{37}_{279°28'}$$

$$\overrightarrow{BC} = (2, -4) \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{5} \\ \theta = 296°34' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{37}_{279°28'}$$

4. Obtén las coordenadas cartesianas de estos vectores:

   a) $\vec{u} = 5_{53°}$

   b) $\vec{v} = 2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$

   c) $\vec{w} = 3_{\frac{3\pi}{2}}$

   d) $\vec{x} = \sqrt{3}_{\frac{5\pi}{3}}$

   a) $\vec{u} = (3, 4)$

   b) $\vec{v} = (-2, 2)$

   c) $\vec{w} = (0, -3)$

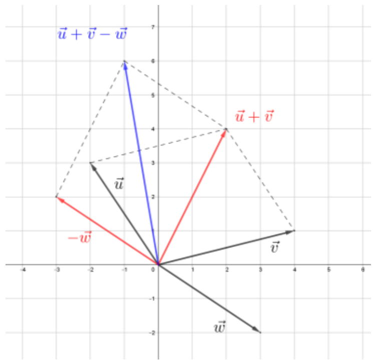
d) $\vec{x}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-3}{2}\right)$

5. Halla las coordenadas del trasladado de *P* (2,5) mediante el vector $\vec{v}=3\sqrt{2}_{\frac{5\pi}{4}}$.

Las coordenadas cartesianas de $\vec{v}$ son: $\vec{v}=(-3,-3)$

El punto P', trasladado de P según $\vec{v}$ es: $P'(-1,2)$.

3 Operaciones con vectores



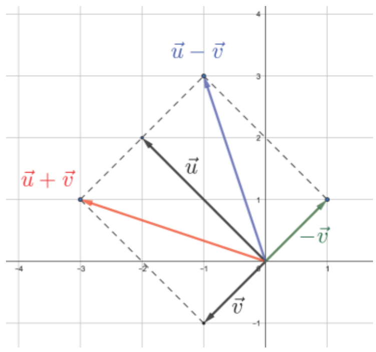
6. Dados los vectores $\vec{u}=(-2,3)$, $\vec{v}=(4,1)$ y $\vec{w}=(3,-2)$ halla el vector $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$, gráfica y analíticamente.

$\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=(-1,6)$

7. Halla los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u}=\left(2\sqrt{2}_{135°}\right)$ y $\vec{v}=\left(\sqrt{2}\right)_{225°}$

La suma es $\vec{u}+\vec{v}=(-3,1)$

Y la resta es $\vec{u}-\vec{v}=(-1,3)$



8. Dados los puntos *A* (-1,1) y *B* (2,-3), encuentra los puntos alineados con A y B que están:

a) a la misma distancia de *B* que lo está *A*.
b) a la misma distancia de *A* que de *B*.

a) Hallamos el vector $\overrightarrow{BA}=(-1-2,1-(-3))=(-3,4)$. A continuación, calculamos su opuesto, $-\overrightarrow{BA}=(3,-4)$

Y trasladamos el punto B según el vector: $-\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{OB}'=\overrightarrow{OB}+\left(-\overrightarrow{BA}\right)=(2,-3)+(3,-4)=(5,-7)\Rightarrow B'(5,-7)$

b) Hallamos el vector

Trasladamos el punto B según $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=(2,-3)+\left(-\frac{3}{2},2\right)=\left(\frac{1}{2},-1\right)\Rightarrow M\left(\frac{1}{2},-1\right)$$

4 Dependencia e independencia lineal

9. Los vectores $\vec{e}_1=(2,-1)$ y $\vec{e}_2=(1,2)$ son linealmente independientes y forman una base, $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. El vector $\vec{u}$ tiene coordenadas $\vec{u}=(3,-2)_B$ en dicha base. Determinar sus coordenadas respecto de la base canónica.

Las coordenadas de $\vec{u}$ en la base canónica son $\vec{u}=(4,-7)$.

10. Escribe el vector $\vec{w}=(11,-3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=(-1,3)$ y $\vec{v}=(3,1)$. A continuación, determina las coordenadas de $\vec{w}$ en la base formada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

En conclusión, $\vec{w}=-2\vec{u}+3\vec{v}$, y el vector $\vec{w}$ tiene coordenadas $(-2,3)_B$ en la base B formada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

5 Producto escalar de vectores

11. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base ortogonal y se sabe que $|\vec{u}|=2$ y $|\vec{v}|=3$. Halla el producto escalar $\vec{x}\cdot\vec{y}$, siendo $\vec{x}=4\vec{u}-3\vec{v}$ e $\vec{y}=3\vec{u}+2\vec{v}$.

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=-6$$

12. Obtén una expresión para el producto escalar de dos vectores de los que conocemos sus coordenadas polares.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=|\vec{u}|_{\alpha_1}\\ \vec{v}=|\vec{v}|_{\alpha_2}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}\vec{v}=\left(|\vec{u}|_{\alpha_1}\right)\left(|\vec{v}|_{\alpha_2}\right)=|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\alpha_2-\alpha_1)$$

13. Dado el vector $\vec{u}=(-1,2)$, halla las coordenadas del vector que tiene la dirección y el sentido de $\vec{u}$ y módulo 10.

Hallamos el vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{u}$ y lo multiplicamos por 10.

$$\vec{v}=10\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=10\cdot\frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}=\left(-2\sqrt{5},4\sqrt{5}\right)$$

14. Comprueba que el paralelogramo ABCD, tres de cuyos vértices son A(0,0), B(3,1) y D(1,3), es un rombo. Calcula los ángulos del rombo y comprueba la ortogonalidad de las diagonales $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

$C(4,4)$

6 Aplicaciones de las operaciones con vectores

15. Calcula las longitudes de los lados del triángulo *ABC* en cada caso y clasifícalos en función de sus lados.

a) *A*(3,-1), *B*(0,0) y *C*(-1,-3) b) *A*(2,3), *B*(–1, 4) y *C*(–1, 0) c) *A*(1, 0), *B*(5, 0) y *C*(3, 2 $\sqrt{3}$)

a) *A*(3,-1), *B*(0,0) y *C*(-1,-3)

$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{10} \\ b=\sqrt{20} \\ c=\sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ el triángulo es isósceles}$$

b) *A*(2,3), *B*(–1, 4) y *C*(–1, 0)

$$\left.\begin{array}{l} a=4 \\ b=2\sqrt{3} \\ c=\sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ el triángulo es escaleno}$$

c) *A*(1, 0), *B*(5, 0) y *C*(3, 2 $\sqrt{3}$)

$$\left.\begin{array}{l} a=4 \\ b=4 \\ c=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ el triángulo es equilátero}$$

16. Si llamamos G al baricentro del triángulo ABC, demuestra que la suma de vectores $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Como las coordenadas de G son $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, podemos calcular las coordenadas de $\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}$ y $\overrightarrow{GC}$ y sumarlas:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{GA}=\left(x_1-\frac{x_1+x_2+x_3}{3},y_1-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \\ \overrightarrow{GB}=\left(x_2-\frac{x_1+x_2+x_3}{3},y_2-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \\ \overrightarrow{GC}=\left(x_3-\frac{x_1+x_2+x_3}{3},y_3-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\left(x_1+x_2+x_3-3\frac{x_1+x_2+x_3}{3},y_1+y_2+y_3-3\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)=(0,0)=\vec{0}$$

17. Dos vértices de un triángulo *ABC* son los puntos $A(1,0)$ y $B(0,1)$. Si el baricentro es el punto $G(1,1)$, determinar las coordenadas del tercer vértice, *C*, así como las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo.

$C(2,2)$

Los puntos medios de los lados del triángulo son:

$M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ $N\left(\frac{3}{2},1\right)$ $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Actividades

Vectores libres. Coordenadas

18. Dados los puntos $A\left(-\frac{1}{2},3\right)$, $B\left(2,\frac{1}{3}\right)$ $y\ C(3,4)$, halla las coordenadas del punto *D* de manera que $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$.

El punto *D* tiene coordenadas $D\left(-2,\frac{28}{3}\right)$

19. Halla las coordenadas de todos los puntos del plano que forman con $O(0,0)$, $A(3,1)$ y $B(4,-2)$ un paralelogramo.

Paralelogramo *OABC*: $C_1(1,-3)$

Paralelogramo *OACB*: $C_2(7,-1)$

Paralelogramo *OCAB*: $C_3(-1,3)$

20. Dado el vector $\vec{u}=\left(1,\frac{2}{3}\right)$, halla las coordenadas de los siguientes puntos:

a) El origen del vector si su extremo es $B(3,1)$

b) El extremo del vector, si su origen es $A\left(2,\frac{4}{3}\right)$

a) $A\left(2,\frac{1}{3}\right)$

b) $B(3,2)$

21. Halla las coordenadas del punto *A* para que $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ siendo $B(3,-1)\ y\ C(-2,3)$

$A\left(\frac{21}{2},-7\right)$

22. Calcula las coordenadas cartesianas del vector cuyas coordenadas polares son:

a) $\vec{u}=5_{\frac{3\pi}{4}}$ b) $\vec{v}=2_{\frac{\pi}{2}}$ c) $\vec{w}=\sqrt{3}_{\frac{4\pi}{3}}$

a) $\vec{u}=\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\vec{v}=(0,2)$

c) $\vec{w}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$

23. Determina las coordenadas polares del vector cuyas coordenadas cartesianas son:

a) $\vec{u}=(2,-5)$ b) $\vec{v}=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ c) $\vec{w}=(0,-3)$

a) $|\vec{u}|=\sqrt{29}_{291°48'}$

b) $|\vec{v}|=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)_{153°26'}$

c) $|\vec{w}|=3_{270°}$

24. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{v}=\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$, halla las coordenadas cartesianas de:

a) $2\vec{u}+3\vec{v}$ b) $\sqrt{3}\vec{v}$ c) $-2\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}$

a) $2\vec{u}+3\vec{v}=(-1,5)$

b) $\sqrt{3}\vec{v}=\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

c) $-2\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}=\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$

25. Los vectores $\vec{u}=(k,-2)$ y $\vec{v}=(-1,k+1)$ tienen la misma dirección. Calcula el valor o valores de *k*.

$$\begin{cases} k=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \\ k=\dfrac{-1+3}{2}=1 \end{cases}$$

26. Determina el valor de λ ("lambda") sabiendo que el vector $\vec{u}=(5,3)$ es paralelo al vector $\vec{v}=(\lambda,\lambda+1)$.

$$\lambda=\frac{-5}{2}$$

27. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen las relaciones $2\vec{u}-\vec{v}=3\vec{w}$ y $3\vec{u}+5\vec{v}=6\vec{w}$. Demuestra que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y encuentra su relación de dependencia.

De la primera igualdad, multiplicando por 2 obtenemos $4\vec{u}-\overrightarrow{2v}=6\vec{w}$. Igualando con la expresión de la segunda igualdad, $\left.\begin{matrix}3\vec{u}+5\vec{v}=6\vec{w}\\ 4\vec{u}-\overrightarrow{2v}=6\vec{w}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\vec{u}+5\vec{v}=4\vec{u}-\overrightarrow{2v}\Rightarrow 7\vec{v}=\vec{u}$, que demuestra que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

❖ Operaciones. Combinaciones lineales. Bases

28. Determina si los siguientes vectores son o no linealmente independientes:

a) $\vec{u}=(4,2)$ y $\vec{v}=(1,2)$

b) $\vec{u}=(4,2)$ y $\vec{v}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

c) $\vec{u}=\left(1,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$

d) $\vec{u}=\left(-3,\sqrt{3}\right)$ y $\vec{v}=\left(\sqrt{3},-1\right)$

a) $\frac{4}{1}\neq\frac{2}{2}\Rightarrow$ los vectores son linealmente independientes.

b) $\frac{4}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{4}}=8\Rightarrow\vec{u}=8\vec{v}$. Los vectores son linealmente dependientes.

c) $\frac{1}{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}}=\frac{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}}{1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow\vec{u}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\vec{v}$. Los vectores son linealmente dependientes

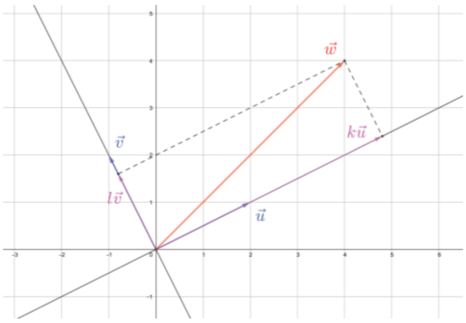
d) $\frac{-3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}\Rightarrow\vec{u}=-\sqrt{3}\vec{v}$. Los vectores son linealmente dependientes

29. Expresa gráfica y analíticamente el vector $\vec{w}=(4,4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(-1,2)$.

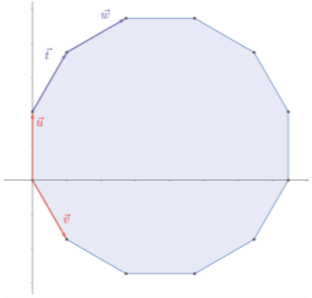
$$\vec{w}=k\vec{u}+l\vec{v}\Rightarrow(4,4)=k(2,1)+l(-1,2)\Rightarrow\begin{cases}2k-l=4\\ k+2l=4\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}2k-l=4\\ k+2l=4\end{matrix}\right\}\overset{2E_1+E_2}{\Rightarrow}5k=12\Rightarrow k=\frac{12}{5};l=\frac{4}{5}$$

$$\vec{w}=\frac{12}{5}\vec{u}+\frac{4}{5}\vec{v}$$



30. En el dodecágono regular de la figura, considera los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\ y\,\vec{t}$. Si las coordenadas de $\vec{u}$ en la base canónica son $(0,1)$, utiliza las coordenadas polares para determinar las coordenadas cartesianas de $\vec{v},\vec{w}\ y\,\vec{t}$.



$\vec{t}=1_{60°}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{w}=1_{30°}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}=1_{300°}=\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

31. Para el dodecágono regular de la figura del ejercicio anterior considerar la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$. Determina las coordenadas de los vectores $\vec{w}$ y $\vec{t}$ respecto de dicha base.

$\vec{w}=\left(2,\sqrt{3}\right)_B$

$\vec{t}=\left(\sqrt{3},1\right)_B$

32. Halla las coordenadas del vector $\vec{i}=(1,0)$ en la base formada por los vectores $\vec{u}=1_{\frac{\pi}{3}}$ y $\vec{v}=1_{\frac{5\pi}{6}}$

$\vec{i}=\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)_B$

❖ Producto escalar. Ángulo entre dos vectores

33. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-5)$ y $\vec{v}=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, halla su producto escalar y el ángulo que forman.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{-9}{2}$ $\qquad \alpha\approx 138°22'$

34. Justifica por qué no es posible que el producto escalar de dos vectores sea -3, si los módulos de los dos vectores son 2 y 1 respectivamente.

Como $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, si $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$, sería $-3=2\cdot 1\cdot\cos\alpha$, lo que exigiría que $\cos\alpha=\frac{-3}{2}<-1$ lo que no es posible, puesto que $|\cos\alpha|\leq 1$.

35. Si el producto escalar de dos vectores vale 5 y el módulo de uno de ellos 3, determina el mínimo valor posible para el módulo del otro vector.

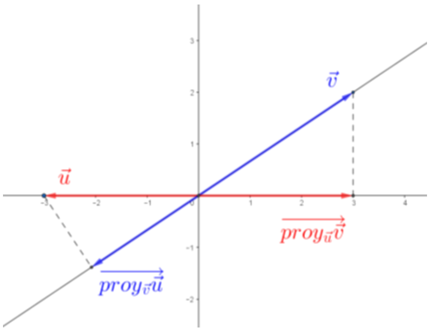
El mínimo valor posible para el módulo del otro vector es $\frac{5}{3}$

36. Determina la proyección escalar del vector $\vec{u}=(-3,0)$ sobre el vector $\vec{v}=(3,2)$. Halla también el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\vec{u}}=\left(\frac{-27}{13},\frac{-18}{13}\right)$$

37. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del ejercicio anterior, determina la proyección escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ así como el vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

$$\overrightarrow{proy_{\vec{u}}\vec{v}}=(3,0)$$



38. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales. Demuestra que:

a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

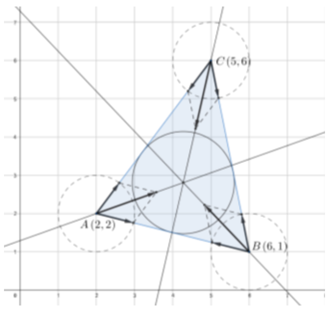
Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, su producto escalar vale 0. Por tanto,

a) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\vec{u}-\vec{u}\vec{v}+\vec{v}\vec{u}-\vec{v}\vec{v}=\vec{u}^2-0+0-\vec{v}^2=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

b) $\left.\begin{array}{l}(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\vec{u}+\vec{u}\vec{v}+\vec{v}\vec{u}+\vec{v}\vec{v}=\vec{u}^2+0+0+\vec{v}^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2\\(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\vec{u}-\vec{u}\vec{v}-\vec{v}\vec{u}+\vec{v}\vec{v}=\vec{u}^2-0-0+\vec{v}^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2\end{array}\right\}\Rightarrow(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$

❖ Módulo de un vector. Normalización

39. En el triángulo de la figura, utiliza la normalización de los vectores en las direcciones de los lados y la suma vectorial para obtener las direcciones de las bisectrices de los ángulos interiores.



Como en la actividad 49, obtenemos los vectores correspondientes a los lados con origen en cada vértice, los normalizamos y los sumamos:

Vértice A: $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(6-2,1-2)=(4,-1);\vec{u}_1=\dfrac{(4,-1)}{\sqrt{17}}=\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}},\dfrac{-1}{\sqrt{17}}\right)\\\overrightarrow{AC}=(5-2,6-2)=(3,4);\vec{u}_2=\dfrac{(3,4)}{5}=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)\end{array}\right.\Rightarrow\vec{b}_1=\vec{u}_1+\vec{u}_2=\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}}+\dfrac{3}{5},+\dfrac{-1}{\sqrt{17}}+\dfrac{4}{5}\right)$

Vértice B: $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{BA}=(2-6,2-1)=(-4,1);\vec{v}_1=\dfrac{(-4,1)}{\sqrt{17}}=\left(\dfrac{-4}{\sqrt{17}},\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)\\\overrightarrow{BC}=(5-6,6-1)=(-1,5);\vec{v}_2=\dfrac{(-1,5)}{\sqrt{26}}=\left(\dfrac{-1}{\sqrt{26}},\dfrac{5}{\sqrt{26}}\right)\end{array}\right.\Rightarrow\vec{b}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_2=\left(\dfrac{-4}{\sqrt{17}}+\dfrac{-1}{\sqrt{26}},\dfrac{1}{\sqrt{17}}+\dfrac{5}{\sqrt{26}}\right)$

Vértice C: $\begin{cases} \overrightarrow{CA}=(2-5,2-6)=(-3,-4);\ \vec{w}_1=\dfrac{(-3,-4)}{5}=\left(\dfrac{-3}{5},\dfrac{-4}{5}\right) \\ \overrightarrow{CB}=(6-5,1-6)=(1,-5);\ \vec{w}_2=\dfrac{(1,-5)}{\sqrt{26}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{26}},\dfrac{-5}{\sqrt{26}}\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{b}_3=\vec{w}_1+\vec{w}_2=\left(\dfrac{-3}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{26}},\dfrac{-4}{5}+\dfrac{-5}{\sqrt{26}}\right).$

40. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ verifican la relación $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$. ¿Se puede deducir que $\vec{v}=\vec{w}$? Justifica la respuesta.

De $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ no se puede deducir que $\vec{v}=\vec{w}$, puesto que:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}\Leftrightarrow|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})=|\vec{u}||\vec{w}|cos(\vec{u},\vec{w})\Leftrightarrow|\vec{v}|cos(\vec{u},\vec{v})=|\vec{w}|cos(\vec{u},\vec{w})$.

Y la igualdad de estos dos productos no permite deducir la igualdad de los vectores, $\vec{v}=\vec{w}$

41. Dos de los vértices de un cuadrado son los puntos A(2,3) y B(7,4). Halla los otros dos vértices. (Pista: existen tres soluciones distintas, una de las cuales considera *AB* la diagonal del cuadrado).

Primera: Si A y B son vértices consecutivos, el vector $\overrightarrow{AB}=(7-2,4-3)=(5,1)$ corresponde a uno de los lados del cuadrado. El vector $\vec{u}=(1,-5)$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y con su mismo módulo, por tanto: $D(3,-2)$. $C(8,-1)$.

Segunda: Si consideramos $-\vec{u}=(-1,5)$ como vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$: $D(1,8)$ y $C(6,9)$

Tercera: Si A y B son vértices opuestos del cuadrado, su punto medio es el centro del mismo, y es $M\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{7}{2}\right)$. $C(5,1)$ y $D(4,6)$

42. Determina las coordenadas del punto *P*, que se encuentra a 10 unidades de distancia del punto *A*(2,1) en la dirección y sentido del vector $\vec{u}=(-3,4)$.

$P(-4,9)$

43. Halla las coordenadas del vector $\vec{w}=5\vec{i}+2\vec{j}$ en la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ siendo $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{j}$ y $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$.

$\vec{w}=\dfrac{9}{5}\vec{u}+\dfrac{17}{5}\vec{v}$ y $\vec{w}=\left(\dfrac{9}{5},\dfrac{17}{5}\right)_B$

44. En el triángulo equilátero *ABC*, se conocen los vértices $A(0,0)$ y $B(2\sqrt{3},2)$. Halla un lado del triángulo y determina las coordenadas del vértice *C*. (Hay dos posibles soluciones).

Hay dos posibles soluciones, $C(0,4)$ y $C(2\sqrt{3},-2)$.

❖ Distancia entre dos puntos. Punto medio. Baricentro

45. Clasifica los siguientes triángulos en función de las longitudes de sus lados:

a) $A(5,3),\ B(1,-4)$ y $C(7,-1)$ b) $A(-1,-1),\ B(4,-1)$ y $C(2,6)$ c) $A(0,0),\ B(0,-4)$ y $C(5,-2)$

d) $A(2,5),\ B(4,-1)$ y $C(3,-2)$ e) $A(0,0),\ B(3,1)$ y $C\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$

a) $A(5,3),\ B(1,-4)\ y\ C(7,-1)$

$$\left.\begin{array}{r} d(A,B)=\sqrt{65} \\ d(A,C)=\sqrt{20} \\ d(B,C)=\sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ El triángulo es escaleno}$$

b) $A(-1,-1),\ B(4,-1)\ y\ C(2,6)$

$$\left.\begin{array}{r} d(A,B)=5 \\ d(A,C)=\sqrt{58} \\ d(B,C)=\sqrt{53} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ El triángulo es escaleno}$$

c) $A(0,0),\ B(0,-4)\ y\ C(5,-2)$

$$\left.\begin{array}{r} d(A,B)=4 \\ d(A,C)=\sqrt{29} \\ d(B,C)=\sqrt{29} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ El triángulo es isósceles}$$

d) $A(2,5),\ B(4,-1)\ y\ C(3,-2)$

$$\left.\begin{array}{r} d(A,B)=\sqrt{40} \\ d(A,C)=\sqrt{50} \\ d(B,C)=\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ El triángulo es escaleno}$$

e) $A(0,0),\ B(3,1)\ y\ C\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} d(A,B)=\sqrt{10} \\ d(A,C)=\sqrt{10} \\ d(B,C)=\sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ El triángulo es equilátero}$$

46. Dado el triángulo con vértices $A(2,5),\ B(4,-1)$ y $C(3,-2)$, halla las longitudes de sus lados y las de sus medianas.

Las longitudes de los lados del triángulo son: $a=\sqrt{2}$; $b=5\sqrt{2}$; $c=2\sqrt{10}$.

Y las longitudes de las medianas son: $m_1=\frac{\sqrt{178}}{2}$; $m_2=\frac{\sqrt{34}}{2}$; $m_3=4$

47. Construye un paralelogramo tres de cuyos vértices sean los punto $A(-2,-1)$, $B(0,3)$ y $C(4,1)$. Obtén las coordenadas del cuarto vértice y comprueba que el punto medio de las dos diagonales es el mismo punto.

Hay tres soluciones distintas:

Paralelogramo AD_1CB $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow(x+2,y+1)=(4,-2)\Rightarrow D_1(2,-3)$

Paralelogramo ACD_2B $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\Rightarrow(6,2)=(x,y-3)\Rightarrow D_2(6,5)$

Paralelogramo $ACBD_3$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow(x+2,y+1)=(-4,2)\Rightarrow D_3(-6,1)$

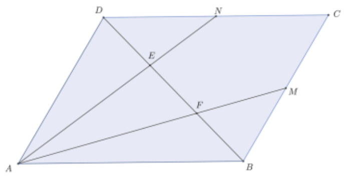
Comprobamos que las diagonales se cortan en su punto medio:

Para el paralelogramo AD_1CB $\quad M_{AC}\left(\frac{-2+4}{2},\frac{-1+1}{2}\right)\Rightarrow M(1,0)$ y $M_{BD}\left(\frac{0+2}{2},\frac{3-3}{2}\right)\Rightarrow M(1,0)$

Para el paralelogramo ACD_2B $\quad N_{AD}\left(\frac{-2+6}{2},\frac{-1+5}{2}\right)\Rightarrow N(2,2)$ y $N_{CB}\left(\frac{4+0}{2},\frac{1+3}{2}\right)\Rightarrow N(2,2)$

Para el paralelogramo $ACBD_3$ $\quad P_{AB}\left(\frac{-2+0}{2},\frac{-1+3}{2}\right)\Rightarrow P(-1,1)$ y $P_{CD}\left(\frac{4-6}{2},\frac{1+1}{2}\right)\Rightarrow P(-1,1)$

48. En el paralelogramo de la figura, *M* y *N* son los puntos medios de los lados *BC* y *CD*, respectivamente. Demuestra que los segmentos *AM* y *AN* dividen a la diagonal *BD* en tres partes iguales.



Consideramos los vectores $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$, que, puesto que son linealmente independientes, forman una base, $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$. Escribimos el vector $\overrightarrow{AE}$ en dicha base de dos formas distintas:

Por un lado $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+x\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+x\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\vec{v}+x\cdot(\vec{u}-\vec{v})=x\vec{u}+(1-x)\vec{v}$

Por otro lado,

$$\overrightarrow{AE}=y\overrightarrow{AN}=y\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\right)=y\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)=y\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=y\left(\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{u}\right)=\frac{y}{2}\vec{u}+y\vec{v}$$

Como las coordenadas de $\overrightarrow{AE}$ en la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ son únicas,

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{y}{2}\\1-x&=y\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=\frac{1}{3};\,y=\frac{2}{3}.$$

Esto demuestra que: $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

Operamos de la misma forma con $\overrightarrow{AF}$:

Por un lado $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+x\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+x\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\vec{v}+x\cdot(\vec{u}-\vec{v})=x\vec{u}+(1-x)\vec{v}$

Por otro lado,

$$\overrightarrow{AF}=y\overrightarrow{AM}=y\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)=y\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=y\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=y\left(\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)=y\vec{u}+\frac{y}{2}\vec{v}$$

Igualando las coordenadas: $\left.\begin{aligned}x&=y\\1-x&=\frac{y}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=\frac{2}{3};\,y=\frac{2}{3}$

Por tanto, $\overrightarrow{DF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$, lo que implica que *E* y *F* dividen a la diagonal *DB* en tres partes iguales.

49. Demuestra que:

a) $|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2=4\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) Si α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces $\cos\alpha=\frac{|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2}{4|\vec{u}||\vec{v}|}$

a) Teniendo en cuenta que $|\vec{u}|^2=\vec{u}\vec{u}$, podemos escribir

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\vec{u}+\vec{u}\vec{v}+\vec{v}\vec{u}+\vec{v}\vec{v}-(\vec{u}\vec{u}-\vec{u}\vec{v}-\vec{v}\vec{u}+\vec{v}\vec{v})=$$
$$=\vec{u}\vec{u}+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}\vec{v}-\vec{u}\vec{u}+2\vec{u}\vec{v}-\vec{v}\vec{v}=4\vec{u}\vec{v}$$

b) A partir del apartado a y la definición de producto escalar:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{4\vec{u}\vec{v}}{4|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2}{4|\vec{u}||\vec{v}|}$$

❖ Miscelánea

50. Del triángulo *ABC* se conocen los vértices $A(3,2)$ y $B(0,9)$ y el baricentro $G(4,5)$. Halla las coordenadas del tercer vértice, *C*, y las de los puntos medios de los lados. (Ten en cuenta que, siendo *M* el punto medio del lado *AB*, el vector $\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$)

Coordenadas del tercer vértice: C (9,4)

Los puntos medios de los lados son:

$M_{AB}\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right), N_{AC}(6,3)$ y $P_{BC}\left(\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$.

51. En un triángulo *ABC*, el baricentro es $G(1,2)$. El punto medio de *AB* es $M(2,4)$ y el punto medio de *BC* es $N(3,-2)$. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo.

Los vértices del triángulo son los puntos $A(-3,10), B(7,-2)$ y $C(-1,-2)$.

52. Dos vértices consecutivos de un rombo son los puntos $A\left(2,\frac{7}{2}\right)$ y *B*(6,4). El centro del rombo es el punto *M*(3,2). Calcula la longitud de sus diagonales, las coordenadas de los otros dos vértices y el área del rombo.

Para hallar la longitud de las diagonales hallamos la distancia desde cada vértice al centro del rombo.

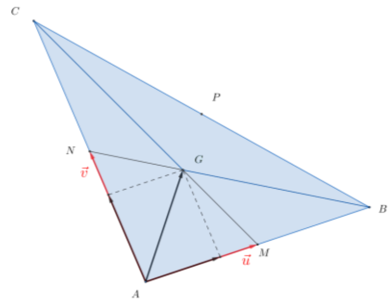
D = $2\sqrt{13}$; C = (4, 1/2); D = (0,0)

Área = 13

53. En el triángulo *ABC*, *M* es el punto medio de AB y N es el punto medio de AC. Trazamos los segmentos CM y BN, que se cortan en el punto G. Considerando la base formada por los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AN}$, obtener las coordenadas del vector $\overrightarrow{AG}$ en dicha base. Si P es el punto medio del lado BC, demuestra que *A*, *G* y *P* están alineados.

Para obtener las coordenadas de $\overrightarrow{AG}$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$:

$\overrightarrow{AG} = (2 - 2x)\vec{u} + x\vec{v}$



54. Dados los vectores $\vec{u} = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$ y $\vec{v} = \left(4, \frac{1}{2}\right)$, hallar las coordenadas de un vector $\vec{x}$ tal que:

a) $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{v} \cdot \vec{x}$ y $|\vec{x}| = \sqrt{2}$ b) $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{x} = 4\vec{v}$

a) $\vec{x} = (-1, 1)$; $\vec{x} = (1, -1)$

b) $\vec{x} = (26, 12)$

55. Los módulos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son 3 y 4 respectivamente. Si el ángulo que forman es $\frac{\pi}{3}$, calcula:

a) $|\vec{u} + \vec{v}|$ b) $|\vec{u} - 2\vec{v}|$ c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$ d) $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2$

a) $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{37}$

b) $|\vec{u} - 2\vec{v}| = 7$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) = -12$

d) $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2 = 73$

56. Los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son ortogonales y tienen módulos respectivamente iguales a 2 y 3. Halla un número λ y un vector $\vec{w}$ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u} + \vec{w}$ y $\vec{u} \perp \vec{w}$, donde $\vec{u} = 3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ y $\vec{v} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$.

$$\lambda = \frac{-57}{117} = \frac{-19}{39}\ ;\ \vec{w} = \frac{45}{13}\vec{u}_1 - \frac{20}{13}\vec{u}_2$$

57. Los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son ortonormales. Halla un número λ y un vector $\vec{w}$ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u} + \vec{w}$ y $\vec{u} \perp \vec{w}$ siendo $\vec{u} = 3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$ y $\vec{v} = 2\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2$.

$$\lambda = \frac{-22}{25}\ ;\ \vec{w} = \frac{116}{25}\vec{u}_1 - \frac{87}{25}\vec{u}_2$$

58. Demuestra las siguientes identidades:

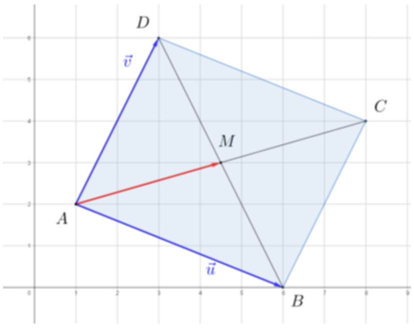
a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ b) Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ entonces $(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}-\vec{v})^2$

a) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{u}\vec{v}+\vec{v}\vec{u}-\vec{v}^2=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

b) $$\left.\begin{array}{l}(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2\overset{\vec{u}\vec{v}=0}{\Rightarrow}(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2\\(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\vec{v}+\vec{v}^2\overset{\vec{u}\vec{v}=0}{\Rightarrow}(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2\end{array}\right\}\overset{\vec{u}\perp\vec{v}}{\Rightarrow}(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}-\vec{v})^2$$

59. Demuestra que las diagonales de cualquier paralelogramo se cortan en su punto medio.

En el paralelogramo ABCD consideramos la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ con $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.



Sea M el punto de corte de las diagonales. Escribimos el vector $\overrightarrow{AM}$ en función de los vectores de la base por dos caminos diferentes e igualamos las coordenadas:

Por un lado $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+x\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=(1-x)\vec{u}+x\vec{v}$

Por otro lado $\overrightarrow{AM}=y\overrightarrow{AC}=y\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=y\vec{u}+y\vec{v}$

Como la expresión de $\overrightarrow{AM}$ en la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ es única, igualamos las coordenadas.

$$\left.\begin{array}{r}1-x=y\\x=y\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{1}{2};y=\frac{1}{2}$$

Por tanto, $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, como queríamos probar.

60. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo y son linealmente independientes. Si el ángulo que forman es α, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{u}+\vec{v}$? ¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}$?

- El ángulo que forma $\vec{u}$ con $\vec{u}+\vec{v}$ es la mitad del que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, $\frac{\alpha}{2}$.
- El vector $\vec{u}-\vec{v}$ tiene la dirección de la otra diagonal del rombo, y como en éste las diagonales son perpendiculares, el ángulo que forman $\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}$ es 90º.

61. El producto escalar del vector $\vec{u}+\vec{v}$ por sí mismo vale 25, y el producto escalar de $\vec{u}-\vec{v}$ por sí mismo vale 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}\cdot\vec{v}$?

$\vec{u}\vec{v}=4$

62 Obtén vectores unitarios en las direcciones que forman con la dirección del vector $\vec{u}=(1,3)$ un ángulo de 45º. ¿Cómo son entre sí dichos vectores?

Los dos vectores resultan perpendiculares.

63.Calcula la medida de los ángulos del cuadrilátero ABCD, siendo los vértices $A(0,6),\ B(-1,0),\ C(0,-8)$ y $D(3,0)$.

$A\approx 36°1'$; $B\approx 163°25'$; $C\approx 27°41'$; $D\approx 132°53'$

64. Calcula la longitud de las medianas del triángulo de vértices $A(4,0),\ B(-1,6)$ y $C(1,-1)$, así como el ángulo que forma cada una con su lado correspondiente

Las longitudes de las medianas son: m_1 = 4,72; m_2 = 7,38; m_3 = 4,03

Los ángulos que forma cada mediana con su lado correspondiente son:

Mediana AP con lado BC: $\alpha = 137°57'$

Mediana BN con lado AC: $\beta = 99°52'$

Mediana CM con lado AB: $\gamma = 46°56'$

❖ Aplicaciones

65. Traslación de una circunferencia. El centro de una circunferencia en el plano es el punto $C(3,4)$, siendo el origen de coordenadas un punto perteneciente a ella. Se traslada la circunferencia de modo que el nuevo centro es el origen de coordenadas. Determinar el vector de traslación y las coordenadas del trasladado del origen.

El vector de traslación es $\vec{t} = \overrightarrow{CO} = (0-3, 0-4) = (-3,-4)$

El trasladado del origen es $\overrightarrow{OO'} = \vec{t} = (-3,-4) \Rightarrow O'(-3,-4)$

66. Traslación de un triángulo. Dado el triángulo con vértices *A*(2,5), *B*(4,-1) y *C*(3,-2), obtén las coordenadas de los vértices de su trasladado según el vector $\vec{t} = 5\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$

Los vértices del triángulo trasladado son: $A'(7,0)$; $B'(9,-6)$; $C'(8,-7)$

67. Cambio de base. Las coordenadas cartesianas de los vectores de la base canónica son $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$. Se considera la base formada por los vectores $\vec{u} = (1,1)$ y $\vec{v} = \sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$. Hallar:

a) Las coordenadas de $\vec{v}$ en la base canónica.
b) Las coordenadas de $\vec{i}$ y $\vec{j}$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$
c) Las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$
d) Las coordenadas en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ de un vector $\vec{x}$ que en la base canónica tiene coordenadas (x_1, x_2).

a) $\vec{v}$ = (-1,1)

b) $\vec{i}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)_B$; $\vec{j}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_B$

c) $\vec{u}=(1,0)_B$; $\vec{v}=(0,1)_B$

d) $\vec{x}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{-x_1+x_2}{2}\right)_B$

68. Cambio de base. En el plano vectorial se tienen las bases $B_1=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ y $B_2=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$. Las coordenadas de $\vec{v}_1$ en la base B_1 son $\vec{v}_1=(2,3)_{B_1}$ y las de $\vec{v}_2$ en B_1 son $\vec{v}_2=(-1,2)_{B_1}$. Si el vector $\vec{w}$ tiene coordenadas $\vec{w}=(-7,0)_{B_1}$, halla:

a) Las coordenadas de $\vec{w}$ en la base B_2.

b) Las coordenadas de $\vec{u}_1\, y\, \vec{u}_2$ en la base B_2.

a) $\vec{w}=(-2,3)_{B_2}$

b) Las coordenadas de $\vec{u}_1\, y\, \vec{u}_2$ en la base B_2 son $\vec{u}_1=\left(\frac{2}{7},-\frac{3}{7}\right)_{B_2}$ y $\vec{u}_2=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7}\right)_{B_2}$

69. Coseno de la resta. Utilizando el producto escalar de dos vectores unitarios expresados mediante sus coordenadas polares y mediante sus coordenadas cartesianas, deduce la expresión para el coseno de la resta de dos ángulos. A partir de ella, deduce la expresión para el coseno de la suma.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=1_\alpha=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)\\ \vec{v}=1_\beta=(\cos\beta,\operatorname{sen}\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=1_\alpha\cdot 1_\beta=1\cdot 1\cdot\cos(\alpha-\beta)\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

A partir de esta expresión se puede deducir la del coseno de la suma de dos ángulos:

$$\cos(\alpha+\beta)=cos\left[\alpha-(-\beta)\right]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

70. Vectores perpendiculares. Dados los vectores $\vec{u}=(1,m)$ y $\vec{v}=(1,n)$, halla la relación que deben verificar *m* y *n* para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales, es decir, perpendiculares.

Para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares, su producto escalar debe ser 0.

71. Cambio de base. En el plano vectorial se tienen las bases $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ Las coordenadas de los vectores de B_1 son $\vec{u}_1 = (2,1)$ y $\vec{u}_2 = (1,2)$, y las coordenadas de los vectores de la base B_2 son $\vec{v}_1 = (-1,3)$ y $\vec{v}_2 = (3,1)$, todas referidas a la base canónica. Hallar:

a) Las coordenadas de los vectores de la base B_2 respecto de la base B_1

b) Las coordenadas de los vectores de la base B_1 respecto de la base B_2.

c) Las coordenadas del vector $\vec{w} = (-3,5)$ respecto de ambas bases.

d) Si un vector tiene coordenadas $\vec{x} = (x_1, x_2)_{B_1}$ halla sus coordenadas en la base B_2.

a) $\vec{v}_1 = \left(\frac{-5}{3}, \frac{7}{3}\right)_{B_1}$ y $\vec{v}_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right)_{B_1}$

b) $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10}\right)_{B_2}$ y $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{B_2}$

c) En la base B_1: $\vec{w} = \left(\frac{-11}{3}, \frac{13}{3}\right)_{B_1}$ En B_2 $\vec{w} = \left(\frac{9}{5}, \frac{-2}{5}\right)_{B_2}$

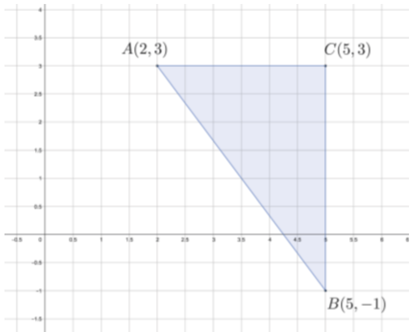
d) $\vec{x} = \left(\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{7}{10}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)_{B_2}$

72. Ángulos de un triángulo. Dados los puntos $A(2,3), B(5,-1) y C(5,3),$ determina los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{BC}$, así como los ángulos que forman $\overrightarrow{AB}$ con $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ con $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$ con $\overrightarrow{CB}$, es decir, los ángulos interiores del triángulo ABC.

$$\overrightarrow{AB} = (5-2, -1-3) = (3,-4)$$

$$\overrightarrow{AC} = (5-2, 3-3) = (3,0)$$

$$\overrightarrow{BC} = (5-5, 3+1) = (0,4)$$



$$A = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53°8'$$

$$B = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36°52'$$

$$C = \arccos(0) = 90°$$

73. Bisectrices interiores. En el triángulo de vértices $A(2,3)$, $B(5,-1)$ y $C(6,4)$ halla vectores en las direcciones de las bisectrices de los ángulos interiores.

Obtenemos los vectores correspondientes a los lados con origen en cada vértice, los normalizamos y sumamos:

Vértice A: $\vec{b}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{-4}{5} + \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

Vértice B: $\vec{b}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \left(\frac{-3}{5} + \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{4}{5} + \frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

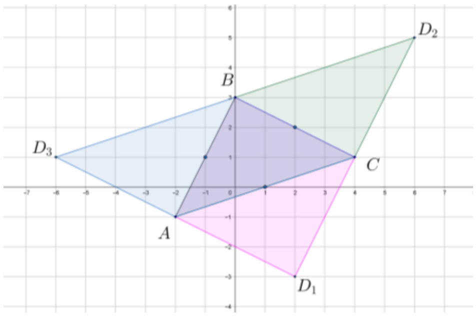
Vértice C: $\vec{b}_3 = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \left(\frac{-4}{\sqrt{17}} + \frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{-1}{\sqrt{17}} + \frac{-5}{\sqrt{26}}\right)$

74. Triángulo medial. En el triángulo de la actividad 66 comprueba que el baricentro del triángulo *ABC* es el mismo punto que el baricentro de su triángulo medial (el que tiene sus vértices en los puntos medios de los lados).

Para hallar las coordenadas del baricentro sumamos las coordenadas de los vértices y dividimos por 3.

Para el triángulo *ABC*: $G\left(\frac{2+4+3}{3}, \frac{5-1-2}{3}\right) \rightarrow G\left(3, \frac{2}{3}\right)$

Para el triángulo medial, *MNP*: $G\left(\frac{3+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}{3}, \frac{2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{3}\right) \rightarrow G\left(3, \frac{2}{3}\right)$. Se trata del mismo punto.

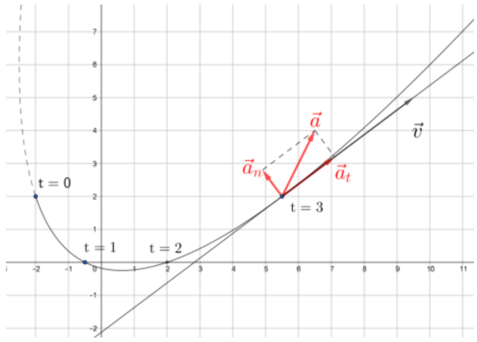


75. Componentes intrínsecas de la aceleración. Un movimiento viene definido en cada instante t, por su vector de posición, $\vec{r}=\left(-2+t+\frac{t^2}{2}, 2-3t+t^2\right)$. El vector velocidad en cada instante es $\vec{v}=(1+t,-3+2t)$, y el vector aceleración en cada instante es $\vec{a}=(1,2)$. Calcula:

a) La posición en los instantes $t=0,1,2,3$.

b) El vector velocidad en los instantes $t=0,1,2,3$

c) Los vectores aceleración tangencial y aceleración normal para $t=3$.



a) $\vec{r}(0)=(-2,2)$; $\vec{r}(1)=\left(-\frac{1}{2},0\right)$; $\vec{r}(2)=(2,0)$; $\vec{r}(3)=\left(\frac{11}{2},2\right)$

b) $\vec{v}(0)=(1,-3)$; $\vec{v}(1)=(2,-1)$; $\vec{v}(2)=(3,1)$; $\vec{v}(3)=(4,3)$

c) La aceleración tangencial: $\vec{a}_t=\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$

El vector aceleración normal: $\vec{a}_n=\left(\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right)$