1 Ecuaciones de una recta en el plano (I)

1. Halla en cada caso la pendiente, la inclinación y la ecuación de las rectas que pasan por cada par de puntos:

a) $A(2,3);B(0,-1)$ b) $A(4,0);B(0,5)$ c) $A(2,1);B(5,-1)$ d) $A(-2,0);B(0,2)$

a) $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=2;$ $\theta=\text{arctg}2=63°26'$; la ecuación de la recta es $y=2x-1$

b) $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-5}{4};$ $\theta=180°-\text{arctg}\frac{5}{4}=128°40'$; la ecuación de la recta es $y=\frac{-5}{4}x+5$

c) $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{3};$ $\theta=180°-\text{arctg}\frac{2}{3}=146°19'$; la ecuación de la recta es $2x+3y=7$

d) $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=1;$ $\theta=\text{arctg}1=45°$; la ecuación de la recta es $y=x+2$

2. Determina la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por el punto $B(0,3)$ con inclinación $\theta=60°$.

$m=\text{tg}\theta=\text{tg}60°=\sqrt{3}$ y la ecuación es $y=\sqrt{3}x+3$.

3. Dadas las siguientes rectas, determina en cada caso la pendiente, la inclinación y la ordenada en el origen:

a) $2x-5y=10$ b) $3y+4x-7=0$ c) $x=\frac{3}{5}y+6$ d) $-3x+7y-6=0$

a) $2x-5y=10\Rightarrow y=\frac{2}{5}x-2\Rightarrow\begin{cases}\text{pendiente}: m=\frac{2}{5}\Rightarrow\theta=\text{arctg}\left(\frac{2}{5}\right)=21°48'\\ \text{ordenada en el origen}: b=-2\end{cases}$

b) $3y+4x-7=0\Rightarrow y=\frac{-4}{3}x+\frac{7}{3}\Rightarrow\begin{cases}\text{pendiente}: m=\frac{-4}{3}\Rightarrow\theta=180°-\text{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)=126°52'\\ \text{ordenada en el origen}: b=\frac{7}{3}\end{cases}$

c) $x=\frac{3}{5}y+6\Rightarrow y=\frac{5}{3}x-10\Rightarrow\begin{cases}\text{pendiente}: m=\frac{5}{3}\Rightarrow\theta=\text{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)=59°2'\\ \text{ordenada en el origen}: b=-10\end{cases}$

d) $-3x+7y-6=0\Rightarrow y=\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}\Rightarrow\begin{cases}\text{pendiente}: m=\frac{3}{7}\Rightarrow\theta=\text{arctg}\left(\frac{3}{7}\right)=23°12'\\ \text{ordenada en el origen}: b=\frac{6}{7}\end{cases}$

4. Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(5,-2)$ y tiene inclinación $\theta = 135°$

Ecuación: $y = -x + 3$

2 Ecuaciones de una recta en el plano (II)

5. Halla un vector director, la pendiente y la inclinación de las rectas que pasan por los dos puntos indicados en cada caso:

a) $A(-1,3)$ y $B(3,-2)$

b) $A(0,-2)$ y $B(3,1)$

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3+1, -2-3) = (4,-5)$. $m = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{5}{4}$. $\theta = 180° - \text{arctg}\left(\frac{5}{4}\right) = 128°40'$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3-0, 1+2) = (3,3)$. $m = \frac{u_2}{u_1} = 1$. $\theta = \text{arctg}(1) = 45°$

6. Halla la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por el punto A y tiene el vector director $\vec{u}$ en cada caso:

a) $A(2,5)$ y $\vec{u} = (3,-2)$

b) $A(0,-2)$ y $\vec{u} = (2,1)$

a) $m = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{2}{3}$; $\theta = 180° - \text{arctg}\left(\frac{2}{3}\right) = 146°19'$

b) $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}$; $\theta = \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = 26°34'$

7. Dada la recta definida por los puntos $A(-1,-2)$ y $B(2,3)$, determina uno de sus vectores directores y su pendiente y escribe las diversas formas de su ecuación.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2+1, 3+2) = (3,5)$. $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{3}$

Punto-pendiente	Explícita	Canónica	General
$y+2 = \frac{5}{3}(x+1)$	$y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$	$\frac{x}{1/5} + \frac{y}{-1/3} = 1$	$5x - 3y - 1 = 0$
Vectorial	**Paramétricas**	**Continua**	
$(x,y) = (2,3) + t(3,5)$	$\left.\begin{array}{l} x = 2+3t \\ y = 3+5t \end{array}\right\}$	$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{5}$	

8. La recta r pasa por el punto $A(2,-1)$ y tiene como vector director $\vec{u}=(-4,3)$. Determina su pendiente y escribe las distintas formas de la ecuación de esta recta.

$\vec{u}=(-4,3)$. $\quad m=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{-3}{4}$

Punto-pendiente	Explícita	Canónica	General
$y+1=\dfrac{-3}{4}(x-2)$	$y=\dfrac{-3}{4}x+\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{x}{2/3}+\dfrac{y}{1/2}=1$	$3x+4y-2=0$
Vectorial	Paramétricas	Continua	
$(x,y)=(2,-1)+t(-4,3)$	$\left.\begin{array}{l} x=2-4t \\ y=-1+3t \end{array}\right\}$	$\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+1}{3}$	

3 Posición relativa de dos rectas

9. Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si son secantes, calcula las coordenadas de su punto de corte:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-5y+1=0 \\ -6x+10y-2=0 \end{array}\right\}$ $\qquad$ b) $\left.\begin{array}{r} 5x-y+3=0 \\ 10x-6y+6=0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-5y+1=0 \\ -6x+10y-2=0 \end{array}\right\}$ Las rectas son coincidentes.

b) $\left.\begin{array}{r} 5x-y+3=0 \\ 10x-6y+6=0 \end{array}\right\}$ Las rectas son secantes. El punto de común de las dos rectas es $P\left(\dfrac{-3}{5},0\right)$.

10. Halla a y b para que las rectas cuyas ecuaciones son $r: ax+2y+4=0$ y $s: 10x+by-2=0$:

a) Se corten en el punto $A(2,3)$.

b) Sean paralelas.

c) Sean coincidentes.

a) a=-5 y b=-6.

b) $a=k, b=20/k, \forall k\neq 0$

c) $\begin{array}{l} a=-20 \\ b=-1 \end{array}$

4 Haz de rectas

11. Determina la ecuación del haz de rectas que tienen vértice en el punto $A(1,-3)$. Calcula el valor del parámetro que corresponde a la recta de dicho haz que pasa por $B(-1,5)$.

La ecuación del haz es: $mx-y-m-3=0$

Valor del parámetro: $m=-4$

12. Determina la ecuación del haz de rectas paralelas a la recta de ecuación $r: 2x-5y+4=0$. Halla la ecuación de la recta de este haz que pasa por el punto $P(4,1)$.

La ecuación es $2x-5y-3=0$

13. Halla la ecuación general de los siguientes haces de rectas:

a) Haz de rectas paralelas con pendiente $m=\frac{3}{4}$.

b) Haz de rectas que pasan por $P(4,-2)$.

c) Haz de rectas paralelas con vector director $\vec{u}=(3,5)$.

a) Ecuación general: $3x-4y+C=0$

b) Ecuación general: $mx-y-4m-2=0$.

c) La ecuación general del haz es $5x-3y+C=0, \forall C \in \mathrm{R}$.

5 Vector normal de una recta

14. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P (2,3) y es perpendicular al vector $\vec{n}$ = (3,2).

La ecuación es: $3x+2y-12=0$

15. Determina la ecuación del haz de rectas que son perpendiculares a la recta de ecuación 5x + 4y − 3 = 0.

La ecuación del haz de rectas es: $4x-5y+C=0$

6 Paralelismo y perpendicularidad

16. Halla la ecuación general de la recta que pasa por $A(3,-1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $B(1,2)$ y $C(4,3)$.

La ecuación: $3x+y-8=0$

17. Halla la recta perpendicular a $y=2x-3$ por el punto $P(5,7)$.

Ecuación: $x+2y-19=0$

7 Ángulo entre dos rectas

18. Clasifica los siguientes triángulos, según sus ángulos, como acutángulos, rectángulos u obtusángulos:

a) Triángulo de vértices $A(2,0)$, $B(0,1)$ y $C(-3,\ -2)$.

b) Triángulo cuyos lados están sobre $r:2x-y+2=0$, $s:x+y-2=0$ y $t:2x-3y-6=0$.

a) El triángulo es obtusángulo.

b) El triángulo es acutángulo.

19. En el triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(3,1)$ y $C(-1,-1)$, halla los ángulos interiores.

Ángulos: *A* = $71°34'$; *B* = $71°34'$; *C* = $36°52'$

20. Halla las inclinaciones de las rectas $r:3x-y+4=0$ y $s:4x+5y-9=0$, y el ángulo que forman. Comprueba que se obtiene el mismo resultado usando las pendientes.

El ángulo que forman las dos rectas es $69°46'$.

21. Calcula las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $P(3,2)$ y que forman con la recta $r:5x-4y+10=0$ un ángulo de 45°.

Las rectas buscadas son : $9x+y-29=0$ y $x-9y+15=0$

8 Distancia entre puntos y rectas

22. Calcula la distancia del punto $P(-1,4)$ y del origen a las rectas $r: 3x+4y-5=0$, $s: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ y $t: \begin{cases} x=5+3t \\ y=4-4t \end{cases}$, indicando, en cada caso, si la recta corta o no al segmento OP.

La distancia desde *P* a la recta *r* es $d(P,r)=\frac{8}{5}$ y la distancia desde *O* a *r* es $d(O,r)=-1$. La recta corta al segmento de extremos *O* y *P*.

La distancia desde *P* a la recta *s* es $d(P,s)=\frac{-1}{\sqrt{13}}$ y la distancia desde *O* a *r* es $d(O,r)=\frac{-6}{\sqrt{13}}$. *s* no corta al segmento *OP*.

La distancia desde *P* a la recta *t* es $d(P,t)=\frac{-24}{5}$ y la distancia desde *O* a *r* es $d(O,r)=\frac{-32}{5}$. *t* no corta al segmento *OP*.

23. Longitud de las alturas. Halla la longitud de las alturas del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3,2)$, $B(7,0)$ y $C(5,6)$. ¿Cuánto vale el área del triángulo?

Las alturas son las distancias desde cada vértice al lado opuesto: $h_A=\sqrt{10}$; $h_B=2\sqrt{5}$; $h_C=2\sqrt{5}$

El área del triángulo es $10u^2$

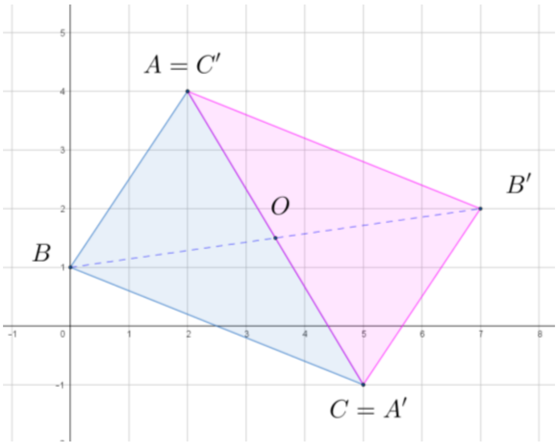
24. Halla la distancia entre las rectas $y=2x-5$ e $y=2x+15$.

La distancia entre las rectas es: $4\sqrt{5}$

9 Simetrías

25. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo A'B'C', simétrico del ABC, dados $A(2,4)$, $B(0,1)$ y $C(5,-1)$ respecto del centro de simetría $O\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$. Dibuja la solución.

Coordenadas: $A'(5,-1)$; $B'(7,2)$; $C'(2,4)$

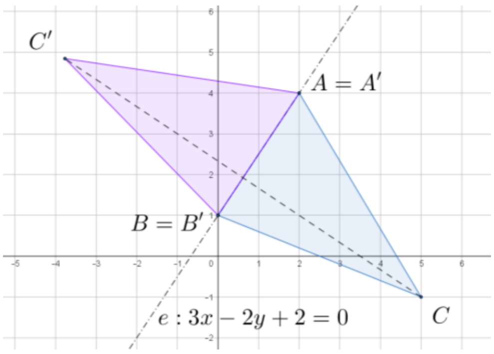


26. ¿Qué es el eje de simetría para el segmento formado por un punto y su simétrico? ¿Y para el ángulo formado por una recta y su simétrica?

El eje de simetría es la **mediatriz** del segmento cuyos extremos son un punto y su simétrico respecto de él.

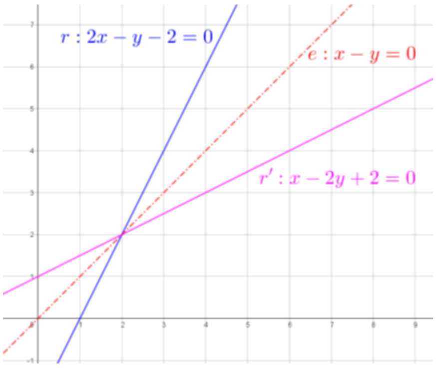
También es la **bisectriz** del ángulo formado por una recta y su simétrica respecto de él.

27. Simetría axial de un triángulo. Dados $A(2,4)$, $B(0,1)$ y $C(5,-1)$, halla las coordenadas de los vértices del triángulo A'B'C', simétrico de ABC, respecto del eje de simetría $e: 3x-2y+2=0$. Antes de empezar a operar, dibuja.



28. Simetría axial de una recta. Halla la ecuación de la recta simétrica a $r: 2x - y - 2 = 0$ respecto del eje de simetría $e: x - y = 0$. ¿Qué conclusión obtienes de la solución?

La recta simétrica de r respecto de e es: $x - 2y + 2 = 0$



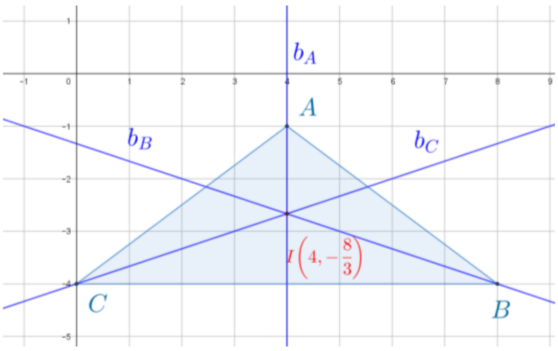
10 Lugares geométricos

29. Halla las bisectrices interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(4, -1)$, $B(8, -4)$ y $C(0, -4)$, así como las coordenadas de su incentro.

La bisectriz interior por el vértice A es la recta vertical: $6x - 24 = 0; x - 4 = 0$

La bisectriz interior por el vértice B es la que tiene pendiente negativa: $x + 3y + 4 = 0$

La bisectriz interior por el vértice C es la que tiene pendiente positiva: $x - 3y - 12 = 0$

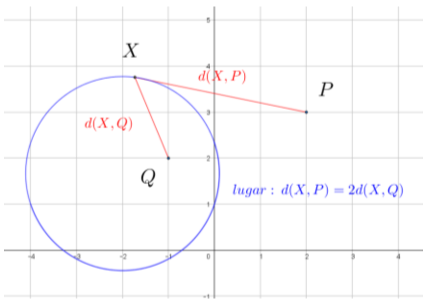


Las coordenadas del incentro son: $I\left(4, \frac{-8}{3}\right)$

30. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $P(2,3)$ es el doble que su distancia al punto $Q(-1,2)$.

$3x^2 + 3y^2 + 12x - 10y + 7 = 0$

El lugar corresponde a una circunferencia



31. Demuestra que las dos bisectrices de dos rectas resultan rectas perpendiculares entre sí.

Sean las rectas $r: Ax+By+C=0$ y $s: Mx+Ny+P=0$

Las ecuaciones de las dos bisectrices son:

$$b_1: \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Mx+Ny+P}{\sqrt{M^2+N^2}} \quad \text{y} \quad b_2: \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{Mx+Ny+P}{\sqrt{M^2+N^2}}$$

Si llamamos $r_1=\sqrt{A^2+B^2}$ y $r_2=\sqrt{M^2+N^2}$, las ecuaciones de las bisectrices quedan:

$$b_1: (Ar_2-Mr_1)x+(Br_2-Nr_1)y+Cr_2-Pr_1=0 \Rightarrow m_{b_1}=-\frac{Ar_2-Mr_1}{Br_2-Nr_1}$$

$$b_2: (Ar_2+Mr_1)x+(Br_2+Nr_1)y+Cr_2+Pr_1=0 \Rightarrow m_{b_2}=-\frac{Ar_2+Mr_1}{Br_2+Nr_1}$$

El producto de las pendientes debería ser -1 para que las rectas fueran perpendiculares, de modo que efectuamos dicho producto:

$$m_{b_1}m_{b_2}=\left(-\frac{Ar_2-Mr_1}{Br_2-Nr_1}\right)\left(-\frac{Ar_2+Mr_1}{Br_2+Nr_1}\right)=\frac{A^2r_2^2-M^2r_1^2}{B^2r_2^2-N^2r_1^2}=\frac{A^2\left(M^2+N^2\right)-M^2\left(A^2+B^2\right)}{B^2\left(M^2+N^2\right)-N^2\left(A^2+B^2\right)}=\frac{A^2N^2-B^2M^2}{B^2M^2-A^2N^2}=-1$$

En efecto, las rectas son perpendiculares.

32. Calcula las coordenadas del punto simétrico de $P(3,-2)$ respecto de la recta que pasa por $A(1,1)$ y $B(-3,-2)$ Después, calcula la ecuación de la mediatriz del segmento PP'.

La mediatriz del segmento PP' es: $3x-4y+1=0$

33. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $F(2,2)$ y de la recta de ecuación $r: x+y=0$.

Ecuación: $x^2+y^2-2xy-8x-8y+16=0$

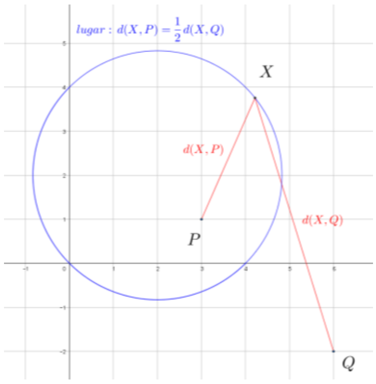
34. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $C(-2,3)$ es 5 unidades.

Ecuación: $x^2+y^2+4x-6y-13=0$

35. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto *P*(3,1) es la mitad de su distancia al punto *Q*(6,-2).

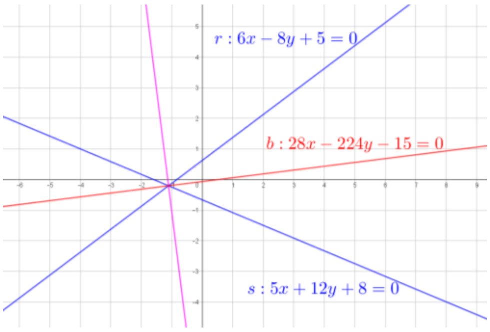
Ecuación: $x^2+y^2-4x-4y=0$

El lugar corresponde a una circunferencia.



36. Calcula la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas de ecuaciones r: 6x - 8y + 5 = 0 y s: 5x + 12y + 8 = 0.

$78x-104y+65=-50x-120y-80 \Rightarrow 128x+16y+145=0$ que es la bisectriz con pendiente negativa, correspondiente al ángulo obtuso, como se puede apreciar en la gráfica.



37. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas *r*: 3x + 4y-10 = 0 y *s*: 6x + 8y + 15 = 0.

Ecuación: $12x+16y-5=0$

38. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que distan 1 unidad respecto de la recta r: 15x - 8y + 7 = 0.

Esta igualdad conduce a dos posibilidades distintas:

$$\frac{15x-8y+7}{17}=1 \Rightarrow 15x-8y-10=0$$
$$\frac{15x-8y+7}{17}=-1 \Rightarrow 15x-8y+24=0$$

que corresponden a rectas paralelas de las que la recta dada es la paralela media.

39. Vértices de un rombo. La ecuación de uno de los lados de un rombo es y = $\frac{1}{2}x$, y las ecuaciones de sus diagonales son $y = 3x$ y $x + 3y = 10$. Calcula las coordenadas de los vértices del rombo.

Las coordenadas: $O(0,0)$; $A(4,2)$; $B:(2,6)$; $C:(-2,4)$

Actividades finales

Ecuaciones de una recta en el plano

40. Una recta tiene pendiente $m=\frac{-2}{3}$ y pasa por el punto $B(0,3)$. Halla las coordenadas de un vector director de la misma y obtén las distintas formas de su ecuación.

Un vector director de la recta es $\vec{u}=(3,-2)$. Las distintas formas de la ecuación de la recta son:

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y-3=\frac{-2}{3}(x-0)$	$y=\frac{-2}{3}x+3$	$2x+3y-9=0$	$\frac{x}{9/2}+\frac{y}{3}=1$
Vectorial	Paramétricas	Continua	
$(x,y)=(0,3)+t(3,-2)$	$\left.\begin{matrix} x=0+3t \\ y=3-2t \end{matrix}\right\}$	$\frac{x-0}{3}=\frac{y-3}{-2}$	

41. La recta *r* pasa por el origen y tiene una inclinación de 45°. Calcula su pendiente, las coordenadas de su vector director y escribe las distintas formas de la ecuación de la recta.

La pendiente es $m=\text{tg}\,\theta=\text{tg}\,45°=1 \Rightarrow \vec{u}=(1,1)$. Las distintas formas de su ecuación son

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y-0=1(x-0)$	$y=x$	$x-y=0$	No tiene, pues pasa por el origen
Vectorial	Paramétricas	Continua	
$(x,y)=(0,0)+t(1,1)$	$\left.\begin{matrix} x=0+t \\ y=0+t \end{matrix}\right\}$	$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}$	

42. Dada la recta $r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-3t \end{cases}$, halla un vector director y su pendiente, y escribe el resto de formas de su ecuación.

Un vector director de la recta es $\vec{u}=(2,-3)$, y un punto $A(-1,2)$. La pendiente es $m=\frac{-3}{2}$.

Las distintas formas de su ecuación son:

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y-2=\frac{-3}{2}(x+1)$	$y=\frac{-3}{2}x+\frac{1}{2}$	$3x+2y-1=0$	$\frac{x}{1/3}+\frac{y}{1/2}=1$
Vectorial	Paramétricas	Continua	
$(x,y)=(-1,2)+t(2,-3)$	$\left.\begin{array}{l} x=-1+2t \\ y=2-3t \end{array}\right\}$	$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}$	

43. Dada la recta $r:3x-5y+15=0$, halla un vector director y su pendiente. Escribe el resto de formas de su ecuación.

Un vector director es $\vec{u}=(5,3)$ y la pendiente es $m=\frac{3}{5}$. Como la recta pasa por el punto $B(0,3)$, las distintas formas de la ecuación son:

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y-3=\frac{3}{5}(x-0)$	$y=\frac{3}{5}x+3$	$3x-5y+15=0$	$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$
Vectorial	Paramétricas	Continua	
$(x,y)=(0,3)+t(5,3)$	$\left.\begin{array}{l} x=0+5t \\ y=3+3t \end{array}\right\}$	$\frac{x-0}{5}=\frac{y-3}{3}$	

44. Dada la recta $r:y=\frac{-1}{2}x+5$, halla un vector director y su pendiente. Expresa las demás formas de su ecuación.

Un vector director es $\vec{u}=(2,-1)$ y la pendiente es $m=\frac{-1}{2}$.

Como la recta pasa por el punto $B(0,5)$, las distintas formas de la ecuación son:

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y-5=\frac{-1}{2}(x-0)$	$y=\frac{-1}{2}x+5$	$x+2y-10=0$	$\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=1$
Vectorial	Paramétricas	Continua	
$(x,y)=(0,5)+t(2,-1)$	$\left.\begin{array}{l} x=0+2t \\ y=5-t \end{array}\right\}$	$\frac{x-0}{2}=\frac{y-5}{-1}$	

45. Dada la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-7}$, calcula su pendiente y un vector director, y escribe las otras formas de su ecuación.

Un vector director es $\vec{u} = (3, -7)$ y la pendiente es $m = \frac{-7}{3}$. Como la recta pasa por el punto $P(-2, 1)$, las distintas formas de la ecuación son:

Punto-pendiente

$$y - 1 = \frac{-7}{3}(x+2)$$

Explícita

$$y = \frac{-7}{3}x - \frac{11}{3}$$

General

$$7x + 3y + 11 = 0$$

Canónica

$$\frac{x}{-11/7} + \frac{y}{-11/3} = 1$$

Vectorial

$$(x, y) = (-2, 1) + t(3, -7)$$

Paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= -2 + 3t \\ y &= 1 - 7t \end{aligned}\right\}$$

Continua

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-7}$$

46. Escribe las distintas formas de la ecuación de la recta que determina sobre los ejes de coordenadas segmentos respectivamente iguales a −3 y 4.

Con los datos dados, escribimos la ecuación canónica, y a partir de ella el resto de formas de la ecuación:

Canónica

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$$

General

$$4x - 3y + 12 = 0$$

Explícita

$$y = \frac{4}{3}x + 4$$

Punto-pendiente

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - 0)$$

Vectorial

$$(x, y) = (0, 4) + t(3, 4)$$

Paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 + 3t \\ y &= 4 + 4t \end{aligned}\right\}$$

Continua

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-4}{4}$$

47. Escribe las distintas formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto *P* y tiene la dirección del vector $\vec{u}$

a) $P(2,1)$ y $\vec{u} = (1,1)$ b) $P(2,2)$ y $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, dados $A(2,1)$ y $B(1,0)$ c) $P(0,1)$ y $\vec{u} = (2,5)$.

d) $P(8,1)$ y $\vec{u} = \overrightarrow{PO}$, donde O es el origen de coordenadas. e) $P(1,7)$ y $\vec{u} = (-1,2)$.

a)

Vectorial

$$(x, y) = (2, 1) + t(1, 1)$$

Paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 + t \end{aligned}\right\}$$

Continua

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1}$$

General

$$x - y - 1 = 0$$

Explícita

$$y = x - 1$$

Punto-pendiente

$$y - 1 = 1(x - 2)$$

Canónica

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1$$

b) Un vector director de la recta es $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,-1)$. La pendiente es $m=1$. Las formas de la ecuación son:

Vectorial	Paramétricas	Continua	General
$(x,y)=(2,2)+t(-1,-1)$	$\left.\begin{array}{l} x=2-t \\ y=2-t \end{array}\right\}$	$\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}$	$x-y=0$
Explícita	**Punto-pendiente**	**Canónica**	
$y=x$	$y-2=1(x-2)$	No tiene, pues pasa por el origen de coordenadas	

c) Con los datos obtenemos la ecuación vectorial y a partir de ella, el resto.

Vectorial	Paramétricas	Continua	General
$(x,y)=(0,1)+t(2,5)$	$\left.\begin{array}{l} x=2t \\ y=1+5t \end{array}\right\}$	$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{5}$	$5x-2y+2=0$
Explícita	**Punto-pendiente**	**Canónica**	
$y=\dfrac{5}{2}x+1$	$y-1=\dfrac{5}{2}(x-0)$	$\dfrac{x}{-2/5}+\dfrac{y}{1}=1$	

d) $\vec{u}=\overrightarrow{PO}=(-8,-1)\Rightarrow m=\dfrac{1}{8}$

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y-1=\dfrac{1}{8}(x-8)$	$y=\dfrac{1}{8}x$	$x-8y=0$	No tiene, pues pasa por el origen de coordenadas
Vectorial	**Paramétricas**	**Continua**	
$(x,y)=(8,1)+t(-8,-1)$	$\left.\begin{array}{l} x=8-8t \\ y=1-t \end{array}\right\}$	$\dfrac{x-8}{-8}=\dfrac{y-1}{-1}$	

e)

Vectorial	Paramétricas	Continua	General
$(x,y)=(1,7)+t(-1,2)$	$\left.\begin{array}{l} x=1-t \\ y=7+2t \end{array}\right\}$	$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-7}{2}$	$2x+y-9=0$
Explícita	**Punto-pendiente**	**Canónica**	
$y=-2x+9$	$y-7=-2(x-1)$	$\dfrac{x}{9/2}+\dfrac{y}{9}=1$	

48. Halla un punto, el vector director, el vector normal, la pendiente y la inclinación de las rectas cuyas ecuaciones son:

a) r: $3x - 2y + 5 = 0$ b) $s : x + 3 = 0$ c) $t : y - 5 = 0$ d) $p : 2y + x = 0$

a) Un punto de la recta es, por ejemplo, $P(1,4)$. Un vector director es $\vec{u}=(2,3)$, un vector normal es $\vec{n}=(3,-2)$ la pendiente de la recta es $m=\dfrac{3}{2}$ y la inclinación es $\theta=\text{arctg}\left(\dfrac{3}{2}\right)=56°16'$

b) Un punto de la recta es, por ejemplo, $P(-3,0)$. Un vector director es $\vec{u}=(0,1)$, un vector normal es $\vec{n}=(1,0)$ Como es vertical, esta recta NO tiene pendiente y su inclinación es $\theta=90°$.

c) Un punto de la recta es, por ejemplo, $P(0,5)$. Un vector director es $\vec{u}=(1,0)$, un vector normal es $\vec{n}=(0,1)$ la pendiente de la recta es $m=0$ y su inclinación es $\theta=0°$.

d) Un punto de la recta es, por ejemplo, $O(0,0)$. Un vector director es $\vec{u}=(2,-1)$, un vector normal es $\vec{n}=(1,2)$, la pendiente de la recta es $m=\dfrac{-1}{2}$ y la inclinación es $\theta=180°-\text{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\right)=153°26'$

49. Halla un vector director, un vector normal, la pendiente y las distintas formas de la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(2,1)$ y $B(1,1)$ b) $A(0,-1)$ y $B(1,0)$ c) $A(-1,-1)$ y $B(-3,-5)$ d) $A(5,3)$ y $B(-1,0)$

a) Vector director: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,0)$. Vector normal: $\vec{n}=(0,1)$. Pendiente $m=0$.

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y-1=0(x-1)$	$y=1$	$y-1=0$	No tiene, pues es una recta horizontal
Vectorial	Paramétricas	Continua	
$(x,y)=(1,1)+t(-1,0)$	$\left.\begin{array}{r} x=1-t \\ y=1 \end{array}\right\}$	$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{0}$	

b) Vector director: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,1)$. Vector normal: $\vec{n}=(1,-1)$. Pendiente $m=1$.

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y+1=1(x-0)$	$y=x-1$	$x-y-1=0$	$\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1$
Vectorial	**Paramétricas**	**Continua**	
$(x,y)=(0,-1)+t(1,1)$	$\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=-1+t \end{array}\right\}$	$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}$	

c) Vector director: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-2,-4)$. Vector normal: $\vec{n}=(4,-2)$. Pendiente $m=2$.

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y+1=2(x+1)$	$y=2x+1$	$2x-y+1=0$	$\frac{x}{-1/2}+\frac{y}{1}=1$
Vectorial	**Paramétricas**	**Continua**	
$(x,y)=(-1,-1)+t(-2,-4)$	$\left.\begin{array}{r} x=-1-2t \\ y=-1-4t \end{array}\right\}$	$\frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{-4}$	

d) Vector director: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-6,-3)\Rightarrow\vec{u}'=(2,1)$. Vector normal: $\vec{n}=(1,-2)$. Pendiente $m=\frac{1}{2}$.

Punto-pendiente	Explícita	General	Canónica
$y-0=\frac{1}{2}(x+1)$	$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	$x-2y+1=0$	$\frac{x}{-1}+\frac{y}{1/2}=1$
Vectorial	**Paramétricas**	**Continua**	
$(x,y)=(-1,0)+t(2,1)$	$\left.\begin{array}{r} x=-1+2t \\ y=t \end{array}\right\}$	$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}$	

50. Halla la pendiente, un vector director y un vector normal y escribe las ecuaciones paramétrica, continua, explícita y canónica de las rectas:

a) r: $3x-4y-6=0$ b) s: $2x+7y-14=0$ c) t: $y=\frac{3}{4}x+4$ d) $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1$

a) Pendiente: $m=\frac{3}{4}$. Vector director: $\vec{u}=(4,3)$. Vector normal: $\vec{n}=(3,-4)$. Punto: $P(2,0)$

Paramétricas	Continua	Explícita	Canónica
$\left.\begin{array}{r} x=2+4t \\ y=3t \end{array}\right\}$	$\frac{x-2}{4}=\frac{y}{3}$	$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3/2}=1$

b) Pendiente: $m=\frac{-2}{7}$. Vector director: $\vec{u}=(7,-2)$. Vector normal: $\vec{n}=(2,7)$. Punto: $P(0,2)$

Paramétricas	Continua	Explícita	Canónica
$\left.\begin{array}{r} x=7t \\ y=2-2t \end{array}\right\}$	$\frac{x}{7}=\frac{y-2}{-2}$	$y=\frac{-2}{7}x+2$	$\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$

c) Pendiente: $m=\frac{3}{4}$. Vector director: $\vec{u}=(4,3)$. Vector normal: $\vec{n}=(3,-4)$. Punto: $P(0,4)$

Paramétricas	Continua	Explícita	Canónica
$\left.\begin{array}{r} x=4t \\ y=4+3t \end{array}\right\}$	$\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}$	$y=\frac{3}{4}x+4$	$\frac{x}{-16/3}+\frac{y}{4}=1$

d) Pendiente: $m=\frac{5}{2}$. Vector director: $\vec{u}=(2,5)$. Vector normal: $\vec{n}=(5,-2)$. Punto: $P(2,0)$

Paramétricas	Continua	Explícita	Canónica
$\left.\begin{array}{r} x=2+2t \\ y=5t \end{array}\right\}$	$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{5}$	$y=\frac{5}{2}x-5$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{-5}=1$

51. Obtén las ecuaciones generales y explícitas de los lados y las medianas del triángulo de vértices *A*(1,1), *B*(3,5) y *C*(−1,5).

Las ecuaciones generales de los lados son:

Lado a: $y-5=0$

Lado b: $2x+y-3=0$

Lado c: $2x-y-1=0$

Las ecuaciones generales de las medianas son:

Mediana por A: $x-1=0$ (recta vertical).

Mediana por B: $2x-3y+9=0$

Mediana por C: $2x+3y-13=0$

52. Halla las ecuaciones generales y explícitas de los lados y las diagonales del cuadrado de vértices *A*(−1,−1), *B*(4,−1), *C*(4,4) y *D*(−1,4).

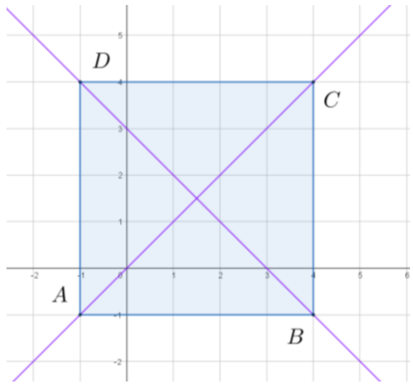
Las ecuaciones de los lados:

$$AB: y-1=0;\ \ BC: x-4=0;\ \ CD: y-4=0;\ \ DA: x+1=0$$

Las ecuaciones de las diagonales son:

$$AC: y+1=\frac{4+1}{4+1}(x+1)\overset{Exp.}{\Rightarrow} y=x \overset{General}{\Rightarrow} x-y=0$$

$$BD: y+1=\frac{4+1}{-1-4}(x-4)\overset{Exp.}{\Rightarrow} y=-x+3 \overset{General}{\Rightarrow} x+y-3=0$$



53. Halla un vector director, un vector normal y la pendiente de las siguientes rectas:

a) r: 2x + y + 1 = 0

b) s : $\begin{cases} x=3-2t \\ y=2+3t \end{cases}$

c) $t: \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-1}{3}$

d) $p: \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-3}=1$

e) $q: y-2=\dfrac{-2}{3}(x+5)$

f) $n: (x,y)=(-3,1)+(2,-5)\cdot t$

a) $r: 2x+y+1=0 \overset{V.Normal}{\Rightarrow} \vec{n}=(2,1) \overset{V.Director}{\Rightarrow} \vec{u}=(1,-2) \overset{pendiente}{\Rightarrow} m=\dfrac{-2}{1}=-2$

b) $s: \begin{cases} x=3-2t \\ y=2+3t \end{cases} \overset{V.Director}{\Rightarrow} \vec{u}=(-2,3) \overset{V.Normal}{\Rightarrow} \vec{n}=(3,2) \overset{pendiente}{\Rightarrow} m=\dfrac{3}{-2}=-\dfrac{3}{2}$

c) $t: \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-1}{3} \overset{V.Director}{\Rightarrow} \vec{u}=(5,3) \overset{V.Normal}{\Rightarrow} \vec{n}=(3,-5) \overset{pendiente}{\Rightarrow} m=\dfrac{3}{5}$

d) $p: \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-3}=1 \overset{Ec.General}{\Rightarrow} 3x-4y-12=0 \overset{V.Normal}{\Rightarrow} \vec{n}=(3,-4) \overset{V.Director}{\Rightarrow} \vec{u}=(4,3) \overset{pendiente}{\Rightarrow} m=\dfrac{3}{4}$

e) $q: y-2=\dfrac{-2}{3}(x+5) \overset{pendiente}{\Rightarrow} m=\dfrac{-2}{3} \overset{V.Director}{\Rightarrow} \vec{u}=(3,-2) \overset{V.Normal}{\Rightarrow} \vec{n}=(2,3)$

f) $n: (x,y)=(-3,1)+(2,-5)t \overset{V.Director}{\Rightarrow} \vec{u}=(2,-5) \overset{V.Normal}{\Rightarrow} \vec{n}=(5,2) \overset{pendiente}{\Rightarrow} m=\dfrac{-5}{2}$

54. Halla el valor de *k* para que el punto *P* pertenezca a la recta *r* en cada caso:

a) $r: 3kx-5y+1=0$ $\qquad P(-1,4)$

b) $r: 2x-ky+1=0$ $\qquad P(1,1)$

c) $r: 2kx+ky+k-5=0$ $\qquad P(3,3)$

a) $k=\frac{-19}{3}$

b) $k=3$

c) $k=\frac{1}{2}$

Posición relativa de dos rectas. Haz de rectas

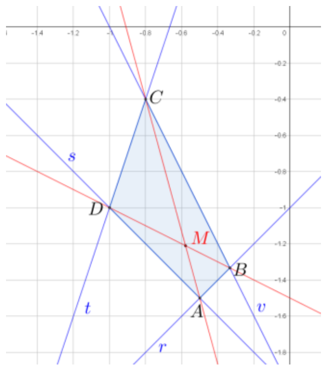
55. Determina las coordenadas de los vértices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas $r: 3x-y-4=0$, $s: 3x-4y+11=0$ y $t: 3x+2y+1=0$.

Las coordenadas son: $A(3,5)$; $B\left(\frac{7}{9},\frac{-5}{3}\right)$; $C\left(\frac{-13}{9},\frac{5}{3}\right)$

56. Las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los lados de un cuadrilátero son $r: x-y-1=0$, $s: x+y+2=0$, $t: 3x-y+2=0$ y $v: 2x+y+2=0$. Calcula las ecuaciones de sus diagonales y el punto de intersección de las mismas.

Las diagonales son las rectas *AC* y *BD*:

$$\text{AC}: y+\frac{3}{2}=\frac{\frac{-2}{5}+\frac{3}{2}}{\frac{-4}{5}+\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y+\frac{3}{2}=\frac{-11}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=\frac{-11}{3}x-\frac{10}{3}\overset{Ec.Gen.}{\Rightarrow}11x+3y+10=0$$



$$\text{BD}: y+1=\frac{\frac{-4}{3}+1}{\frac{-1}{3}+1}(x+1)\Rightarrow y+1=\frac{-1}{2}(x+1)\Rightarrow y=\frac{-1}{2}x-\frac{3}{2}\overset{Ec.Gen.}{\Rightarrow}x+2y+3=0$$

El punto de intersección de las diagonales es:

$$\left.\begin{array}{r}11x+3y+10=0\\ x+2y+3=0\end{array}\right\}\overset{2E_1-3E_2}{\Rightarrow}19x+11=0;\ x=\frac{-11}{19};\ y=\frac{-23}{19}\Rightarrow M\left(\frac{-11}{19},\frac{-23}{19}\right)$$

57. Calcula las coordenadas del punto común de las rectas $r:\begin{cases}x=5+3t\\ y=3+t\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x=2+5t\\ y=7+2t\end{cases}$.

El punto de corte de las rectas, $P(-73,-23)$

58. Halla la ecuación del haz de rectas que tiene vértice en el punto $V(3,-2)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta del haz que pasa por el punto $P(-1,2)$? ¿Cuál la de la recta del haz que determina sobre los ejes de coordenadas segmentos de la misma longitud?

Hay dos rectas que cumplen la condición:

$$y+2=1(x-3)\Rightarrow x-y-5=0 \quad \text{y} \quad y+2=-1(x-3)\Rightarrow x+y-1=0$$

59. Halla la ecuación de la recta que pertenece al haz determinado por $r:2x+5y-8=0$ y $s:x+4y-1=0$ y pasa por el punto $P(2,5)$.

La recta del haz que pasa por $P(2,5)$ es: $x+y-7=0$

60. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices del triángulo $A(5,-4)$, $B(-1,3)$ y $C(-3,-2)$ y son paralelas a los lados opuestos. Estas tres rectas forman un nuevo triángulo. Calcula sus vértices.

- Recta que pasa por $A(5,-4)$ y es paralela a $\overrightarrow{BC}=(-2,-5)\overset{Ec.Continua}{\Rightarrow}\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y+4}{-5}\overset{Ec.General}{\Rightarrow}5x-2y-33=0$
- Recta que pasa por $B(-1,3)$ y es paralela a $\overrightarrow{AC}=(-8,2)\overset{Ec.Continua}{\Rightarrow}\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-3}{1}\overset{Ec.General}{\Rightarrow}x+4y-11=0$
- Recta que pasa por $C(-3,-2)$ y es paralela a $\overrightarrow{AB}=(-6,7)\overset{Ec.Continua}{\Rightarrow}\dfrac{x+3}{-6}=\dfrac{y+2}{7}\overset{Ec.General}{\Rightarrow}7x+6y+33=0$

Los vértices del triángulo formado por estas tres rectas son: $M(7,1)$; $N(3,-9)$; $P(-9,5)$

61. Dado un cuadrilátero cualquiera, *ABCD*, demuestra que los puntos medios de sus lados forman siempre un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices $A(0,-8)$ $B(6,0)$, $C(-2,3)$ y $D(-6,-1)$.

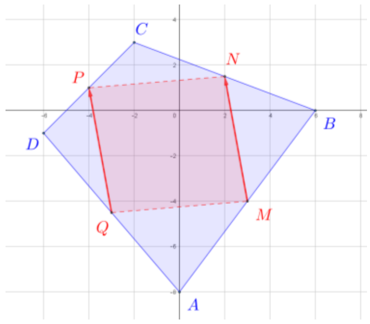
Sean los vectores de posición de los vértices del cuadrilátero, $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\ y\ \overrightarrow{OD}$; y sean M, N, P y Q los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Se cumple que:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2},\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2},\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2},\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}}{2}$$

- El vector $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} - \dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{2}$ y

- El vector $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2} - \dfrac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{2}$.

Puesto que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.



Si las coordenadas de los vértices son $A(0,-8)$, $B(6,0)$, $C(-2,3)$ y $D(-6,-1)$, las de los puntos medios son $M(3,-4), N\left(2,\dfrac{3}{2}\right), P(-4,1)$ y $Q\left(-3,\dfrac{-9}{2}\right)$.

Y las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{QP}$ son $\overrightarrow{MN} = \left(2-3, \dfrac{3}{2}+4\right) = \left(-1, \dfrac{11}{2}\right)$ y $\overrightarrow{QP} = \left(-4+3, 1+\dfrac{9}{2}\right) = \left(-1, \dfrac{11}{2}\right)$

62. Halla la ecuación de la recta que es paralela a $r: \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+3}{2}$ y es concurrente con las rectas $s: 3x+2y-5=0$ y $t: 5x-7y+2=0$.

La recta que nos piden: $2x-5y+3=0$

63. Determina si las siguientes rectas son concurrentes, y halla las coordenadas del punto común si existe:

a) $r: 3x-y+3=0$, $s: 5x+3y-7=0$ y $t: x-2y-4=0$.

b) $r: 2x-y+1=0$, $s: x+2y-17=0$ y $t: x+2y-3=0$.

a) Las rectas no son concurrentes.

b) Las rectas no son concurrentes.

64. Calcula el valor de k para que las siguientes rectas sean concurrentes:

a) $r: 2x-y+3=0$, $s: x+y+3=0$ y $t: kx+y-13=0$.

b) $r: 3x-5y+7=0$, $s: \dfrac{x-k}{2} = \dfrac{y+1}{3}$ y $t: \begin{cases} x=-4+t \\ y=-1-2t \end{cases}$

c) $r: x+3y-2=0$, $s: (k-1)x-2y+6=0$ y $t: kx-4y+9=0$

a) $k=-7$

b) $k=-4$

c) $k=5$

Paralelismo y perpendicularidad. Ángulo de dos rectas

65. Determina el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r: x+2y-3=0$ y $s: 3x-5y+4=0$.

b) $r: y=-2x+5$ y $s: \frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{2}$.

c) $r: 2x+3y+4=0$ y el eje de ordenadas.

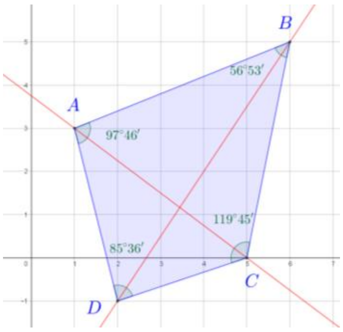
a) $57°32'$

b) $85°14'$

c) $56°19'$

66. Dado el cuadrilátero de vértices $A(1,3)$, $B(6,5)$, $C(5,0)$ y $D(2,-1)$, halla sus ángulos interiores, y las ecuaciones de sus lados y diagonales.

Ángulos: $A\approx 97°46'$; $B\approx 56°53'$; $C\approx 119°45'$; $D\approx 85°36'$



Las ecuaciones de los lados son:

AB: $2x-5y+13=0$

BC: $5x-y-25=0$

CD: $x-3y-5=0$

DA: $4x+y-7=0$

Y las de las diagonales son:

AC: $3x+4y-15=0$

BD: $3x-2y-8=0$

67. Halla la ecuación o ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(-1,3)$ y forman con $r: 3x+5y-12=0$ un ángulo de 45°.

Hay dos soluciones:

$$y-3=-4(x+1)\Rightarrow 4x+y+1=0$$

$$y-3=\frac{1}{4}(x+1)\Rightarrow x-4y+13=0$$

68. Obtén la ecuación de la recta que pasa por $P(4,\ -6)$ y es perpendicular a la recta que determina sobre el eje de ordenadas un segmento de longitud doble que el que determina sobre el eje de abscisas.

La ecuación es: $y+6=\frac{-1}{2}(x-4)\Rightarrow x+2y+8=0$

69. Halla las ecuaciones de las rectas perpendiculares a las bisectrices del primer cuadrante y del segundo cuadrante que pasan por el punto $P(2,6)$. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo formado por dichas rectas y la recta $r:3x-13y-8=0$.

Los vértices del triángulo son $P(2,6), Q(7,1)$ y $R(-6,-2)$.

Distancia entre puntos y rectas. Simetrías

70. Calcula en cada caso las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de r:

a) $P(0,\ -4)$; $r:2x+5y-9=0$.

b) $P(-2,1)$; $r:4x-3y+7=0$.

c) $P(3,-2); r:\frac{x+1}{2}=y-1$

a) $P'(4,6)$

b) $P'\left(\frac{-18}{25},\frac{1}{25}\right)$

c) $P'(-1,6)$

71. Halla la ecuación de la recta que es paralela a la recta $r:3x+4y-8=0$ y dista tres unidades de ella.

$s:3x+4y+7=0$; $s':3x+4y-23=0$

72. Halla las longitudes de las alturas y las ecuaciones de las mediatrices del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3,5)$, $B(-2,1)$ y $C(2,\ -1)$.

Las longitudes de las alturas son las distancias desde cada vértice al lado opuesto: $\frac{13\sqrt{5}}{5}$; $\frac{26\sqrt{37}}{37}$; $\frac{26\sqrt{41}}{41}$

Las mediatrices se obtienen como lugares geométricos de los puntos que equidistan de cada dos vértices: $10x+8y-29=0$; $2x+12y-29=0$; $2x-y=0$

73. Halla el punto de la recta $r: 3x+y+4=0$ que equidista de los puntos $P(-5,6)$ y $Q(3,2)$.

El punto de corte es: $R(-2,2)$

74. Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman $r: x-y+6=0$ y $s:\ x+y-2=0$.

Las ecuaciones son: $y - 4 = 0$; $x + 2 = 0$

75. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas paralelas. Obtén dicho lugar cuando las rectas son $r: 3x+5y-12=0$ y $s: 6x+10y+1=0$.

La ecuación es: $12x+20y-23=0$

76. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de $P(2,3)$ y $r: 3x+4y-5=0$.

La ecuación es: $16x^2+9y^2-24xy-70x-110y+300=0$

77. El centro de un cuadrado es $O(3,5)$ y uno de los vértices es $A(1,2)$. Halla las coordenadas de los otros tres vértices.

Las coordenadas son: $B(6,3)$; $C(5,8)$; $D(0,7)$

78. Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas $r: 2x-y=0$ y $s:\ x-2y=0$. Sabiendo que el centro del paralelogramo es el punto $M(2,3)$, halla sus vértices, su perímetro y su área.

Los vértices son: $A\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$; $B(4,6)$; $C\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right)$

El perímetro del paralelogramo es $\frac{20\sqrt{5}}{3}u$

El área del paralelogramo es $\frac{16}{3}u^2$

79. Un vértice de un paralelogramo es $A(3,2)$, y dos de sus lados están sobre las rectas $r: 3x+3y-7=0$ y $s: x-3y+4=0$. Halla las ecuaciones de los otros dos lados, las coordenadas de los vértices, el perímetro del paralelogramo y su área.

Coordenadas de los vértices $\Rightarrow C\left(\frac{3}{4},\frac{19}{12}\right)$; $B\left(\frac{11}{4},\frac{9}{4}\right)$; $D\left(1,\frac{4}{3}\right)$

Ecuaciones: $x+y-5=0$; $x-3y+3=0$

El perímetro es $\approx 4{,}92u$

El área es $\frac{2}{3}u^2$

80. Dos lados de un rectángulo están sobre las rectas $r: 2x-3y+5=0$ y $s: 3x+2y-7=0$, y uno de sus vértices es $A(2,-3)$. Calcula el área del rectángulo.

El área es: $9,69$

81. Halla la ecuación de las rectas que pasan por el punto $A(1,-2)$ y distan 2 unidades del punto $B(3,2)$.

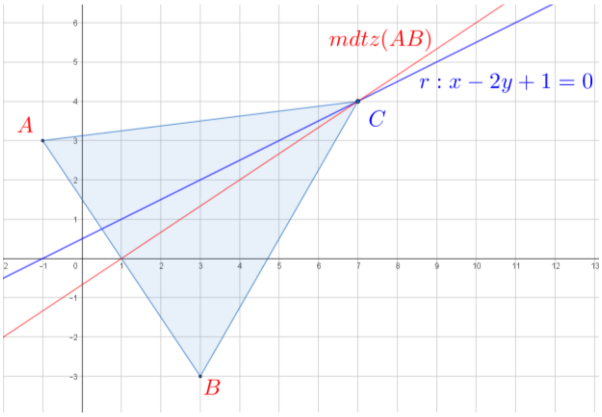
Rectas son: $y+2=\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow 3x-4y-11=0$ y $x-1=0$.

Lugares geométricos

82. Los puntos $A(-1,3)$ y $B(3,-3)$ son los extremos del lado desigual de un triángulo isósceles. El tercer vértice *C* pertenece a la recta $r: x-2y+1=0$. Halla las coordenadas de *C* y el área del triángulo.

Coordenadas: $C(7,4)$

El área del triángulo es: $26u^2$



83. La ecuación de una de las diagonales de un rombo es $d: 4x-3y+7=0$, uno de los vértices del rombo es el punto $A\left(\frac{9}{2},0\right)$ y el lado del rombo mide $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. Calcula los otros tres vértices y el área del rombo.

Vértices: $C\left(-\frac{7}{2},6\right)$; $B(-1,1)$; $D(2,5)$

El área del rombo es: $25u^2$

84. Halla las coordenadas de un punto que se encuentra a doble distancia del eje de abscisas que del eje de ordenadas, y equidista de las rectas $r: 7x-4y+19=0$ y $s: 8x+y+8=0$.

Coordenadas: $P(1,2)$; $P'(-3,-6)$

85. Halla los puntos de $r: x-2y-10=0$ desde los que se ve el segmento de extremos $A(6,2)$ y $B(14,8)$ bajo un ángulo recto.

$$\text{Para} \Rightarrow \begin{cases} t=3 \Rightarrow P(10,0) \\ t=5 \Rightarrow P(14,2) \end{cases}$$

86. La recta $m: 2x-y-6=0$ es la mediatriz del lado AB del triángulo ABC siendo el vértice $A(-2,0)$. La ecuación de la altura paralela a m es $h: 2x-y-1=0$, y la altura que pasa por A es $h_1: 3x-4y+6=0$. Calcula las coordenadas de los otros dos vértices del triángulo.

Vértices: $B(6,-4)$; $C\left(\frac{3}{2},2\right)$

Miscelánea

87. Dos lados de un rectángulo están sobre las rectas $r: 5x+2y-7=0$ y $s: 5x+2y-36=0$. La ecuación de una de sus diagonales es $t: 3x+7y-10=0$. Halla las ecuaciones de los otros dos lados y la de la otra diagonal.

Ecuaciones de los lados: $2x-5y+3=0$; $2x-5y-26=0$

Ecuación de la diagonal: $7x-3y-33=0$

88. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $M(2,1)$, $N(5,3)$ y $P(3,-4)$. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo.

Ecuaciones de los lados: $7x-2y-12=0$; $5x+y-28=0$; $2x-3y-18=0$

89. Los vértices del cuadrilátero *ABCD* son los puntos $A(-3,1)$, $B(3,9)$, $C(7,6)$ y $D(-2,-6)$. Halla las coordenadas del punto de intersección de sus diagonales.

El punto de corte de las diagonales es: $M(1,3)$

90. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen y forman con $r: 3x-2y+5=0$ un ángulo de 60°.

Las ecuaciones de las rectas son:

$$y=\frac{3-2\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}x \qquad e \qquad y=\frac{-3-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2}x$$

91. Halla la longitud de la proyección ortogonal del segmento de extremos *A*(3,-2) y *B*(-1,2) sobre la recta de ecuación $r: x-2y+8=0$. Determina también los extremos del segmento proyectado.

Puntos de corte: $A'(0,4)$; $B'\left(\frac{-8}{5},\frac{16}{5}\right)$

92. Determina el punto de la recta $r: x+3y-4=0$ que forma con los puntos *A*(1,1) y *C*(4,5) un triángulo de 7,5 u^2 de área.

Puntos: $B(-2,2)$; $B(4,0)$

93. Comprueba que el cuadrilátero *ABCD*, con vértices en *A*(3,2), *B*(13,7), *C*(4,5) y *D*(2,4) es un trapecio y calcula sus lados, sus ángulos y su área.

Las longitudes de los lados son: Base mayor: $5\sqrt{5}$; Lado *BC*: $\sqrt{85}$; Base menor: $\sqrt{5}$; Lado *AD*: $\sqrt{5}$

Ángulos: $A=90°$; $B=14°2'$; $C=165°58'$; $D=90°$

Área: $15u^2$

94. El área del triángulo *ABC* es 6 u^2. Dos de sus vértices son los puntos $A(1,-3)$ y $B(2,1)$. Halla las coordenadas del tercer vértice, *C*, sabiendo que se encuentra sobre la recta de ecuación $r: x+y+3=0$.

Hay dos puntos que son solución del problema: $C_1\left(\frac{16}{5},\frac{-31}{5}\right)$ y $C_2\left(\frac{-8}{5},\frac{-7}{5}\right)$.

95. Halla el valor de k para que el área del triángulo *ABC* sea 6 u^2, dados $A(2,1)$, $B(-3,5)$ y $C(4,k)$.

$k=\frac{9}{5}$; $k=-3$

96. ¿Qué relación existe entre los ángulos que forma una recta con los ejes de coordenadas y los coeficientes de su ecuación normal?

La ecuación normal de una recta es una ecuación general en la que el vector normal utilizado es unitario (se ha normalizado):

Ecuación general		Ecuación normal
$Ax+By+C=0$	$\xrightarrow{\text{Normalizamos}}$	$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$
$\vec{n}=(A,B)$		$\vec{n}_1=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$

Si los ángulos agudos que forma la recta con los ejes de coordenadas son α y β respectivamente, se cumple que

$$\cos\alpha=\left|\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \quad y \quad \cos\beta=\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Aplicaciones

97. Ecuaciones de las alturas de un triángulo. Halla las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran las alturas del triángulo cuyos vértices son $A(-1,3)$, $B(2,5)$ y $C(4,-1)$. Obtén además las coordenadas del ortocentro del triángulo. ¿Es un punto interior o exterior al triángulo?

Rectas: $x-3y+10=0$; $5x-4y+10=0$; $3x+2y-10=0$

Coordenadas del ortocentro: $H\left(\frac{10}{11},\frac{40}{11}\right)$

98. Recta de Euler. Halla las coordenadas del baricentro, del ortocentro y del circuncentro del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3,5)$, $B(-2,1)$ y $C(2,-1)$ y comprueba que los tres puntos están alineados. Obtén la ecuación de la recta que pasa por esos tres puntos, llamada recta de Euler.

Las coordenadas del baricentro son $G\left(1,\frac{5}{3}\right)$

Las coordenadas del ortocentro son $H\left(\frac{10}{13},\frac{7}{13}\right)$

Las coordenadas del circuncentro son: $F\left(\frac{29}{26},\frac{29}{13}\right)$

La ecuación de la recta de Euler, que pasa por F, G y H es: $44x-9y-29=0$

99. Recta de Euler. En el ejercicio anterior, halla el punto que divide al segmento comprendido entre el ortocentro y el circuncentro en segmentos proporcionales a 2 y 1. ¿Es casualidad que dicho punto coincida con el baricentro del triángulo?

El punto obtenido, evidentemente, coincide con el baricentro. Y no es una coincidencia. Es una conclusión de la siguiente propiedad: en todo triángulo no equilátero, el circuncentro, baricentro y ortocentro están alineados y el baricentro divide al segmento que va desde el circuncentro al ortocentro en partes proporcionales a 1 y 2.

100. Incentro de un triángulo. Halla las bisectrices interiores, el incentro y el radio de la circunferencia inscrita al triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,0), B(0,-5)$ y $C(-12,0)$.

Las ecuaciones de las bisectrices son: $x-y=0$; $3x+2y+10=0$; $x+5y+12=0$

Las coordenadas del incentro son: $I(-2,-2)$

El radio de la circunferencia inscrita es 2

101. Simetrías en un rombo. El centro de un rombo es el punto $M(2,1)$ y uno de los vértices está en $A(5,7)$. La ecuación de uno de los lados que concurre en el vértice A es $r: 8x+y-47=0$. Halla las coordenadas de los otros tres vértices, su perímetro y su área.

Vértices: $C(-1,-5)$; $B(6,-1)$; $D(-2,3)$

El perímetro del rombo es: $4\sqrt{65}$

El área del rombo es $60u^2$

102. Propiedades del Baricentro. El triángulo *ABC* es isósceles. Los dos lados iguales se encuentran sobre las rectas $r: 3x+2y-6=0$ y $s: 2x+3y+6=0$ y su baricentro es el origen de coordenadas. Halla la ecuación de la recta que contiene a su tercer lado.

El tercer lado tiene ecuación: $x-y+6=0$

103. Simetría Central. El punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo es $M(3,0)$ y dos vértices consecutivos del mismo son los puntos $A(2,2)$ y $B(-3,-1)$. Halla las ecuaciones de los lados y el área del paralelogramo.

Las ecuaciones de los lados son: *AB*: $3x-5y+4=0$; *BC*: $x+7y+10=0$; *CD*: $3x-5y-22=0$; *AD*: $x+7y-16=0$

El área del paralelogramo es: $26u^2$

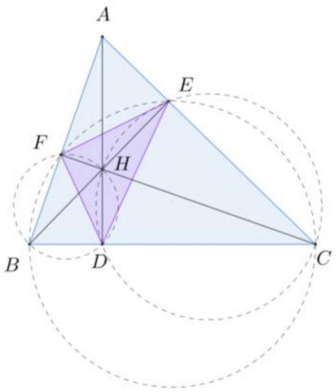
104. Incidencia y simetría. Halla las ecuaciones de los lados de un triángulo conociendo uno de sus vértices, $A(1,3)$ y las ecuaciones de dos de sus medianas $m_1: x-2y+1=0$ y $m_2: y-1=0$.

Ecuaciones de los lados: *AB*: $x+2y-7=0$; *AC*: $x-y+2=0$; *BC*: $x-4y-1=0$

105. Reflexión de un espejo. Un foco de luz situado en el punto $P(3,1)$ emite un rayo con la dirección del vector $\vec{u}=(1,2)$. A lo largo de la recta $e: x+y-10=0$ hay colocado un espejo. Obtener las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los rayos incidente y reflejado.

$$r: 2x-y-5=0 \overset{\text{Simetría respecto de } y=x}{\Rightarrow} r': 2y-x-5=0 \Rightarrow x-2y+5=0$$

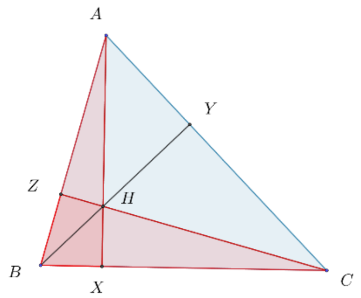
106. Triángulo órtico. Dado un triángulo acutángulo *ABC*, se denomina triángulo órtico de *ABC* al triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas sobre los lados. Demuestra que las alturas de *ABC* son las bisectrices de su triángulo órtico y, por tanto, que el ortocentro del triángulo acutángulo *ABC* coincide con el incentro de su triángulo órtico.

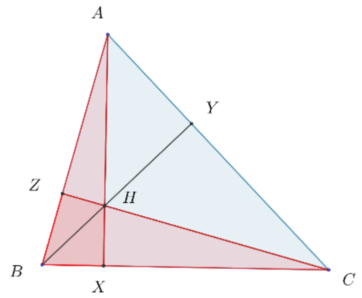


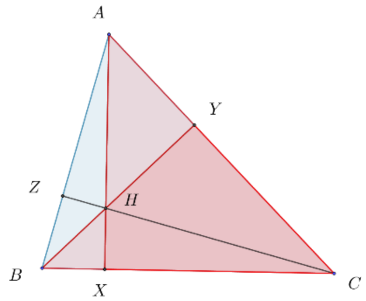
107. Teorema de Ceva. Llamamos cevianas a los segmentos que unen cada vértice de un triángulo con cualquier punto del lado opuesto. El teorema de Ceva afirma que tres cevianas *AH*, *BJ* y *CK* del triángulo *ABC* son concurrentes si y sólo si

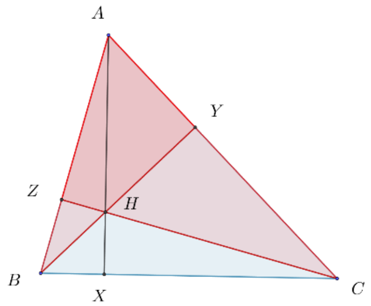
$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CJ}{JA}=1$$

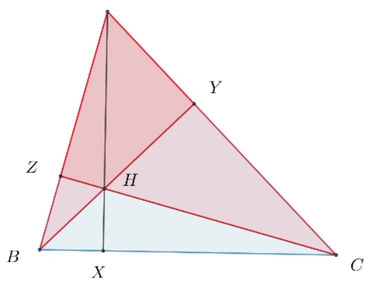
Usando el teorema de Ceva, demuestra que las tres alturas de un triángulo acutángulo se cortan en un punto.









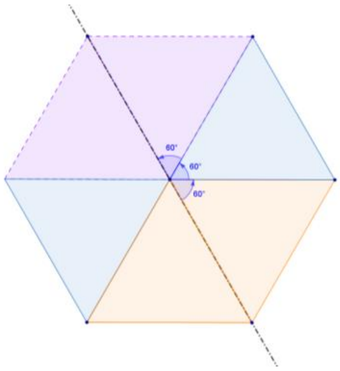


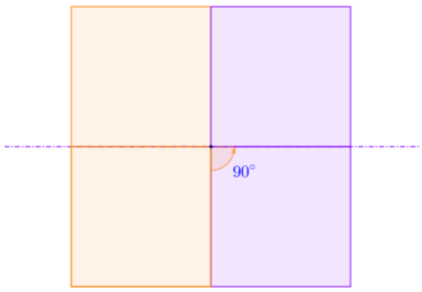
Un mundo matemático

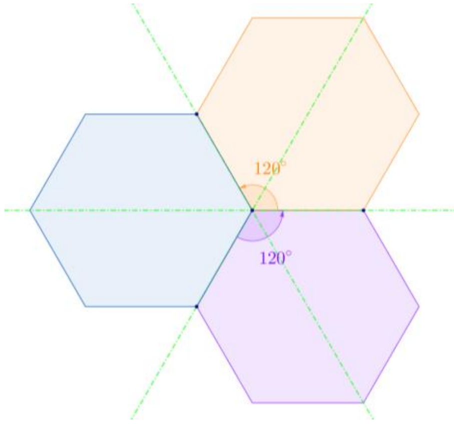
1. Los términos teselaciones y teselado hacen referencia a una regularidad o patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana siempre que no queden espacios y que no se superpongan las figuras. Podemos distinguir tres tipos de teselados: regulares, semirregulares e irregulares. Investiga las condiciones de cada tipo.

- Los teselados regulares proporcionan un recubrimiento del plano utilizando exclusivamente polígonos regulares idénticos. Los únicos polígonos regulares que teselan el plano son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono.
- Los teselados semirregulares proporcionan un recubrimiento del plano utilizando polígonos regulares de dos o más tipos. Existen únicamente ocho teselaciones semirregulares.
- Los teselados irregulares están construidos con polígonos regulares e irregulares, pero como en todos los teselados, recubren el plano sin huecos ni superposiciones.

2. La suma de los ángulos de los polígonos que concurren en cada vértice debe ser 360° para producir un recubrimiento del plano sin huecos ni superposiciones. Abre una ventana de Geogebra y dibuja un polígono regular. Mediante traslaciones, giros y simetrías realiza un teselado del plano. ¿A partir de qué polígonos regulares has podido hacerlo? Justifícalo.





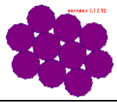
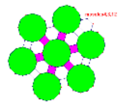
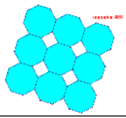
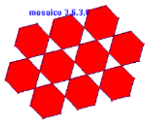
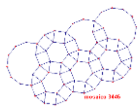
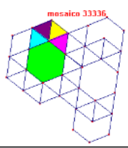
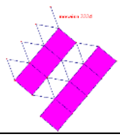
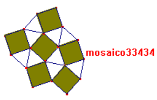


Sólo son posibles estas tres teselaciones regulares, pues la suma de los ángulos debe ser 360°, y entre los ángulos de los polígonos regulares solo existen tres divisores de 360°: 60°, 90° y 120°.

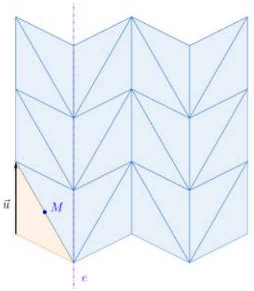
3. El ángulo que forman dos lados consecutivos de un polígono regular de n lados viene dado por la expresión

$$\alpha = 180° - \frac{360°}{n}$$

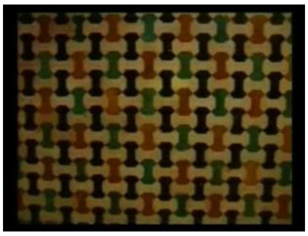
Un teselado semirregular está formado por la concurrencia de dos o más tipos de polígonos regulares en cada vértice. Teniendo en cuenta el valor de los ángulos, investiga cuántos teselados semirregulares existen.

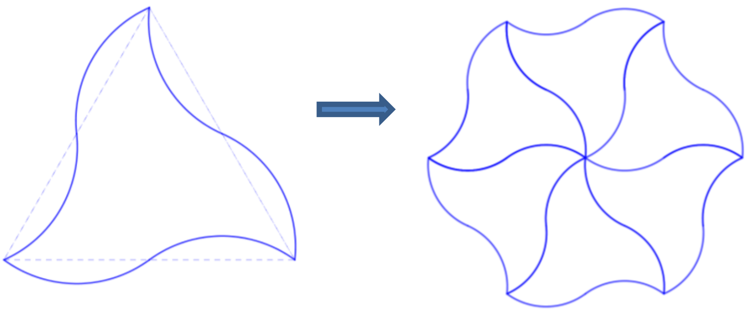
Orden	Mosaico	Suma de ángulos	Figura
3	3,12,12	60° + 150° + 150°	
3	4,6,12	90° + 120° + 150°	
3	4,8,8	90° + 135°+ 135°	
4	3,6,3,6	60° + 120° + 60° + 120°	
4	3,4,6,4	60° + 90° + 120° + 90°	
5	3,3,3,3,6	60° + 60°+ 60°+ 60°+ 120°	
5	3,3,3,4,4	60° + 60° + 60° + 90°+ 90°	
5	3,3,4,3,4	60° + 60° + 90° + 60° + 90°	

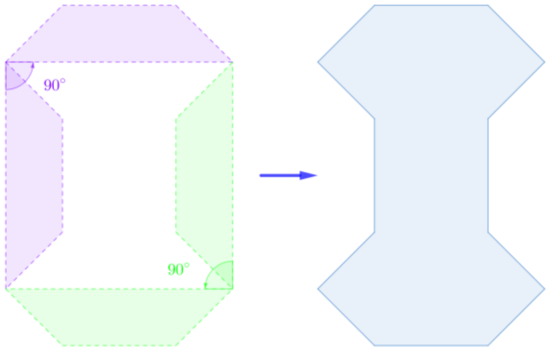
4. Un paralelogramo genera siempre un teselado irregular. Utiliza una ventana de Geogebra para a partir de un triángulo cualquiera y la traslación, el giro y las simetrías producir un teselado del plano.



5. Los polígonos regulares que producen teselaciones se pueden modificar para presentar formas regulares más creativas, como la pajarita nazarí a partir del triángulo equilátero o el hueso nazarí a partir del cuadrado. Investigad cómo modificar el triángulo equilátero para construir un mosaico a base de pajaritas nazaríes y cómo modificar un cuadrado para construir un mosaico a base de huesos nazaríes. Buscad fotos de los mosaicos de La Alhambra y comparadlos con los que habéis creado.





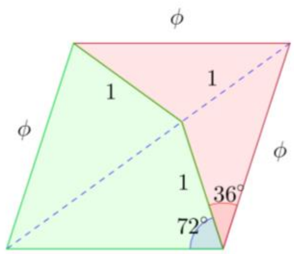


6. Un teselado es periódico si se puede delimitar en él una región que recubre el plano por traslación. Si la teselación no se puede generar mediante traslación, se dice que es aperiódica. Existen infinidad de contornos que pavimentan el plano tanto periódica como aperiódicamente. En la figura se observa un teselado periódico creado por M.C. Escher. Busca en Internet distintos teselados periódicos de Escher y en cada uno identifica el motivo que se repite periódicamente.

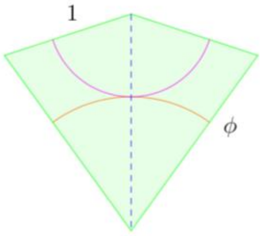
Una solución la puedes encontrar en la dirección

https://www.geogebra.org/m/dAqNKuXH#material/QX6K3DgE

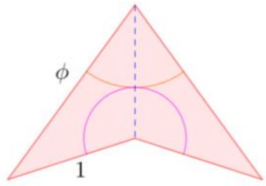
7. Investiga cómo se puede teselar el plano de forma aperiódica con la pareja de teselas de Penrose obtenidas a partir de un rombo de lado $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y ángulos de 72° y 108°. Observa que en la teselación aperiódica el giro y las simetrías están permitidos.



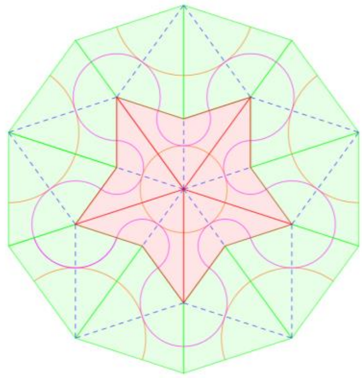
Rombo



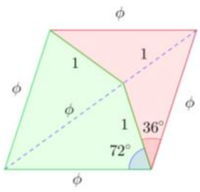
"Cometa"



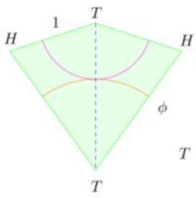
"Dardo"



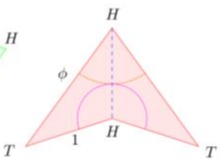
A partir del rombo de ángulos 72° y 108° y lado igual al número de oro se divide la diagonal mayor según la razón áurea y unimos ese punto con los vértices de la diagonal menor. Cada segmento de la figura mide 1 o ϕ. El ángulo más pequeño mide 36° y todos los demás son múltiplos de él. Evidentemente, el rombo produce un embaldosado periódico, pero no está permitido unir las piezas de ese modo. Se pueden marcar los vértices con las letras H y T como en la figura, y establecer la regla de que solo se pueden adosar lados de modo que entren en contacto vértices con el mismo nombre.



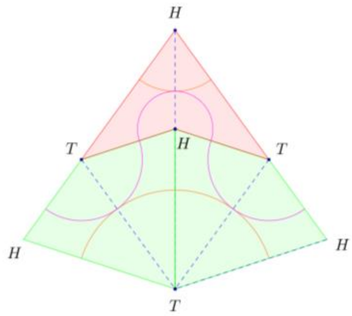
Rombo



"Cometa"

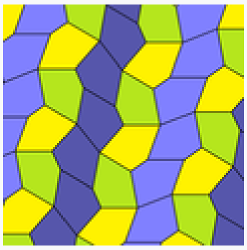
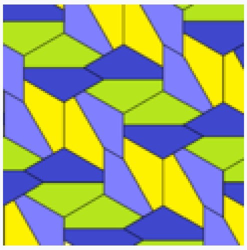
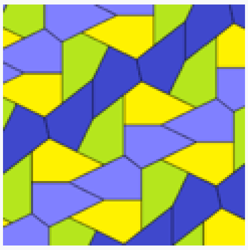
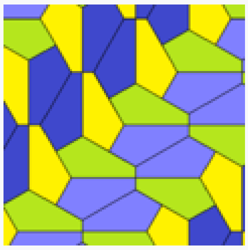
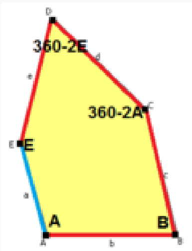
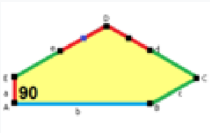
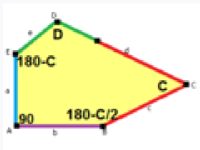
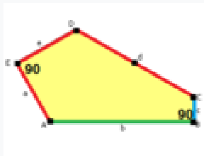


"Dardo"



8. Marjorie Rice. Descubre en Internet la historia de esta ama de casa, "matemática aficionada", que en los ratos libres que le dejaba la dedicación a su familia investigaba con una notación propia las condiciones que debía verificar un pentágono para teselar el plano. Entre 1976 y 1977 descubrió cuatro de los quince tipos de pentágonos que teselan el plano con una única loseta. (Todavía en revisión la confirmación de que sólo hay quince)

Las cuatro clases de teselas pentagonales descubiertas por Marjorie Rice

<table>
<tr><th>Tipo 9</th><th>Tipo 11</th><th>Tipo 12</th><th>Tipo 13</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td>
b = c = d = e
2A + C = D + 2E = 360°</td>
<td>
2a + c = d = e
A = 90°, 2B + C = 360°
C + E = 180°</td>
<td>
2a = d = c + e
A = 90°, 2B + C = 360°
C + E = 180°</td>
<td>
d = 2a = 2e
B = E = 90°, 2A + D = 360°</td>
</tr>
</table>