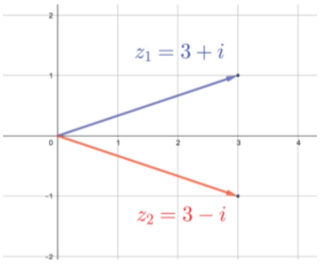
1 Los números complejos

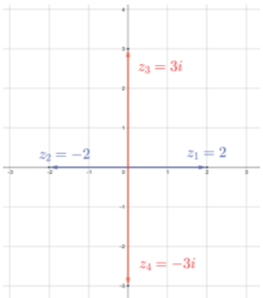
1. Halla las soluciones de las estas ecuaciones, indicando si son números reales, imaginarios o complejos. En cada caso, representa en el plano dichas soluciones:

a) $x^2 - 6x + 10 = 0$ b) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ c) $x^2 - x + 1 = 0$ d) $x^3 - 8 = 0$

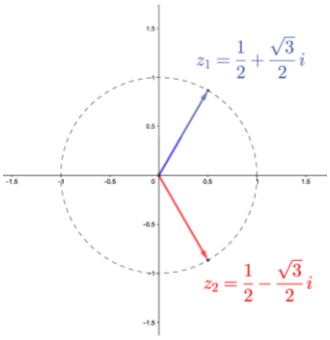
a) La ecuación tiene dos soluciones complejas.



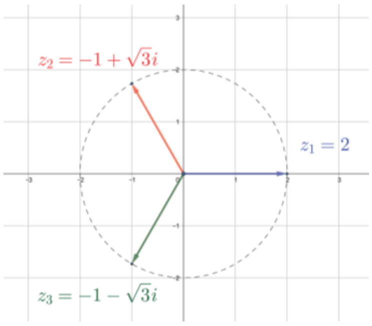
b) La ecuación tiene cuatro soluciones, dos reales y dos imaginarias.



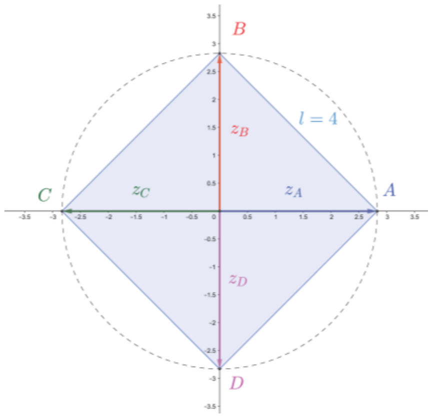
c) La ecuación tiene dos soluciones complejas.



d) La ecuación tiene una solución real y dos soluciones complejas.



2. Un cuadrado centrado en el origen tiene sus diagonales sobre los ejes de coordenadas. Si el lado del cuadrado mide 4, halla las formas binómica y cartesiana de los números complejos cuyos afijos son los vértices del cuadrado.



Los complejos correspondientes son:

$$z_A = 2\sqrt{2}; z_B = 2\sqrt{2}i\ ; z_C = -2\sqrt{2}; z_D = -2\sqrt{2}i.$$

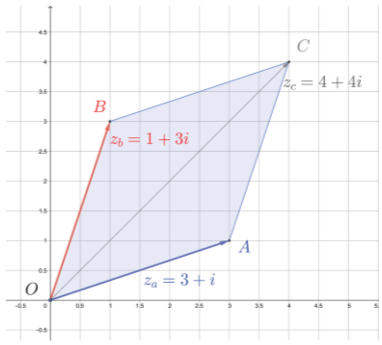
Y las formas cartesianas de estos complejos son:

$$z_A = \left(2\sqrt{2},0\right),\ z_B = \left(0,2\sqrt{2}\right), z_C = \left(-2\sqrt{2},0\right) y\, z_D = \left(0,-2\sqrt{2}\right)$$

3. Los vectores que representan los complejos $z_1 = 3+i$ y $z_2 = 1+3i$ son dos lados de un paralelogramo. Determina las coordenadas de los cuatro vértices del mismo, indicando los complejos cuyos afijos son dichos vértices.

Las coordenadas de los vértices son O(0,0), A(3,1), B(1,3) y C(4,4).

Y los complejos cuyos afijos son los vértices son $z_O = 0+0i$, $z_A = 3+i$, $z_B = 1+3i$ y $z_C = 4+4i$.



4. Escribe en forma polar estos números complejos:

a) $z=1-i$ b) $z=-1-\sqrt{3}i$ c) $z=-2-2i$ d) $z=2\sqrt{3}+2i$

a) $z=\sqrt{2}_{315^\circ}$

b) $z=2_{240^\circ}$

c) $z=2\sqrt{2}_{225^\circ}$

d) $z=4_{30^\circ}$

5. Escribe estos números complejos en forma binómica:

a) $z=4_{225^\circ}$ b) $z=3\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$ c) $z=8_{180^\circ}$ d) $z=5_{0,9273}$

a) $z=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

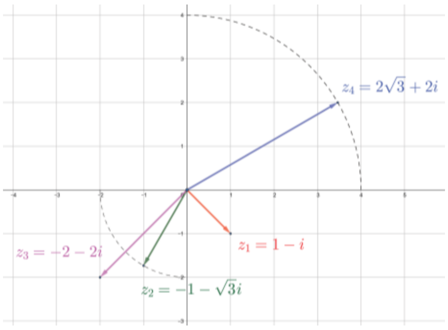
b) $z=3-3i$

c) $z=-8$

d) $z=3+4i$

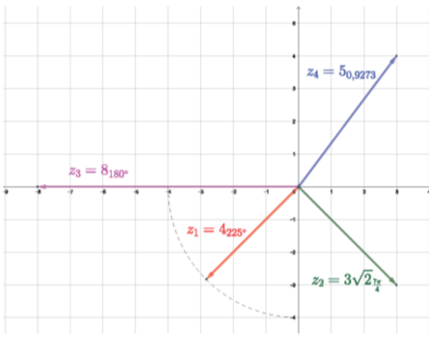
6. Expresa los complejos de las actividades 4 y 5 en forma cartesiana, y representa sus afijos en el plano complejo.

Act. 4:



$$z_1=(1,-1)$$
$$z_2=\left(-1,-\sqrt{3}\right)$$
$$z_3=(-2,-2)$$
$$z_4=\left(2\sqrt{3},2\right)$$

Act. 5:



$$z_1=\left(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)$$
$$z_2=(3,-3)$$
$$z_3=(-8,0)$$
$$z_4=(3,4)$$

2 Operaciones con complejos en forma binómica

7. Calcula $(1+2i)+(1-2i)$ y $(1+2i)\cdot(1-2i)$.

$(1+2i)+(1-2i)=2$

$(1+2i)(1-2i)=5$

8. La suma de dos números complejos es 6, y su producto es 25. ¿Cuáles son esos dos números complejos?

Los números complejos pedidos son 3+4i y 3-4i.

9. ¿Qué condición han de cumplir dos números complejos para que su suma sea un número imaginario puro?

La condición que deben cumplir es que tengan las partes reales opuestas.

10. ¿Qué condición deben cumplir dos números complejos para que tanto su suma como su producto sean números reales?

Las partes reales deben ser iguales, de modo que los complejos que tienen tanto su suma como su producto reales son únicamente los complejos conjugados, $z=a+bi$ y $\bar{z}=a-bi$.

11. El producto de $(a+3i)$ por sí mismo es un número imaginario puro. ¿Cuánto vale a?

Para que sea imaginario puro, su parte real debe ser 0, por tanto: $\begin{cases} a=-3 \\ a=3 \end{cases}$

12. Halla el opuesto, el conjugado y el inverso de los siguientes números complejos. Después, comprueba en cada caso que $z\cdot z^{-1}=1$.

a) $z=1-2i$ b) $z=5i$ c) $z=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ d) $z=5\sqrt{3}+5i$

a) $z=1-2i$;

- Opuesto: $-z=-1+2i$;
- Conjugado: $\bar{z}=1+2i$;
- Inverso: $z^{-1}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$;

b) $z = 5i$;

- Opuesto: $-z = -5i$;
- Conjugado: $\overline{z} = -5i$;
- Inverso: $z^{-1} = -\frac{1}{5}i$;

c) $z = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$;

- Opuesto: $-z = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$;
- Conjugado: $\overline{z} = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$;
- Inverso: $z^{-1} = \frac{-\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{12}i$;

d) $z = 5\sqrt{3} + 5i$;

- Opuesto: $-z = -5\sqrt{3} - 5i$;
- Conjugado: $\overline{z} = 5\sqrt{3} - 5i$;
- Inverso: $z^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{20}i$;

13. ¿Existe algún número complejo cuyo inverso coincida con su conjugado? ¿Qué condición debe cumplir para ello?

Para que el inverso coincida con el conjugado debe ser $a^2 + b^2 = 1$, es decir, el módulo del complejo debe ser la unidad. En conclusión, el inverso de cualquier complejo ***unitario*** coincide con su conjugado.

14. ¿Existe algún número complejo cuyo inverso coincida con su opuesto? Halla todos los complejos que lo cumplen.

Los únicos complejos cuyo opuesto coincide con su inverso son $i = 1_{90°}$ y $-i = 1_{270°}$

15. Demuestra que el opuesto del conjugado de un número complejo coincide con el conjugado del opuesto de ese número complejo.

Observa el siguiente esquema:

$$z = a + bi \xrightarrow{opuesto} -z = -a - bi$$

$$\downarrow Conj. \qquad \downarrow Conj.$$

$$\overline{z} = a - bi \xrightarrow{opuesto} \begin{cases} \overline{-z} = -a + bi \\ -\overline{z} = -a + bi \end{cases}$$

16. Dados los complejos $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ y $z_2 = -2 - \sqrt{2}i$, halla

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$

a) $z_1 \cdot z_2 = \left(-2 - \sqrt{6}\right) + \left(2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)i$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - 2}{6} + \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}i$

17. Calcula $\frac{3i^{1353} - 2i^{-624}}{i^{-258} - 2i^{79}}$.

$$\frac{3i^{1353} - 2i^{-624}}{i^{-258} - 2i^{79}} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$$

18. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(1-i)^3$ b) $(-2+i)^4$ c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$ d) $\left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^4$

a) $(1-i)^3 = -2 - 2i$

b) $(-2+i)^4 = -7 - 24i$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = 1 + 0i$

d) $\left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^4$ = -16

19. Si $z^4 = -7+24i$, ¿cuánto vale $(\overline{z})^4$?

$$(\overline{z})^n = \overline{(z^n)} \Rightarrow (\overline{z})^4 = \overline{(z^4)} = \overline{-7+24i} = -7-24i$$

20. Calcula, operando en forma binómica, $\sqrt{16+30i}$.

Hay dos soluciones: $5+3i$ y $-5-3i$

21. Una de las raíces cuadradas de un número complejo es $-4+7i$. Halla dicho número y su otra raíz cuadrada.

Como las dos raíces cuadradas de un complejo son números opuestos, la otra raíz es $4-7i$.

3 Operaciones en forma polar

22. Expresa en forma trigonométrica y en forma polar los siguientes números complejos:

a) $z_1 = -3+3i$ b) $z_2 = 3\left(\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3} + i\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$

a) $z_1 = -3+3i = 3\sqrt{2}\left(\cos 135° + i\operatorname{sen} 135°\right) = 3\sqrt{2}_{135°}$

b) $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\cdot\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right) = 3_{\frac{11\pi}{6}}$

23. Expresa en forma trigonométrica y en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 5_{225°}$ b) $z_2 = 3_{540°}$ c) $z_3 = \sqrt{5}_{\pi}$ d) $z_4 = \sqrt{3}_{210°}$

a) $z_1 = 5_{225°} = 5\left(\cos 225° + i\operatorname{sen} 225°\right) = 5\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \dfrac{-5\sqrt{2}}{2} - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$

b) $z_2 = 3_{540°} = 3_{180°} = 3\left(\cos 180° + i\operatorname{sen} 180°\right) = 3(-1+0i) = -3$

c) $z_3 = \sqrt{5}_{\pi} = \sqrt{5}\left(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi\right) = \sqrt{5}(-1+0i) = -\sqrt{5}$

d) $z_4 = \sqrt{3}_{210°} = \sqrt{3}\left(\cos 210° + i\operatorname{sen} 210°\right) = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

24. Efectúa los siguientes productos, eligiendo la forma de operar, binómica o polar, que sea más conveniente:

a) $\left(\sqrt{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\pi-1}$ b) $(-2-2i)\left(\sqrt{8}\right)_{\frac{\pi}{4}}$ c) $(5-4i)(1)_{\frac{\pi}{2}}$

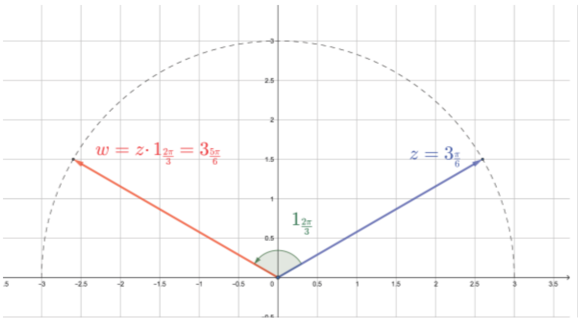
a) $\left(\sqrt{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\pi-1} = -1$

b) $(-2-2i)\left(\sqrt{8}\right)_{\frac{\pi}{4}} = -8i$

c) $(5-4i)(1)_{\frac{\pi}{2}} = 4+5i$

25. Efectúa el producto $3_{\frac{\pi}{6}} \cdot 1_{\frac{2\pi}{3}}$, y representa el afijo del resultado. ¿Qué se puede afirmar en términos geométricos sobre el producto de un número complejo por otro de módulo 1?

$3_{\frac{\pi}{6}} \cdot 1_{\frac{2\pi}{3}} = 3_{\frac{5\pi}{6}}$



26. Dados los complejos $z_1 = -3+3i$ y $z_2 = 3_{\frac{2\pi}{3}}$, efectúa las siguientes operaciones. Expresa el resultado en forma binómica.

a) $\frac{z_1}{z_2}$ b) $(z_2 \cdot i)^3$ c) $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4$

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

b) $(z_2 \cdot i)^3 = -27i$

c) $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4 = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$

27. Calcula las siguientes potencias eligiendo el modo de operar más conveniente:

a) $\left(\sqrt{5}_{225^\circ}\right)^4$ b) $(3-i)^3$ c) $\left(\sqrt{3}_\pi\right)^6$ d) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6$

a) $\left(\sqrt{5}_{225^\circ}\right)^4 = -25$

b) $(3-i)^3 = 18-26i$

c) $\left(\sqrt{3}_\pi\right)^6 = 27$

d) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6 = -1$

28. Desarrolla en forma polar y en forma binómica $(1_\alpha)^3 = (\cos\alpha + i\cdot\text{sen}\,\alpha)^3$

$$(1_\alpha)^3 = (1^3)_{3\alpha} = 1_{3\alpha} = \cos(3\alpha) + i\,\text{sen}(3\alpha)$$

$$(\cos\alpha + i\cdot\text{sen}\,\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha\, i + 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha\, i^2 + \text{sen}^3\alpha\, i^3 =$$

$$= \left(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha\right) + \left(3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha\right)i$$

Igualando los dos resultados, tenemos:

$$\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha$$

$$\text{sen}(3\alpha) = 3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha$$

29. Dados los complejos en forma de Euler, $z_1 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ y $z_3 = e^{i\cdot\pi}$, calcula:

a) $z_1\cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$ c) $\frac{z_2\cdot z_3}{z_1}$ d) $(z_3)^4$ e) z_3+1

a) $z_1\cdot z_2 = \left(1-\sqrt{3}\right) + \left(1+\sqrt{3}\right)i$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)i$

c) $\frac{z_2\cdot z_3}{z_1} = \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)i$

d) $(z_3)^4 = 1$

e) $z_3+1=e^{i\cdot\pi}+1=-1+1=0$. Esta igualdad se puede escribir: $e^{i\cdot\pi}+1=0$, y como en ella aparecen relacionados los cinco números más destacados $(0,1,\pi,e,i)$ se ha calificado con frecuencia como *la ecuación más bella de las matemáticas*.

4 Ecuaciones con soluciones complejas

30. Comprueba que tanto $z=3+4i$ como $\bar{z}=3-4i$ son soluciones de la ecuación $x^2-6x+25=0$.

Sustituimos en la ecuación la incógnita por los complejos z y $\bar{z}$,y operamos:

$$x=z=3+4i\Rightarrow(3+4i)^2-6(3+4i)+25=9+24i-16-18-24i+25=(34-34)+(24-24)i=0+0i=0$$

$$x=\bar{z}=3-4i\Rightarrow(3-4i)^2-6(3-4i)+25=9-24i-16-18+24i+25=(34-34)+(24-24)i=0+0i=0$$

31. Resuelve la ecuación $x^3-27=0$ y descompón el polinomio $P(x)=x^3-27$ como producto de factores con coeficientes reales, y como producto de factores con coeficientes complejos.

La descomposición de $P(x)$ como producto de factores con coeficientes reales es:

$$P(x)=x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$$

La descomposición de $P(x)$ como producto de factores con coeficientes complejos es:

$$P(x)=x^3-27=(x-3)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$$

32. Halla la ecuación polinómica con coeficientes reales cuyas soluciones son $z=2+3i$ y su conjugado y $w=-2+3i$ y su conjugado.

$$x^4+10x^2+169=0$$

33. Resuelve en C la ecuación: $z^2-(3+4i)z-7+i=0$. ¿Por qué las soluciones no son conjugadas?

Las soluciones de la ecuación:

$$z=4+3i$$

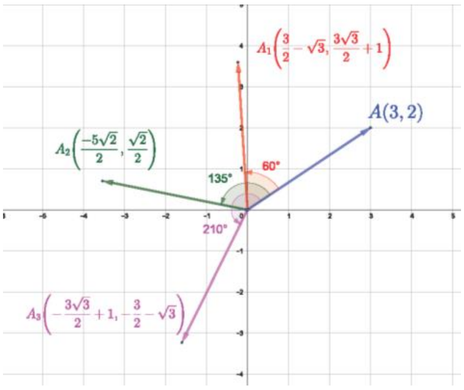
$$z=-1+i$$

Las soluciones no son conjugadas, porque la ecuación tiene coeficientes complejos. Las ecuaciones que tienen sólo soluciones complejas conjugadas o soluciones reales deben tener necesariamente coeficientes reales.

5 Aplicaciones del producto de complejos

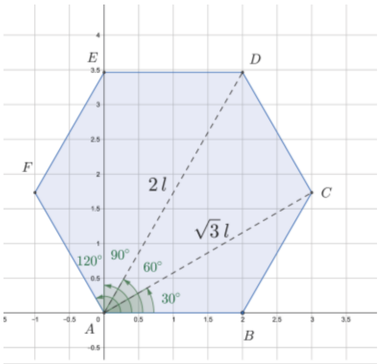
34. Giro de un punto. Determina las coordenadas de los puntos que se obtienen al girar alrededor del origen el punto $A(3,2)$ un ángulo de 60°, uno de 135° y otro de 210°.

$$A_1\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}+1\right);\ A_2\left(\frac{-5\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ A_3\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+1,-\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)$$



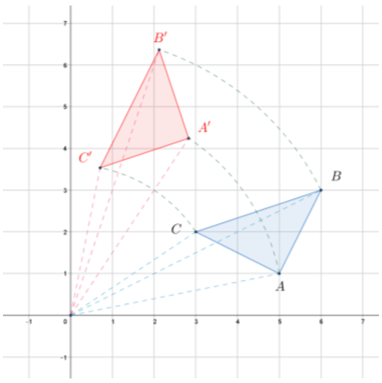
35. Vértices de un hexágono. Un hexágono regular cuyos vértices tienen todos abscisas no negativas tiene dos de sus vértices consecutivos en los puntos $A\ (0,0)$ y B (2,0). Las relaciones de las diagonales del hexágono con el lado del mismo son $d_1=\sqrt{3}l$ y $d_2=2l$. Halla los otros cuatro vértices.

$$C\left(3,\sqrt{3}\right);D\left(2,2\sqrt{3}\right);E\left(0,2\sqrt{3}\right);F\left(-1,\sqrt{3}\right)$$



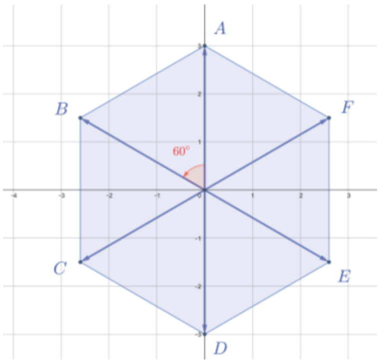
36. Giro de un triángulo. Los vértices del triángulo *ABC* son los puntos $A(5,1)$, $B(6,3)$ y $C(3,2)$ Halla las coordenadas de los vértices del triángulo A'B'C' obtenido al girar el *ABC* 45° alrededor del origen.

$$A'\left(2\sqrt{2},3\sqrt{2}\right);\ B'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{9\sqrt{2}}{2}\right);C'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$



37. Un hexágono regular centrado en el origen tiene uno de sus vértices en el punto $A(0,3)$ Calcula los otros cinco.

$$B\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right);\ C\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2},\frac{-3}{2}\right);\ D(0,-3);\ E\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{-3}{2}\right);F\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$$



38. Demuestra que los vectores $\vec{u}=(a,b)$ y $\vec{v}=(-b,a)$ son perpendiculares usando el producto de números complejos.

El vector $\vec{u}=(a,b)$ corresponde al complejo $z_u=a+bi$. Girando éste un ángulo de 90º obtenemos un vector perpendicular. Para girarlo multiplicamos por el complejo $1_{90°}$:

$$z_v=z_u\cdot 1_{90°}=(a+bi)\cdot i=-b+ai\Rightarrow \vec{v}=(-b,a)$$

Actividades finales

Números imaginarios y números complejos

39. Resuelve las siguientes ecuaciones en el campo complejo:

a) $x^2+16=0$ b) $x^2-4x+20=0$ c) $x^4+7x^2-144=0$ d) $x^3+1=0$.

a) $x^2+16=0 \rightarrow \begin{cases} x=4i \\ x=-4i \end{cases}$

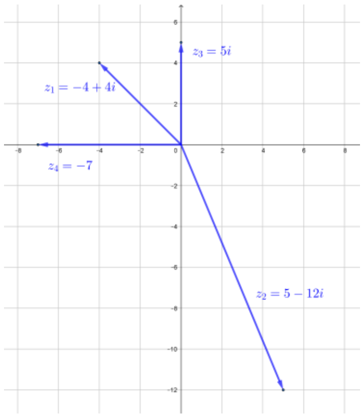
b) $x^2-4x+20=0 \rightarrow \begin{cases} x=2+4i \\ x=2-4i \end{cases}$

c) $x^4+7x^2-144=0 \rightarrow \begin{cases} x^2=9\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \\ x^2=-16\Rightarrow \begin{cases} x=4i \\ x=-4i \end{cases} \end{cases}$

d) $x^3+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \end{cases}$

40. Representa los afijos de los siguientes números complejos y calcula su módulo y su argumento principal:

a) $z_1=-4+4i$ b) $z_2=5-12i$ c) $z_3=5i$ d) $z_4=-7$



a) $z_1=-4+4i \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2} \\ \alpha=180^\circ-arctg\left(\dfrac{4}{4}\right)=180^\circ-45^\circ=135^\circ \end{cases} \Rightarrow z_1=4\sqrt{2}_{135^\circ}$

b) $z_2=5-12i \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=13 \\ \alpha=360^\circ-arctg\left(\dfrac{12}{5}\right)=292^\circ 37' \end{cases} \Rightarrow z_2=13_{292^\circ 37'}$

c) $z_3=5i=5_{90^\circ}$

d) $z_4=-7=7_{180^\circ}$

41. Escribe los siguientes números complejos en forma cartesiana y en forma polar, y representa sus afijos:

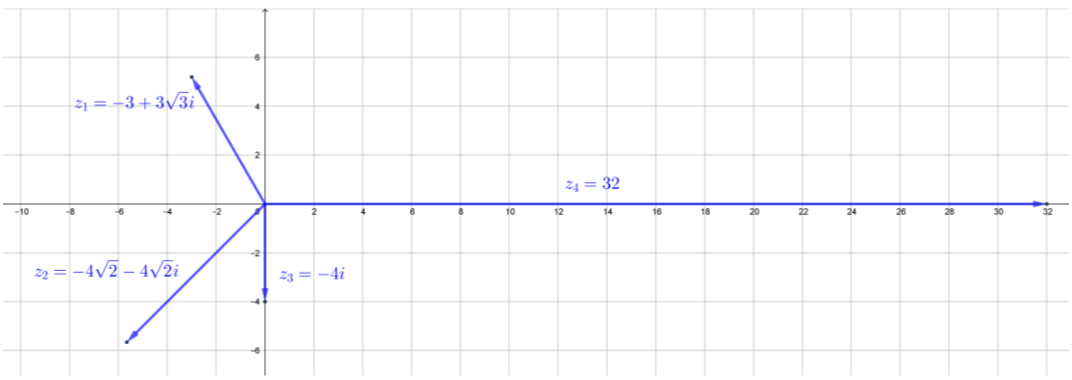
a) $z_1=-3+3\sqrt{3}i$ b) $z_2=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$ c) $z_3=-4i$ d) $z_4=32$

a) $z_1=-3+3\sqrt{3}i=\left(-3,3\sqrt{3}\right)=6_{120^\circ}$

b) $z_2=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i=\left(-4\sqrt{2},-4\sqrt{2}\right)=8_{225^\circ}$

c) $z_3=-4i=(0,-4)=4_{270^\circ}$

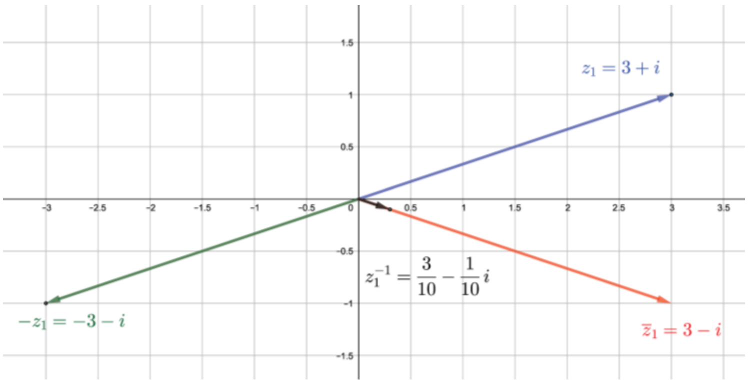
d) $z_4=32=(32,0)=32_{0^\circ}$

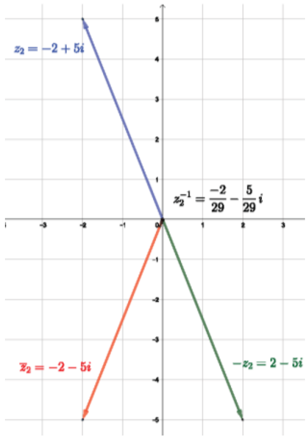


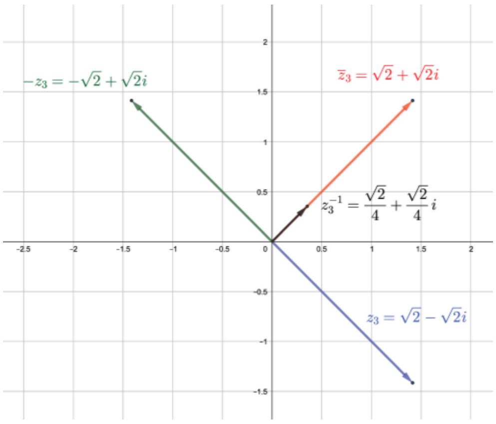
42. Completa la siguiente tabla:

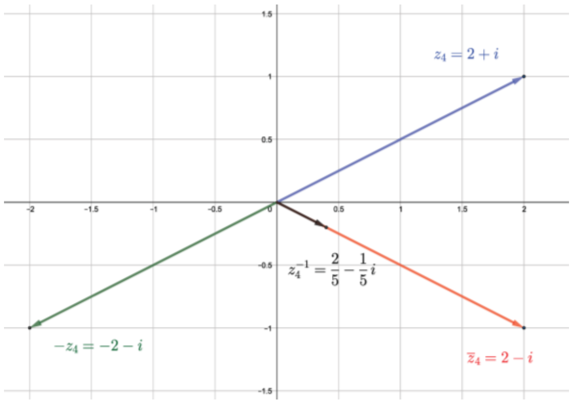
z	$-z$ (opuesto)	$\overline{z}$ (conjugado)	z^{-1} (inverso)
$3+i$	$-3-i$	$3-i$	$\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$
$-2+5i$	$2-5i$	$-2-5i$	$\frac{-2}{29}-\frac{5}{29}i$
$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	$-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i$
$2+i$	$-2-i$	$2-i$	$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

43. Representa en el plano complejo todos los números del ejercicio anterior. ¿Qué relaciones geométricas se aprecian entre los vectores que representan a los complejos correspondientes?









44. Representa gráficamente los siguientes complejos y escribe su forma polar y su forma trigonométrica:

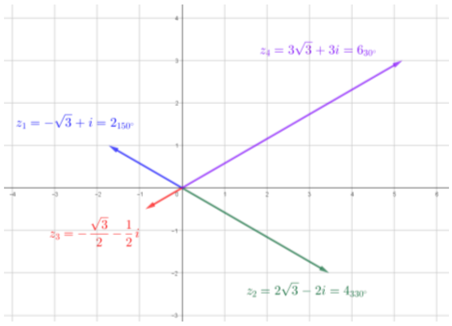
a) $z_1 = -\sqrt{3} + i$ b) $z_2 = -2\left(-\sqrt{3} + i\right)$ c) $z_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} - i\right)$ d) $z_4 = -3\left(-\sqrt{3} - i\right)$

a) $z_1 = -\sqrt{3} + i = 2_{150^\circ} = 2\left(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ\right)$

b) $z_2 = -2\left(-\sqrt{3} + i\right) = -2z_1 = 4_{330^\circ} = 2\left(\cos 330^\circ + \mathrm{i} \operatorname{sen} 330^\circ\right)$

c) $z_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} - i\right) = \frac{1}{2}\overline{z}_1 = \frac{1}{2}2_{210^\circ} = 1_{210^\circ} = \cos 210^\circ + \mathrm{i} \operatorname{sen} 210^\circ$

d) $z_4 = -3\left(-\sqrt{3} - i\right) = -3\overline{z}_1 = 3_{180^\circ}2_{210^\circ} = 6_{390^\circ} = 6_{30^\circ} = 6\left(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ\right)$



45. Representa estos números en el plano complejo y escríbelos en forma polar y trigonométrica:

a) $z_1 = -\sqrt{3}$ b) $z_2 = 4$ c) $z_3 = -\sqrt{3}i$

d) $z_4 = 4i$ e) $z_5 = -1 - i$ f) $z_6 = -5 + 12i$

g) $z_7 = 4 - 3i$ h) $z_8 = 1{,}6 + 2{,}7i$ i) $z_9 = -2\sqrt{3} - 2i$

a) $z_1 = -\sqrt{3} = \sqrt{3}_{180^\circ} = \sqrt{3}\left(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ\right)$

b) $z_2 = 4 = 4_{0^\circ} = 4\left(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ\right)$

c) $z_3 = -\sqrt{3}i = \sqrt{3}_{270^\circ} = \sqrt{3}\left(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ\right)$

d) $z_4 = 4\mathrm{i} = 4_{90^\circ} = 4\left(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ\right)$

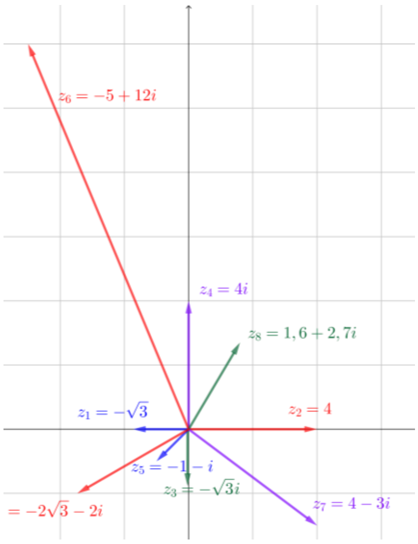
e) $z_5 = -1 - i = \sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2}\left(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ\right)$

f) $z_6 = -5 + 12i = 13_{112^\circ 37'} = 13\left(\cos 112^\circ 37' + i \operatorname{sen} 112^\circ 37'\right)$

g) $z_7 = 4 - 3i = 5_{323^\circ 8'} = 5\left(\cos 323^\circ 8' + i \operatorname{sen} 323^\circ 8'\right)$

h) $z_8 = 1{,}6 + 2{,}7i = 3{,}13847_{59^\circ 21'} = 3{,}13847\left(\cos 59^\circ 21' + i \operatorname{sen} 59^\circ 21'\right)$

i) $z_9 = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210^\circ} = 4\left(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ\right)$



Operaciones en forma binómica

46. Dados los complejos $z_1=-4+2i$ y $z_2=5-2i$, calcula:

a) $(z_1-z_2)^2$ b) $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ c) $\overline{z_1}\cdot(-z_2)$ d) $\dfrac{z_1\cdot z_2}{\overline{z_1\cdot z_2}}$

a) $(z_1-z_2)^2=65-72i$

b) $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=\dfrac{-9}{97}-\dfrac{4}{97}i$

c) $\overline{z_1}\cdot(-z_2)=24+2i$

d) $\dfrac{z_1\cdot z_2}{\overline{z_1\cdot z_2}}=\dfrac{-17}{145}-\dfrac{144}{145}i$

47. Halla en cada caso el valor de k para que el resultado de la operación correspondiente sea un número imaginario puro:

a) $(2k-3i)(2-i)$ b) $\dfrac{3-2ki}{k+i}$ c) $(2+ki)^2$ d) $(2+ki)^3$

a) $k=\dfrac{3}{4}$

b) $k=0$

c) $\begin{cases} k=2 \\ k=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} k=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

48. Calcula los números x e y de modo que se verifique la igualdad $\dfrac{3-xi}{1+2i}=y+2i$

x = -16; y = 7

49. Calcula a y b para que sea cierta la igualdad $\dfrac{a-3i}{4+bi}=-1+i$

$\begin{cases} a=-11 \\ b=7 \end{cases}$

50. Halla k, si es posible, para que $(2-ki)^2$:

a) Sea un número real

b) Sea imaginario puro

c) Tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante.

a) $k = 0$

b) $\begin{cases} k=2 \\ k=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} k=2-2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} Re>0 \\ Im>0 \end{cases} \Rightarrow I\ cuad. \\ k=2+2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} Re<0 \\ Im<0 \end{cases} \Rightarrow III\ cuad. \end{cases}$

51. Halla en cada caso el valor o valores de k para que el resultado de la correspondiente operación sea un número real:

a) $(2-3i)\cdot(k+4i)$ b) $\dfrac{4-ki}{k-i}$ c) $(k-i)^3$

a) $(2-3i)\cdot(k+4i) \Rightarrow k=\dfrac{8}{3}$

b) $\dfrac{4-ki}{k-i} \Rightarrow \begin{cases} k=-2 \\ k=2 \end{cases}$

c) $(k-i)^3 \Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ k=\dfrac{-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

52. Halla en cada caso los complejos z que verifican la ecuación

a) $z+\dfrac{1}{z}=1$ b) $z-\dfrac{1}{z}=i$

a) $z+\dfrac{1}{z}=1 \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{60^\circ} \\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{300^\circ} \end{cases}$

b) $z-\dfrac{1}{z}=i \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=1_{30^\circ} \\ z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=1_{150^\circ} \end{cases}$

53. Calcula las potencias indicadas de i y efectúa el cociente: $z=\dfrac{i^{37}-2i^{-146}}{2i^{-9}+\dfrac{3}{i^{12}}}$

$$z=\frac{i-2(-1)}{2(-i)+\dfrac{3}{1}}=\frac{4}{13}+\frac{7}{13}i$$

54. Calcula estas potencias de números complejos en forma binómica aplicando el desarrollo del binomio de Newton:

a) $(1+i)^4$ b) $(2-3i)^3$ c) $\left(\dfrac{13i}{2-3i}\right)^3$ d) $(-1+i)^6$

a) $(1+i)^4=-4$

b) $(2-3i)^3=-46-9i$

c) $\left(\dfrac{13i}{2-3i}\right)^3=9+46i$

d) $(-1+i)^6=8i$

55. Comprueba que los números complejos $z=2+3i$ y su conjugado son solución de la ecuación polinómica $x^3-3x^2+9x+13=0$. Determina la tercera solución de la ecuación.

La tercera solución de la ecuación es:

$x^3-3x^2+9x+13 \Rightarrow r=-1$

56. Halla las siguientes raíces cuadradas de números complejos operando en forma binómica:

a) $\sqrt{3+4i}$ b) $\sqrt{-3-4i}$ c) $\sqrt{-7+24i}$ d) $\sqrt{-5-12i}$

a) Hay dos soluciones: $2+i$ y $-2-i$

b) $\sqrt{-3-4i}=\begin{cases}(2+i)i=-1+2i \\ (-2-i)i=1-2i\end{cases}$

c) Hay dos soluciones: $3+4i$ y $-3-4i$

d) Hay dos soluciones: $2-3i$ y $-2+3i$.

57. La suma de dos números complejos es $5+i$, y su cociente es imaginario puro. Hállalos sabiendo que la parte real del segundo vale 3.

Hay dos soluciones: $\begin{cases} z_1 = 2+3i \text{ y } z_2 = 3-2i \\ z_1 = 2-2i \text{ y } z_2 = 3+3i \end{cases}$

58. La suma de dos números complejos es $5+5i$ y su cociente es un número real. Calcúlalos sabiendo que la parte real del primero es 2.

La solución es $z_1 = 2+2i \text{ y } z_2 = 3+3i$

59. Halla todos los números complejos cuyo cuadrado coincide con su conjugado.

- Con $a = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ b = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

- Con $b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow z = 0+0i = 0 \\ a = 1 \Rightarrow z = 1+0i = 1 \end{cases}$

60. La suma de dos números es 10 y su producto es 29. Calcúlalos.

Los dos números son $5+2i$ y $5-2i$.

61. Las raíces de una ecuación polinómica de cuarto grado con coeficientes reales son $2,\ -1,\ 2-3i$, y $2+3i$. Escribe la ecuación en forma factorizada y en forma desarrollada.

La ecuación es:

$$(x-2)(x+1)(x-2+3i)(x-2-3i)=0 \text{ (factorizada)}$$

Operando, tenemos:

$$x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 5x - 26 = 0 \text{ (desarrollada).}$$

62. Halla la ecuación de cuarto grado cuyas soluciones son $1, i, -1$ y $-i$.

La ecuación es: $x^4 - 1 = 0$

Operaciones en forma polar

63. Si $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}i$ y $z_2 = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$, escríbelos en forma polar y calcula su producto y su cociente.

$$z_1 = 6_{120°}$$

$$z_2 = 8_{225°}$$

$$z_1 z_2 = (6_{120°})(8_{225°}) = 48_{345°} = \left(12\sqrt{6} + 12\sqrt{2}\right) + \left(-12\sqrt{6} + 12\sqrt{2}\right)i$$

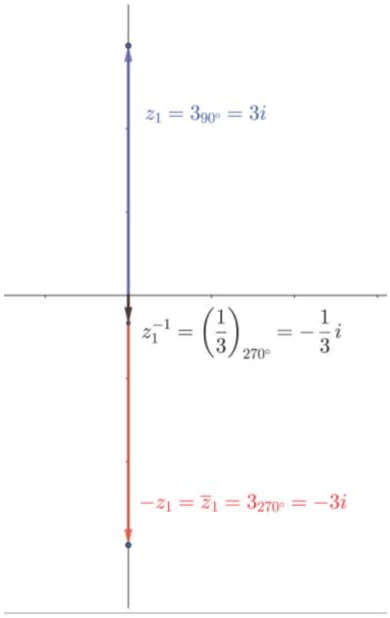
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6_{120°}}{8_{225°}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{-105°} = \left(\frac{3}{4}\right)_{255°} = \frac{-3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{16} - \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{16}i$$

64. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

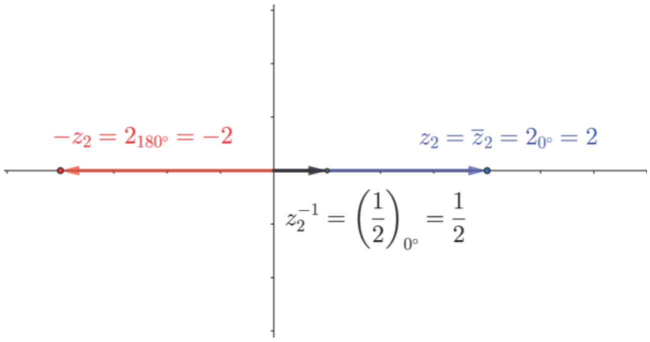
z	$-z$ (opuesto)	$\bar{z}$ (conjugado)	z^{-1} (inverso)
$3_{90°}$	$3_{270°}$	$3_{270°}$	$\left(\frac{1}{3}\right)_{270°}$
2_0	2_π	2_0	$\left(\frac{1}{2}\right)_0$
$\sqrt{2}_{60°}$	$\sqrt{2}_{240°}$	$\sqrt{2}_{300°}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{300°}$
$2_{\frac{2\pi}{3}}$	$2_{\frac{5\pi}{3}}$	$2_{\frac{4\pi}{3}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)_{\frac{4\pi}{3}}$

65. Representa todos los números del ejercicio 64 en el plano complejo, y escríbelos en su forma binómica.

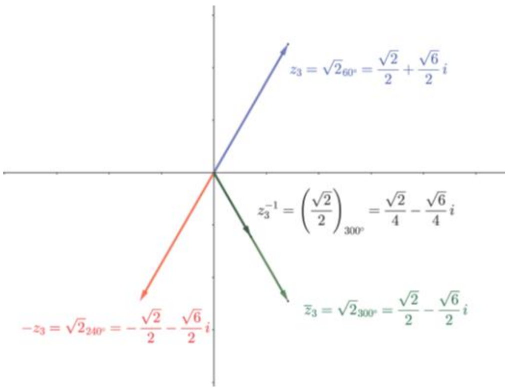
a)



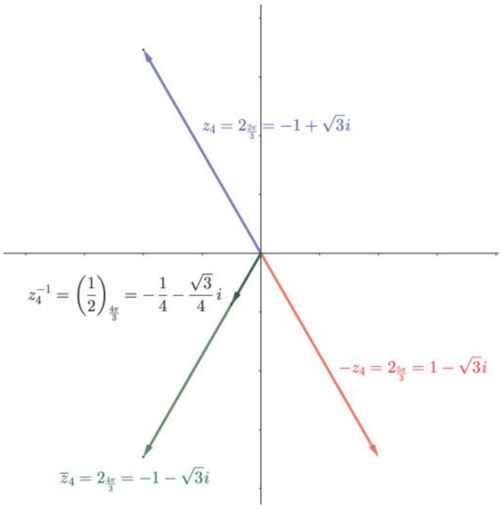
b)



c)



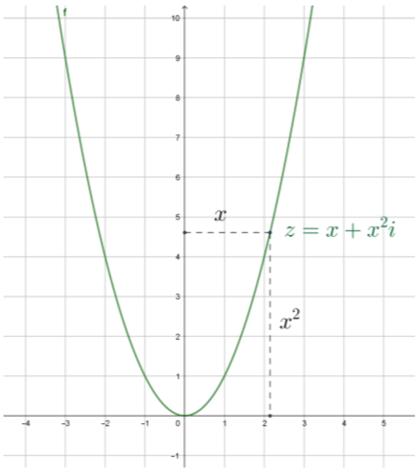
d)



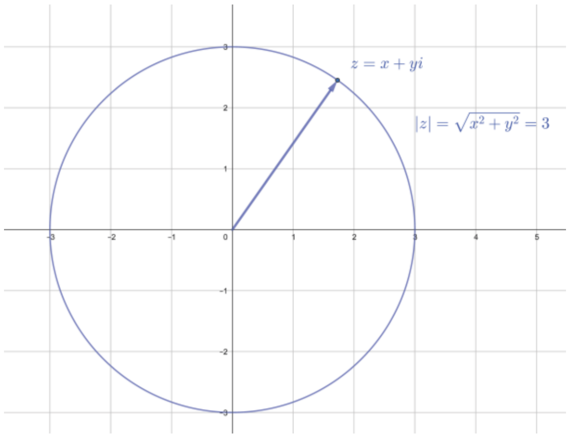
66. Representa en el plano complejo los afijos de todos los complejos que verifican las siguientes expresiones:

a) $z = x + x^2 i\ ,\ x \in R$ b) $|z| = 3$ c) $z = x + \frac{1}{x}i,\ x \in R - \{0\}$ d) $\alpha(z) = \frac{\pi}{4}$

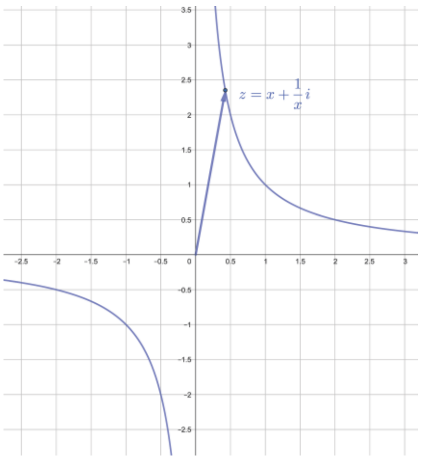
a) Se trata de la parábola de ecuación $y = x^2$



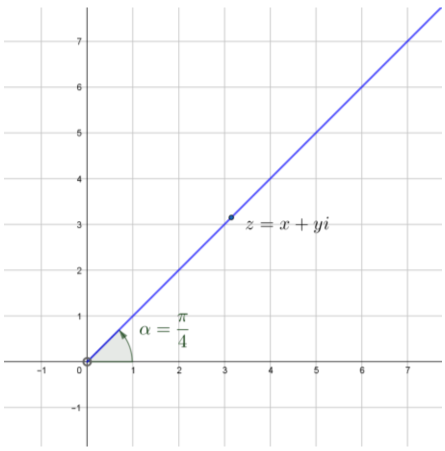
b) Es la circunferencia con centro en el origen y radio 3.



c) Es la hipérbola de ecuación $y = \frac{1}{x}$



d) Es la semirrecta $y = x$ con $x > 0$



67. Efectúa las siguientes sumas y restas de números complejos, expresando el resultado en forma polar:

a) $3_{30^\circ}+3_{150^\circ}$ b) $2_{60^\circ}+4_{210^\circ}$ c) $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{8}_{\frac{7\pi}{4}}$ d) $3_{\frac{\pi}{2}}-5_{\pi}$

a) $3_{30^\circ}+3_{150^\circ}=3_{90^\circ}$

b) $2_{60^\circ}+4_{210^\circ}=2,48_{186^\circ 12'}$

c) $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{8}_{\frac{7\pi}{4}}=\sqrt{10}_{1,8925}$

d) $3_{\frac{\pi}{2}}-5_{\pi}=\sqrt{34}_{0,54042}$

68. Efectúa los siguientes productos expresando el resultado en todas las formas posibles:

a) $2_{30^\circ}\cdot 3_{120^\circ}$ b) $3_{210^\circ}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)_{90^\circ}$ c) $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{12}}\cdot\sqrt{3}_{\frac{7\pi}{12}}$

a) $2_{30^\circ}\cdot 3_{120^\circ}=6e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) $3_{210^\circ}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)_{90^\circ}=4e^{i\frac{5\pi}{3}}$

c) $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{12}}\cdot\sqrt{3}_{\frac{7\pi}{12}}=\sqrt{6}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

69. Efectúa los siguientes cocientes:

a) $\dfrac{2_{30^\circ}}{3_{120^\circ}}$ b) $\dfrac{3_{210^\circ}}{\left(\frac{4}{3}\right)_{90^\circ}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}_{\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{3}_{\frac{7\pi}{12}}}$ d) $\dfrac{1_{\pi}\cdot 5_{\frac{2\pi}{3}}}{\left(\frac{1}{5}\right)_{-\frac{5\pi}{3}}}$

a) $\dfrac{2_{30^\circ}}{3_{120^\circ}}=-\dfrac{2}{3}i$

b) $\dfrac{3_{210^\circ}}{\left(\frac{4}{3}\right)_{90^\circ}}=\dfrac{-9}{8}+\dfrac{9\sqrt{3}}{8}i$

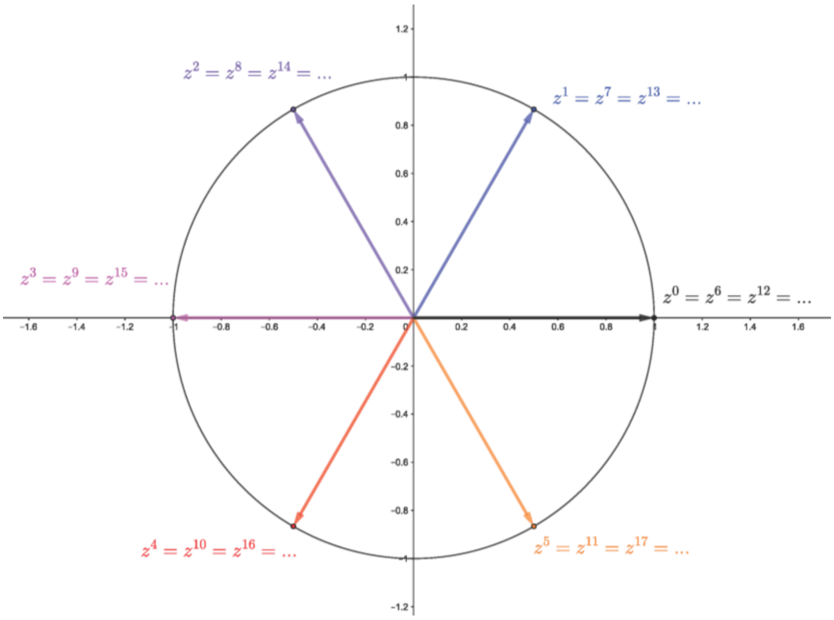
c) $\dfrac{\sqrt{2}_{\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{3}_{\frac{7\pi}{12}}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$

d) $\dfrac{1_{\pi}\cdot 5_{\frac{2\pi}{3}}}{\left(\frac{1}{5}\right)_{-\frac{5\pi}{3}}}=-\dfrac{25}{2}-\dfrac{25\sqrt{3}}{2}i$

70. Calcula las seis primeras potencias en forma polar del complejo $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y represéntalas gráficamente. ¿Qué trayectoria siguen los afijos de los resultados obtenidos? ¿Podrías decir qué complejo corresponde a z^{50}?

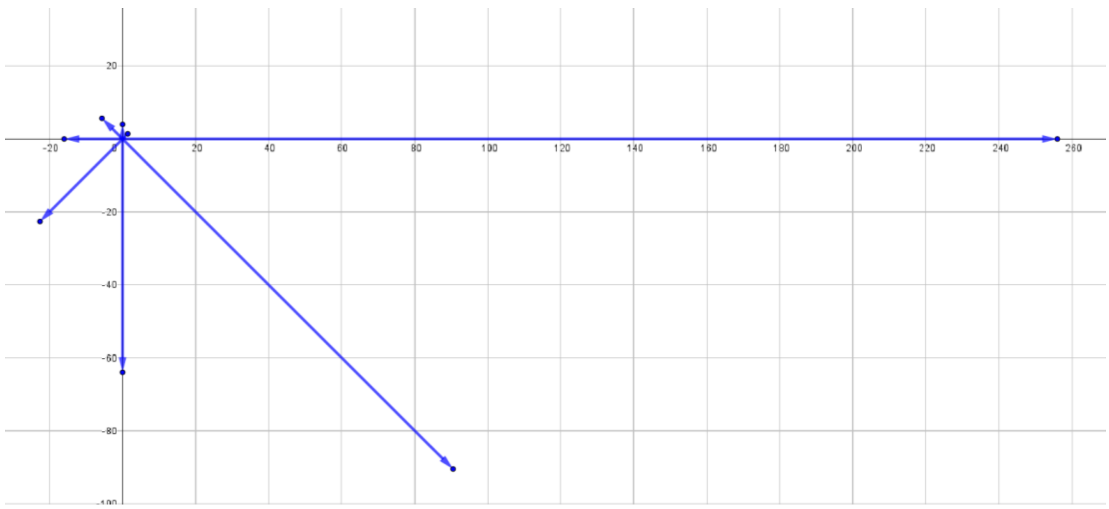
z	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6	z^7	z^8	…	z^n
$1_{\frac{\pi}{3}}$	$1_{\frac{2\pi}{3}}$	$1_{\frac{3\pi}{3}}$	$1_{\frac{4\pi}{3}}$	$1_{\frac{5\pi}{3}}$	$1_{\frac{6\pi}{3}}$	$1_{\frac{7\pi}{3}}$	$1_{\frac{8\pi}{3}}$	…	$1_{\frac{n\pi}{3}}$
$1_{\frac{\pi}{3}}$	$1_{\frac{2\pi}{3}}$	1_{π}	$1_{\frac{4\pi}{3}}$	$1_{\frac{5\pi}{3}}$	1_{0}	$1_{\frac{\pi}{3}}$	$1_{\frac{2\pi}{3}}$	…	

$z^{50}=1_{\frac{2\pi}{3}}$



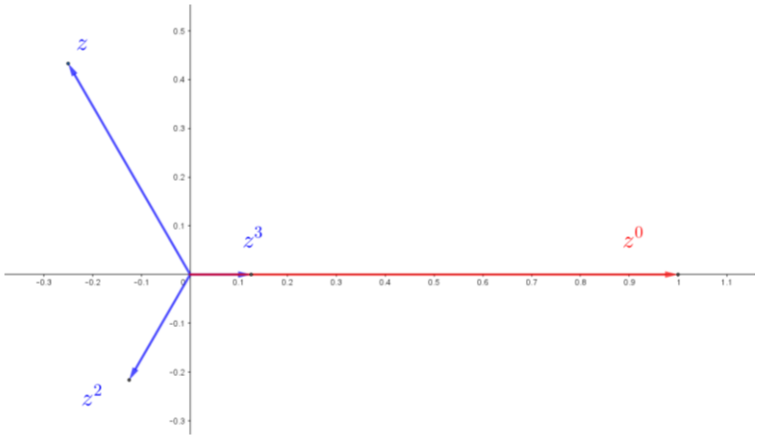
71. Calcula las ocho primeras potencias en forma polar del complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, y represéntalas gráficamente. ¿Qué trayectoria describen los afijos de las soluciones?

z	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6	z^7	z^8	…	z^n
$2_{\frac{\pi}{4}}$	$4_{\frac{\pi}{2}}$	$8_{\frac{3\pi}{4}}$	16_{π}	$32_{\frac{5\pi}{4}}$	$64_{\frac{3\pi}{2}}$	$128_{\frac{7\pi}{4}}$	$256_{2\pi}$	…	$\left(2^n\right)_{\frac{n\pi}{4}}$



72. Calcula las tres primeras potencias en forma polar del complejo $z = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$, y represéntalas gráficamente. ¿Qué trayectoria describen los afijos de las soluciones?

z	z^2	z^3	z^4	z^5	…	z^n
$\left(\frac{1}{2}\right)_{\frac{2\pi}{3}}$	$\left(\frac{1}{4}\right)_{\frac{4\pi}{3}}$	$\left(\frac{1}{8}\right)_{2\pi}$	$\left(\frac{1}{16}\right)_{\frac{2\pi}{3}}$	$\left(\frac{1}{32}\right)_{\frac{4\pi}{3}}$	…	$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{\frac{2\pi n}{3}}$



73. ¿Qué diferencias hay entre las trayectorias de los ejercicios 70, 71 y 72?

La diferencia está en el módulo del complejo inicial.

Si es mayor que 1, los afijos de las sucesivas potencias describen una trayectoria divergente (Ej. 71).

Si el módulo es 1, los afijos "quedan atrapados" en la circunferencia de radio 1 (Ej. 70).

Pero si el módulo es menor que 1, la trayectoria converge hacia el origen (Ej. 72)

74. Aplicando la fórmula de De Moivre calcula las potencias indicadas, expresando el resultado en las formas trigonométrica y binómica:

a) $(-1+i)^{10}$ b) $(\sqrt{3}-i)^{7}$ c) $(\sqrt[3]{3}_{25°})^{6}$ d) $\left[\sqrt[4]{2}(\cos 15° + i\operatorname{sen} 15°)\right]^{8}$

a) $(-1+i)^{10} = 32(\cos 270° + i\operatorname{sen} 270°) = -32i$

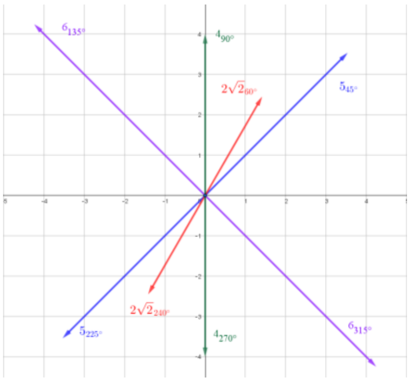
b) $(\sqrt{3}-i)^{7} = 32(\cos 150° + i\ \operatorname{sen} 150°) = 128\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -64\sqrt{3}+64i$

c) $(\sqrt[3]{3}_{25°})^{6} = 9(\cos 150° + i\ \operatorname{sen} 150°) = 9\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{-9\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}i$

d) $\left[\sqrt[4]{2}(\cos 15° + i\operatorname{sen} 15°)\right]^{8} = 2^{2}(\cos 120° + i\operatorname{sen} 120°) = 4\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2+2\sqrt{3}i$

75. Operando en forma polar calcula y representa los afijos de las raíces cuadradas de los siguientes números complejos:

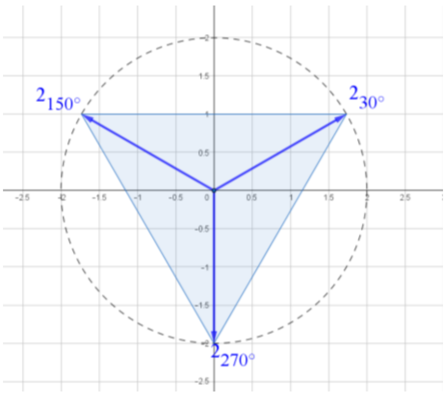
a) $z = 25i$ b) $z = -4 + 4\sqrt{3}i$ c) $z = -36i$ d) $z = -16$



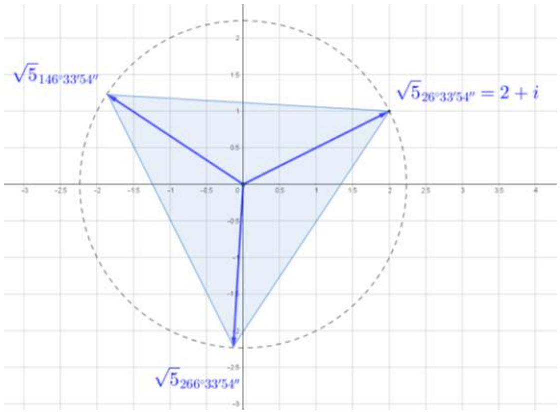
76. Calcula y representa los afijos de las raíces cúbicas de los siguientes números complejos:

a) $z = 8i$ b) $z = 2 + 11i$ c) $z = -27$ d) $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

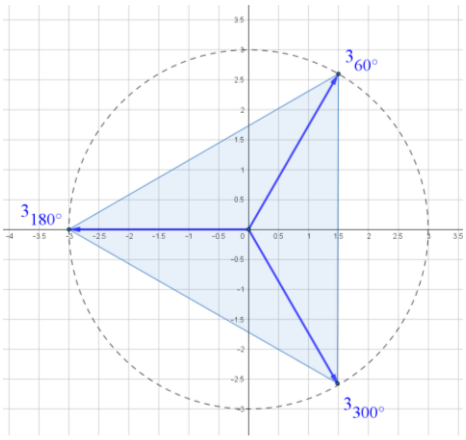
a)



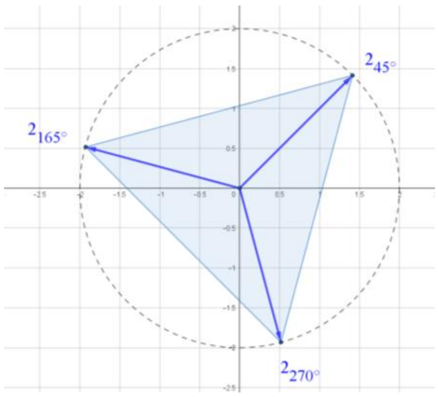
b)



c)



d)



77. Calcula y representa los afijos de las raíces cuartas de los siguientes números:

a) $z=-16$ b) $z=9(\cos 300^\circ + i\operatorname{sen}300^\circ)$ c) $z=-8-8\sqrt{3}i$ d) $z=625$

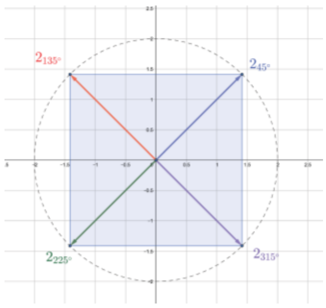
a) $z=-16=16_{180^\circ} \Rightarrow \sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{16_{180^\circ}}=\left(\sqrt[4]{16}\right)_{45^\circ+90^\circ k}\ (k=0,1,2,3)$

$k=0 \Rightarrow 2_{45^\circ}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$;

$k=1 \Rightarrow 2_{135^\circ}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$;

$k=2 \Rightarrow 2_{225^\circ}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$;

$k=3 \Rightarrow 2_{315^\circ}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$



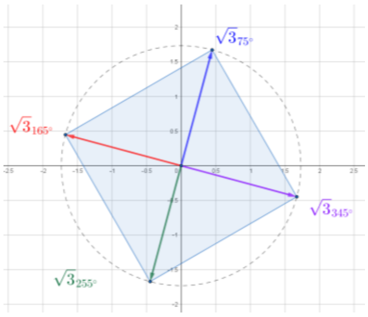
b) $z=9(\cos 300^\circ + i\operatorname{sen}300^\circ) \Rightarrow \sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{9_{300^\circ}}=\left(\sqrt{3}\right)_{75^\circ+90^\circ k}\ (k=0,1,2,3)$

$k=0 \Rightarrow \sqrt{3}_{75^\circ}$;

$k=1 \Rightarrow \sqrt{3}_{165^\circ}$;

$k=2 \Rightarrow \sqrt{3}_{255^\circ}$;

$k=3 \Rightarrow \sqrt{3}_{345^\circ}$



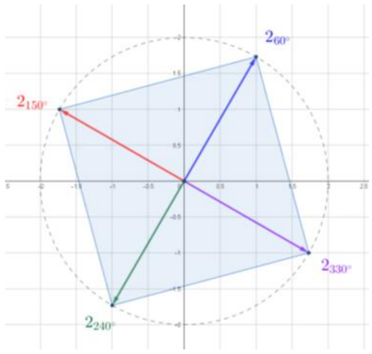
c) $z=-8-8\sqrt{3}i=16_{240^\circ} \Rightarrow \sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{16_{240^\circ}}=\left(\sqrt[4]{16}\right)_{60^\circ+90^\circ k}\ (k=0,1,2,3)$

$k=0 \Rightarrow 2_{60^\circ}=1+\sqrt{3}i$;

$k=1 \Rightarrow 2_{150^\circ}=-\sqrt{3}+i$;

$k=2 \Rightarrow 2_{240^\circ}=-1-\sqrt{3}i$;

$k=3 \Rightarrow 2_{330^\circ}=\sqrt{3}-i$



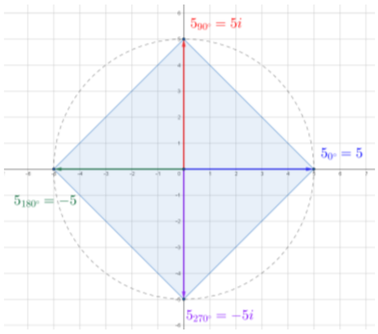
d) $z = 625 = 625_{0°} \Rightarrow \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{625_{0°}} = \left(\sqrt[4]{625}\right)_{0°+90°k} \; (k = 0, 1, 2, 3)$

$k = 0 \Rightarrow 5_{0°} = 5$;

$k = 1 \Rightarrow 5_{90°} = 5i$;

$k = 2 \Rightarrow 5_{180°} = -5$;

$k = 3 \Rightarrow 5_{270°} = -5i$



78. Calcula y representa los afijos de las raíces quintas de los siguientes números complejos:

a) $z = 32_{\frac{5\pi}{6}}$ b) $z = -128 - 128i$ c) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ d) $z = 32$

a) $z = 32_{\frac{5\pi}{6}} \Rightarrow \sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{6}}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)_{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}k} \; (k = 0, 1, 2, 3, 4)$

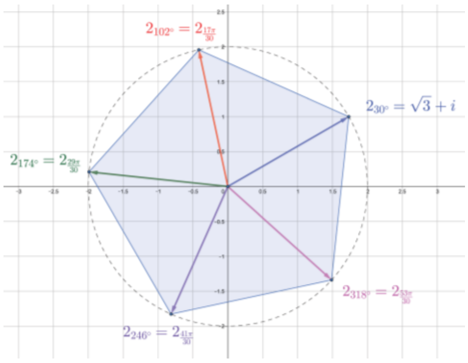
$k = 0 \Rightarrow 2_{\frac{\pi}{6}} = 1 + \sqrt{3}i$;

$k = 1 \Rightarrow 2_{\frac{17\pi}{30}}$;

$k = 2 \Rightarrow 2_{\frac{29\pi}{30}}$;

$k = 3 \Rightarrow 2_{\frac{41\pi}{30}}$;

$k = 4 \Rightarrow 2_{\frac{53\pi}{30}}$



b) $z = -128 - 128i = \left(128\sqrt{2}\right)_{225°} \Rightarrow \sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{\left(2^{\frac{15}{2}}\right)_{225°}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)_{45°+72°k} \; (k = 0, 1, 2, 3, 4)$

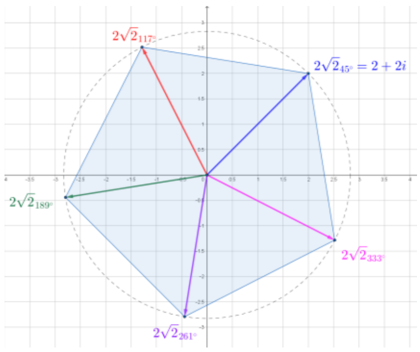
$k = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}_{45°} = 2 + 2i$;

$k = 1 \Rightarrow 2\sqrt{2}_{117°}$;

$k = 2 \Rightarrow 2\sqrt{2}_{189°}$;

$k = 3 \Rightarrow 2\sqrt{2}_{261°}$;

$k = 4 \Rightarrow 2\sqrt{2}_{333°}$



c) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1_{300^\circ}\Rightarrow\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{1_{300^\circ}}=1_{60^\circ+72^\circ k}\;(k=0,1,2,3,4)$

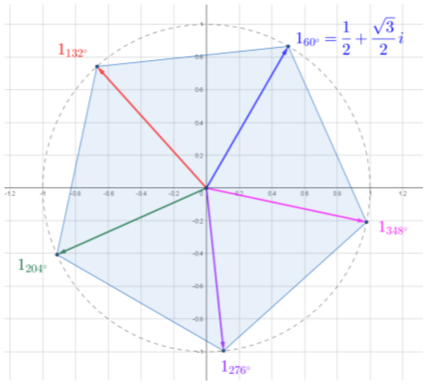
$k=0\Rightarrow 1_{60^\circ}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$k=1\Rightarrow 1_{132^\circ}$;

$k=2\Rightarrow 1_{204^\circ}$;

$k=3\Rightarrow 1_{276^\circ}$;

$k=4\Rightarrow 1_{348^\circ}$



d) $z=32=32_{0^\circ}\Rightarrow\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{32_{0^\circ}}=\left(\sqrt[5]{32}\right)_{0^\circ+72^\circ k}\;(k=0,1,2,3,4)$

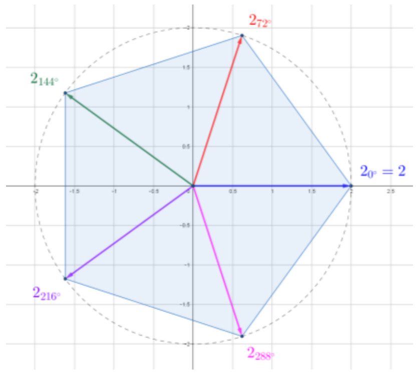
$k=0\Rightarrow 2_{0^\circ}$;

$k=1\Rightarrow 2_{72^\circ}$;

$k=2\Rightarrow 2_{144^\circ}$;

$k=3\Rightarrow 2_{216^\circ}$;

$k=4\Rightarrow 2_{288^\circ}$



79. Calcula y representa los afijos de las raíces sextas de los siguientes números complejos:

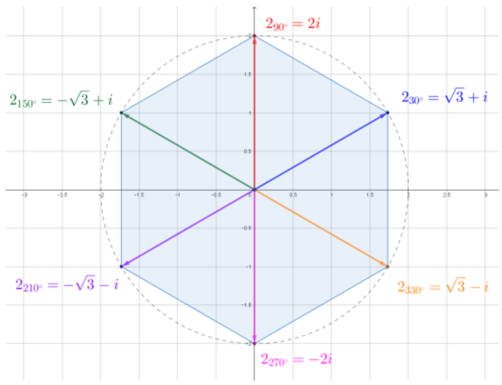
a) $z=64_\pi$ b) $z=27$ c) $z=64i$ d) $z=27_{\frac{3\pi}{2}}$

a) $z=64_\pi\Rightarrow\sqrt[6]{z}=\sqrt[6]{64_\pi}=\left(\sqrt[6]{64}\right)_{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k}\;(k=0,1,2,3,4,5)$

$k=0\Rightarrow 2_{\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}+i$ $k=3\Rightarrow 2_{\frac{7\pi}{6}}=-\sqrt{3}-i$

$k=1\Rightarrow 2_{\frac{\pi}{2}}=2i$ $k=4\Rightarrow 2_{\frac{3\pi}{2}}=-2i$

$k=2\Rightarrow 2_{\frac{5\pi}{6}}=-\sqrt{3}+i$ $k=5\Rightarrow 2_{\frac{11\pi}{6}}=\sqrt{3}-i$

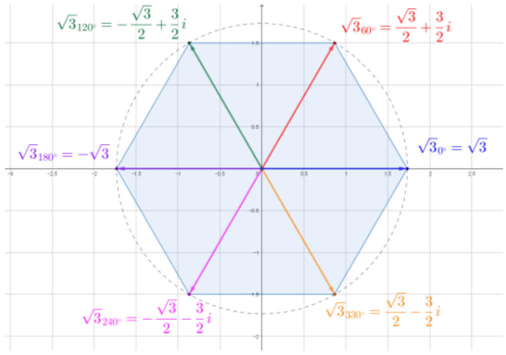


b) $z = 27 = 27_{0^\circ} \Rightarrow \sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{27_{0^\circ}} = \left(\sqrt[6]{27}\right)_{0^\circ+60^\circ k} \left(k = 0,1,2,3,4,5\right)$

$k = 0 \Rightarrow \sqrt{3}_{0^\circ} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $k = 3 \Rightarrow \sqrt{3}_{180^\circ} = -\sqrt{3}$

$k = 1 \Rightarrow \sqrt{3}_{60^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$ $\qquad$ $k = 4 \Rightarrow \sqrt{3}_{240^\circ} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$k = 2 \Rightarrow \sqrt{3}_{120^\circ} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$ $\qquad$ $k = 5 \Rightarrow \sqrt{3}_{300^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

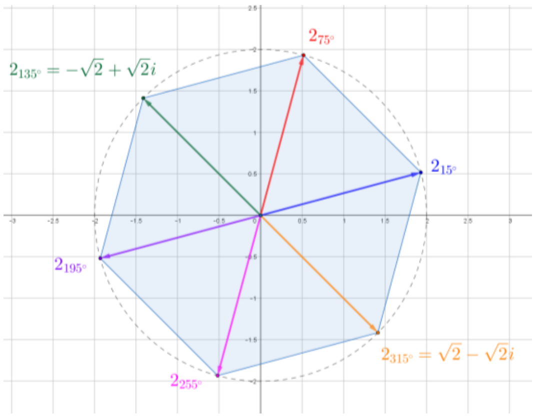


c) $z = 64i = 64_{90^\circ} \Rightarrow \sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{64_{90^\circ}} = \left(\sqrt[6]{64}\right)_{15^\circ+60^\circ k} \left(k = 0,1,2,3,4,5\right)$

$k = 0 \Rightarrow 2_{15^\circ}$ $\qquad$ $k = 3 \Rightarrow 2_{195^\circ}$

$k = 1 \Rightarrow 2_{75^\circ}$ $\qquad$ $k = 4 \Rightarrow 2_{255^\circ}$

$k = 2 \Rightarrow 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ $\qquad$ $k = 5 \Rightarrow 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

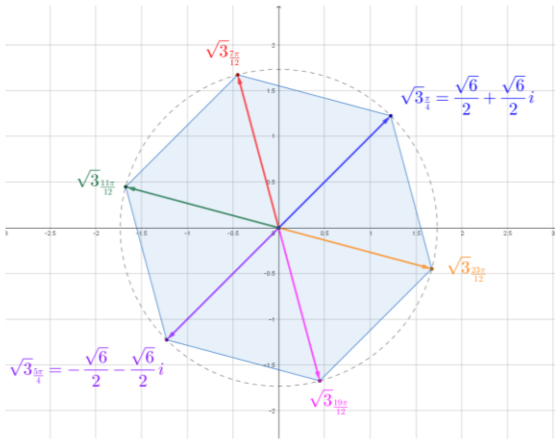


d) $z = 27_{\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{27_{\frac{3\pi}{2}}} = \left(\sqrt[6]{27}\right)_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}k} \left(k = 0,1,2,3,4,5\right)$

$k = 0 \Rightarrow \sqrt{3}_{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$ $\qquad$ $k = 3 \Rightarrow \sqrt{3}_{\frac{5\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

$k = 1 \Rightarrow \sqrt{3}_{\frac{7\pi}{12}}$ $\qquad$ $k = 4 \Rightarrow \sqrt{3}_{\frac{19\pi}{12}}$

$k = 2 \Rightarrow \sqrt{3}_{\frac{11\pi}{12}}$ $\qquad$ $k = 5 \Rightarrow \sqrt{3}_{\frac{23\pi}{12}}$



80. Una de las raíces cuartas de un número complejo, z es el número $w=-1+\sqrt{3}i$. Halla z y sus otras tres raíces cuartas.

Además de w, las otras tres raíces cuartas de z son:

$$w_2 = w \cdot 1_{90^\circ} = \left(-1+\sqrt{3}i\right)i = -\sqrt{3}-i$$

$$w_3 = w_2 \cdot 1_{90^\circ} = \left(-\sqrt{3}-i\right)i = 1-\sqrt{3}i$$

$$w_4 = w_3 \cdot 1_{90^\circ} = \left(1-\sqrt{3}i\right)i = \sqrt{3}+i$$

81. Una de las raíces enésimas de -1 es el número complejo $w=1_{36^\circ}$. Con estos datos, ¿se puede saber el valor de *n*? ¿Y el valor mínimo que puede tomar?

Suponiendo que *n* toma su valor mínimo, averigua el resto de raíces enésimas de -1.

Para $n=5$, las raíces quintas de -1 son $1_{36^\circ}, 1_{108^\circ}, 1_{180^\circ}, 1_{252^\circ}, 1_{324^\circ}$.

Ecuaciones con soluciones complejas

82. Escribe la ecuación de segundo grado cuyas soluciones son los siguientes pares de números:

a) $z_1 = 6+4i$ y $z_2 = 6-4i$

b) $z_1 = 2+\sqrt{3}i$ y $z_2 = 2-\sqrt{3}i$

c) $z_1 = -1+7i$ y $z_2 = -1-7i$

d) $z_1 = 4i$ y $z_2 = -4i$

a) $x^2-12x+52=0$

b) $x^2-4x+7=0$

c) $x^2+2x+50=0$

d) $x^2+16=0$

83. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-16x+68=0$ b) $x^4+14x^2+45=0$ c) $4x^2+4x+3=0$ d) $x^4+5x^2+4=0$

a) $x^2-16x+68=0 \Rightarrow \begin{cases} x=8+2i \\ x=8-2i \end{cases}$

b) $x^4+14x^2+45=0 = \begin{cases} x^2=-5 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{5}i \\ x=-\sqrt{5}i \end{cases} \\ x^2=-9 \Rightarrow \begin{cases} x=3i \\ x=-3i \end{cases} \end{cases}$

c) $4x^2+4x+3=0 = \begin{cases} x=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ x=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$

d) $x^4+5x^2+4=0 = \begin{cases} x^2=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=i \\ x=-i \end{cases} \\ x^2=-4 \Rightarrow \begin{cases} x=2i \\ x=-2i \end{cases} \end{cases}$

84. Resuelve las ecuaciones de tercer grado:

a) $x^3+8=0$ b) $x^3-4x^2+4x-16=0$ c) $x^3-27=0$ d) $x^3+4x^2+4x+3=0$

a) $x^3+8=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=2_{60°}=1+\sqrt{3}i \\ x_2=2_{180°}=-2 \\ x_3=2_{300°}=1-\sqrt{3}i \end{cases}$

b) $x^3-4x^2+4x-16=0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x^2+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2i \\ x=2i \end{cases} \end{cases}$

c) $x^3-27=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=3_{0°}=3 \\ x_2=3_{120°}=\dfrac{-3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \\ x_3=3_{240°}=\dfrac{-3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

d) $x^3+4x^2+4x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x^2+x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ x=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \end{cases}$

85. Teniendo en cuenta que x^4+3x^2+4 se puede escribir en la forma $x^4+4x^2+4-x^2=\left(x^2+2\right)^2-x^2$, resuelve la ecuación $x^4+3x^2+4=0$, y calcula sus cuatro soluciones complejas.

$$x=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i \qquad x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$$
$$;$$
$$x=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i \qquad x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

86. Resuelve la ecuación con coeficientes complejos: $z^2-(3+2i)z+(5+5i)=0$

Hay dos soluciones:
$$z=\frac{3+2i+1-4i}{2}=2-i$$
$$z=\frac{3+2i-(1-4i)}{2}=1+3i$$

Aplicaciones

87. Razones trigonométricas 5α. Aplicando la fórmula de De Moivre y el desarrollo del binomio de Newton para la quinta potencia del complejo 1_α, obtén el seno y el coseno de 5α en función del seno y del coseno de α.

$$\cos 5\alpha=\cos^5\alpha-10\cos^3\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha+5\cos\alpha\,\mathrm{sen}^4\alpha$$
$$\mathrm{sen}5\alpha=5\cos^4\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha-10\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^3\alpha+\mathrm{sen}^5\alpha$$

88. Forma de Euler. Utilizando la forma de Euler para los complejos, demostrar que la suma de las *n* raíces enésimas de la unidad vale 0, es decir,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot k}=0$$

Escritos los complejos en forma de Euler, la suma de las n raíces enésimas de la unidad es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y cuya razón es $e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}}$

Recordando que la suma de los n primeros términos en una progresión geométrica es $S_n=a_1\frac{r^n-1}{r-1}$, y aplicándola a la suma de las n raíces enésimas de la unidad, tenemos:

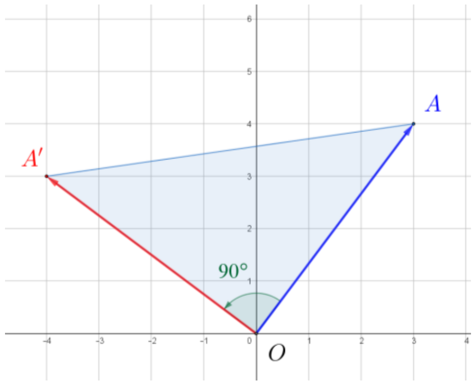
$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot k}=1\cdot\frac{\left(e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}}\right)^n-1}{e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot}-1}=\frac{e^{i\cdot 2\pi}-1}{e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot}-1}=\frac{1-1}{e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot}-1}=0$$

89. Giro de un punto. Al punto *A*(3,4) se le aplica un giro de +90° alrededor del origen, obteniéndose el punto *A'*. Calcula sus coordenadas, y el perímetro y el área del triángulo *AOA'*.

Los lados del triángulo son: $\begin{cases} OA=|z_A|=\sqrt{3^2+4^2}=5 \\ OA'=|z_{A'}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5 \\ AA'=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2} \end{cases}$

El perímetro del triángulo es: $10+5\sqrt{2}$

El área del triángulo es: 12,5

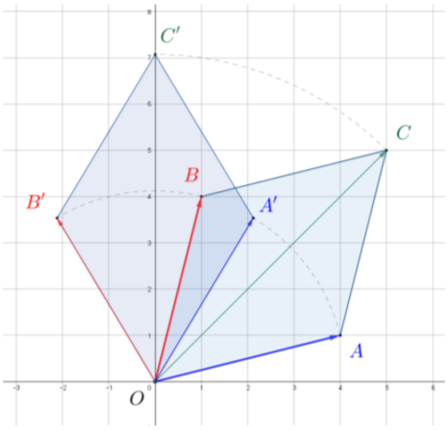


90. Giro de un rombo. Tres vértices de un rombo *OACB* son los puntos *O*(0,0), *A*(4,1) y *B*(1,4). Usando la suma de complejos calcula las coordenadas del cuarto vértice, *C*. Calcula las coordenadas de los vértices del rombo obtenido al girar el rombo *OACB* 45° alrededor del origen.

Las coordenadas del cuarto vértice: $C(5,5)$

Las coordenadas de los vértices de rombo girado alrededor del origen 45°: $A'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$;

$B'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; $C'\left(0,5\sqrt{2}\right)$



91. Cuadrado centrado en el origen. Un cuadrado centrado en el origen tiene un vértice en el punto $A(1,2)$. Halla los otros tres vértices y calcula el área del cuadrado.

Los vértices son: $B(-2,1)$; $C(-1,-2)$; $D(2,-1)$

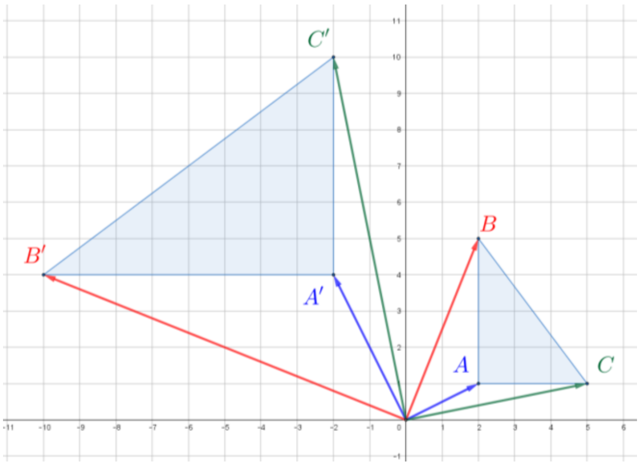
El área del cuadrado es $A=\left(\sqrt{10}\right)^2=10$

92. Rectas perpendiculares. El punto $P(x, y)$ es el afijo del complejo $z = x + yi$. Si se gira el punto P alrededor del origen un ángulo de 90°, el punto que se obtiene $P'(x', y')$ es el afijo del complejo $z' = z \cdot i$. Utiliza este hecho para obtener la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta de ecuación $y = mx$

Ecuación de la recta: $y = mx \Rightarrow -x' = my' \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{m} x'$

93. Giro y homotecia de un triángulo. El triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(2,5)$ y $C(5,1)$, se gira un ángulo de 90° alrededor del origen y, a continuación, se dilatan al doble las distancias de los vértices al origen. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo A'B'C' resultante.

Coordenadas de los vértices: $A'(-2,4)$; $B'(-10,4)$; $C'(-2,10)$

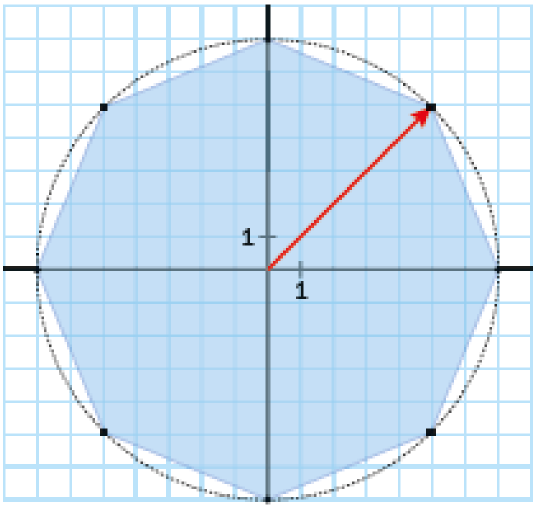


94. Giro de una parábola. Calcula la ecuación de la parábola que se obtiene al girar la parábola de ecuación $y = x^2 + 4$ un ángulo de 90° alrededor del origen en sentido horario.

Ecuación de la parábola: $y = x^2 + 4 \Rightarrow x' = (-y')^2 + 4 \Rightarrow x' = y'^2 + 4 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{x' - 4}$

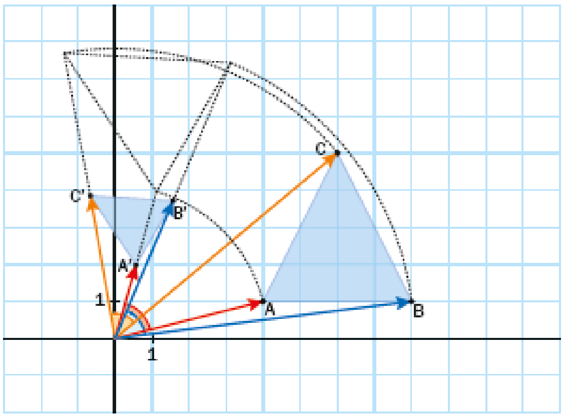
95. Vértices de un octógono regular. Uno de los vértices de un octógono centrado en el origen es el punto P(5,5). Halla las coordenadas de los otros siete vértices.

Coordenadas de los vértices: $A(0, 5\sqrt{2})$; $B(-5,5)$; $C(-5\sqrt{2}, 0)$; $D(-5,-5)$; $E(0, -5\sqrt{2})$; $F(5,-5)$; $G(5\sqrt{2}, 0)$



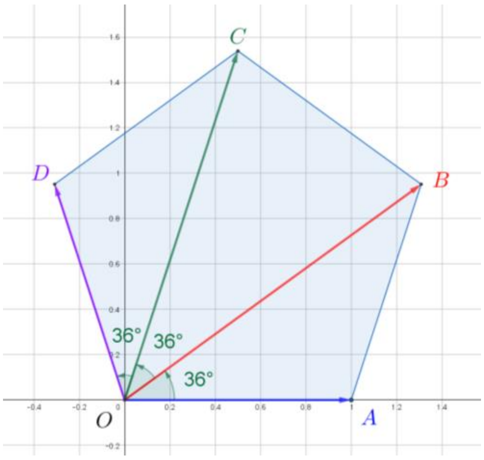
96. Giro y homotecia de un triángulo. Los vértices de un triángulo isósceles son $A(4,1), B(8,1) y C(6,5)$. Se gira el triángulo *ABC* un ángulo de 60° alrededor del origen de coordenadas y se reducen las distancias de los vértices del triángulo girado al origen a la mitad, obteniéndose un nuevo triángulo isósceles, *A’B’C’*. Halla las coordenadas de sus vértices.

Los vértices son $A'\left(\dfrac{4-\sqrt{3}}{4},\dfrac{4\sqrt{3}+1}{4}\right)$, $B'\left(\dfrac{8-\sqrt{3}}{4},\dfrac{8\sqrt{3}+1}{4}\right)$ y $C'\left(\dfrac{6-5\sqrt{3}}{4},\dfrac{6\sqrt{3}+5}{4}\right)$



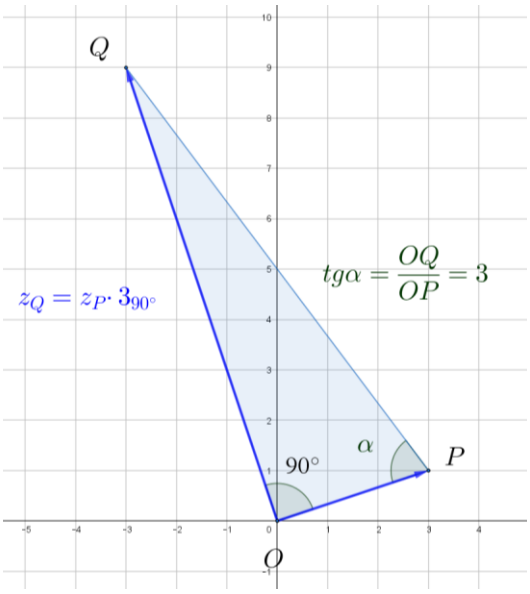
97. Vértices de un pentágono regular. La relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado es el número de oro, $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si dos vértices consecutivos de un pentágono regular son el origen $O(0,0)$, y el punto $A(1,0)$, y los otros tres vértices del pentágono tienen ordenada positiva, expresa sus coordenadas en forma polar. Aproximando hasta las milésimas las razones trigonométricas de los argumentos, calcula las coordenadas cartesianas de los vértices del pentágono.

Los vértices son: $B(1{,}309\ ,0{,}951)$; $C(0{,}500\ ,1{,}539)$; $D(-0{,}309\ ,0{,}951)$



98. Giro y homotecia de un punto. Un triángulo rectángulo, con el ángulo recto en el origen tiene el vértice opuesto al cateto mayor en el punto $P(3,1)$. Si la tangente del ángulo mayor del triángulo vale 3, calcula las coordenadas del tercer vértice.

Las coordenadas del tercer vértice: $Q(-3,9)$



Un mundo matemático

1. Calcula, usando las formas de Euler y trigonométrica de un complejo, el resultado de e^{2i}

(recuerda que la parte imaginaria del exponente complejo es el argumento del resultado de la potencia).

$$e^{2i} = -0.416 + 0.909i$$

2. Aplicando las propiedades de las potencias, calcula el resultado de e^{3+2i}

$$e^{3+2i} = -8.3585 + 18.2637i$$

3. Aplicando el cambio indicado, calcula 3^i

$$3^i = 0.4548 + 0.8906 \cdot i$$

4. Calcula 3^{2+i}

$$3^{2+i} = 4.0935 + 8.0152 \cdot i$$

Cálculo de logaritmos de complejos.

Aunque en el campo real el logaritmo de un número positivo es único, en el campo complejo, el logaritmo de un número tiene infinitas soluciones. Esto se debe a que, para calcular logaritmos de números complejos, estos han de estar escritos en su forma polar (o de Euler). Y como un complejo tiene infinitos argumentos, dependiendo del argumento considerado, tendremos una solución diferente. Si consideramos el argumento principal del complejo (el que está comprendido entre -π y π), el logaritmo correspondiente recibe el nombre de logaritmo principal, y se acostumbra representar con el símbolo L. Por ejemplo, para calcular el logaritmo principal de $1 + \sqrt{3}i$, operamos así:

$$ln\left(1+\sqrt{3}i\right) = ln\left(2 \cdot e^{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)i}\right) = ln2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) i, \forall k \in \mathbb{Z}$$

El logaritmo principal se obtiene para *k* = 0, por tanto,

$$L\left(1+\sqrt{3}i\right) = ln2 + \frac{\pi}{3} i = 0.6931 + 1.0472i$$

5. Calcula los logaritmos principales de los siguientes números complejos:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ b) $0 + 5i$ c) $-4 + 0i$

$$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -0.5236i$$

$$L(0+5i) = 1.6094 + 1.5708i$$

$$L(-4+0i) = 1.3863 + 3.14159i$$

