2. La Circunferencia

1. Halla la ecuación de la circunferencia en cada caso:

a) Tiene centro en $C(3,5)$ y radio $r=4$

b) Tiene centro en $C(-1,3)$ y pasa por $P(4,2)$

c) Uno de sus diámetros tiene extremos $P(2,5)$ y $Q(6,2)$.

d) Pasa por $P(1,-1)$ y $Q(3,1)$ y tiene radio $r=\sqrt{10}$

e) Pasa por $A(-2,-1)$, $B(0,3)$ y $C(4,1)$.

a) La ecuación es: $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2-6\boldsymbol{x}-10\boldsymbol{y}+18=0$

b) La ecuación es: $x^2+y^2+2x-6y-16=0$

c) La ecuación es: $x^2+y^2-8x-7y+22=0$

d) Hay dos soluciones, una con centro en: $C_1(4,-2)\Rightarrow x^2+y^2-8x+4y+10=0$

Y otra con centro en $C_2(0,2)\Rightarrow x^2+y^2-4y-6=0$

e) La ecuación es: $x^2+y^2-2x-9=0$

2. Determina el centro y el radio de la circunferencia $2x^2+2y^2-6x+10y-9=0$

$C\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right) r=\sqrt{13}$

3. Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(-1,2)$, $B(3,4)$ y $C(1,-2)$. Después determina su centro y su radio.

La ecuación es: $x^2+y^2-4x-2y-5=0\Rightarrow\begin{cases}C(2,1)\\ r=\sqrt{10}\end{cases}$

4. Determina el eje radical de $c_1: x^2+y^2-2x-4y-11=0$ y $c_2: 2x^2+2y^2+3x+5y-8=0$.

$7x+13y+14=0$

5. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia $c: x^2+y^2+4x+2y-8=0$ por el punto $P(1,1)$.

La ecuación de la recta normal: $n: 2x-3y+1=0$

La ecuación de la recta tangente: $t: 3x+2y-5=0$

6. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $c: x^2+y^2-4=0$ trazadas desde el punto $P(-14,8)$.

Las dos rectas tangentes pedidas son:

$$y-8=\frac{-5}{12}(x+14) \quad e \quad y-8=\frac{-3}{4}(x+14)$$

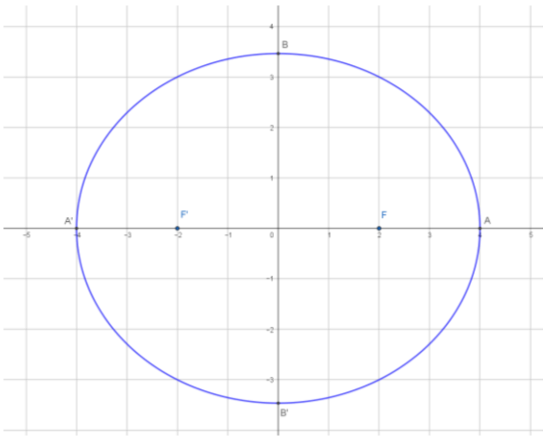
3. La Elipse

7. Halla los focos y los vértices y determina el valor de los ejes y la distancia focal de las siguientes elipses, dibujando sus gráficas:

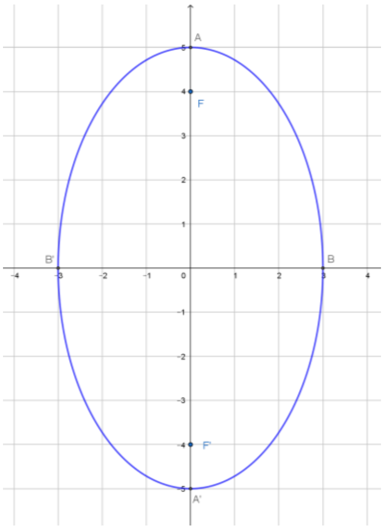
a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ **b)** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ **c)** $9x^2+4y^2=36$

d) $x^2+4y^2=16$ **e)** $x^2=4-4y^2$ **f)** $20x^2+4y^2=5$

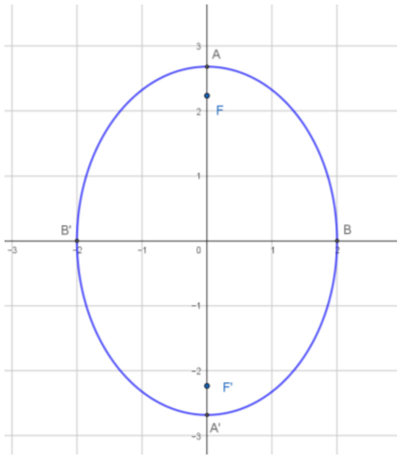
a) Los focos son los puntos $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$. Los vértices sobre el eje mayor son $A(4,0)$ y $A'(-4,0)$ y los vértices en el eje menor son: $B(0,2\sqrt{3})$ y $B'(0,-2\sqrt{3})$.



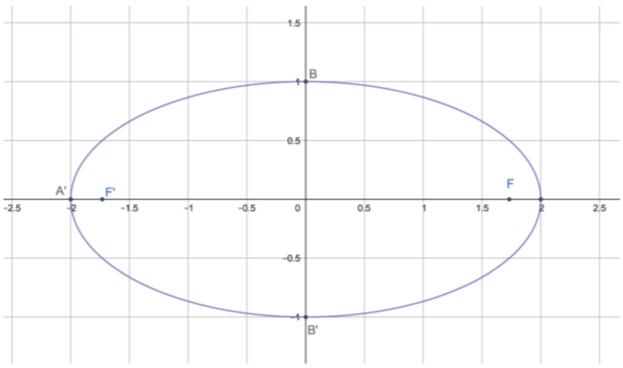
b) Los focos son los puntos $F(0,4)\,y\,F'(0,-4)$. Los vértices sobre el eje mayor son $A(0,5)\,y\,A'(0,-5)$ y los vértices en el eje menor son $B(3,0)\,y\,B'(-3,0)$.



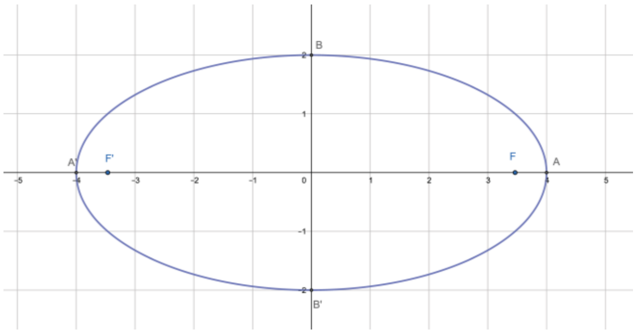
c) Los focos son los puntos $F\left(0,\sqrt{5}\right)y\,F'\left(0,-\sqrt{5}\right)$. Los vértices sobre el eje mayor son $A(0,3)\,y\,A'(0,-3)$ y los vértices en el eje menor son $B(2,0)\,y\,B'(-2,0)$.



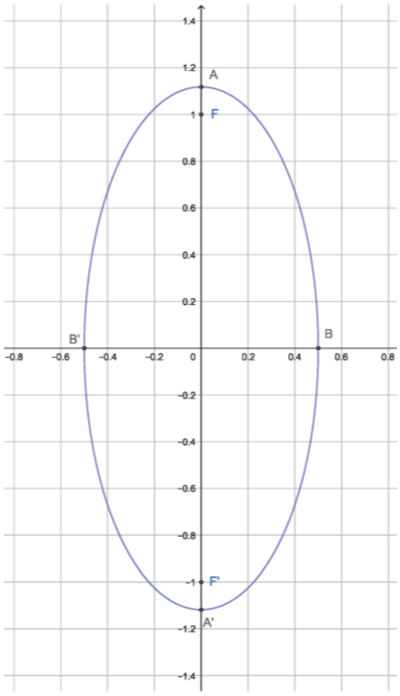
d) Los focos son los puntos $F\left(2\sqrt{3},0\right)y\,F'\left(-2\sqrt{3},0\right)$. Los vértices sobre el eje mayor son $A(4,0)\,y\,A'(-4,0)$ y los vértices en el eje menor son $B(0,2)\,y\,B'(0,-2)$.



e) Los focos son los puntos $F\left(\sqrt{3},0\right) y\, F'\left(-\sqrt{3},0\right)$. Los vértices sobre el eje mayor son $A(2,0)\, y\, A'(-2,0)$ y los vértices en el eje menor son $B(0,1)\, y\, B'(0,-1)$.

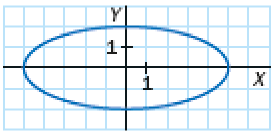


f) Los focos son los puntos $F(0,1)\, y\, F'(0,-1)$. Los vértices sobre el eje mayor son $A\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right) y\, A'\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ y los vértices en el eje menor son $B\left(\frac{1}{2},0\right) y\, B'\left(\frac{-1}{2},0\right)$.

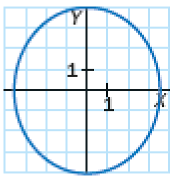


8. Halla las ecuaciones de las elipses cuyas gráficas son:

a)



b)



a) La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

b) La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$.

9. Calcula los focos, los vértices y la excentricidad de las siguientes elipses:

a) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$ **b)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$

c) $x^2+3y^2=27$ **d)** $9x^2+4y^2=1$

a) Los focos son los puntos $F(2,0)\,y\,F'(-2,0)$.

Los vértices sobre el eje mayor son $A\left(2\sqrt{3},0\right)y\,A'\left(-2\sqrt{3},0\right)$ y los vértices en el eje menor son $B\left(0,2\sqrt{2}\right)y\,B'\left(0,-2\sqrt{2}\right)$.

La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0,5773$

b) Los focos son los puntos $F(0,4)\,y\,F'(0,-4)$.

Los vértices sobre el eje mayor son $A\left(0,2\sqrt{5}\right)y\,A'\left(0,-2\sqrt{5}\right)$ y los vértices en el eje menor son $B(2,0)\,y\,B'(-2,0)$.

La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\approx 0,8944$

c) Los focos son los puntos $F\left(3\sqrt{2},0\right)y\,F'\left(-3\sqrt{2},0\right)$.

Los vértices sobre el eje mayor son $A\left(3\sqrt{3},0\right)y\,A'\left(-3\sqrt{3},0\right)$ y los vértices en el eje menor son $B(0,3)\,y\,B'(0,-3)$.

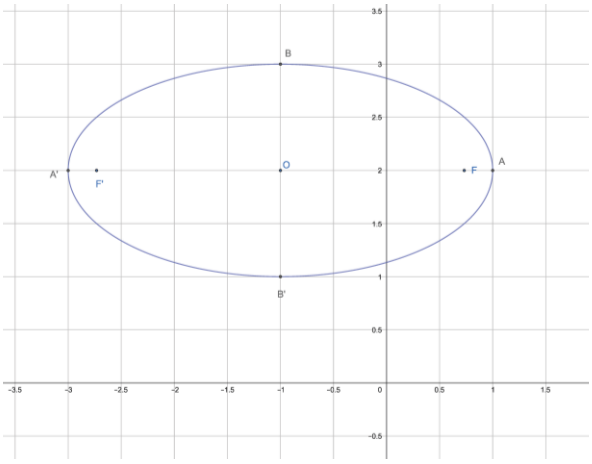
La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0,8165$

d) Los focos son los puntos $F\left(0,\frac{\sqrt{5}}{6}\right)y\,F'\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$.

Los vértices sobre el eje mayor son $A\left(0,\frac{1}{2}\right)y\,A'\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ y los vértices en el eje menor son $B\left(\frac{1}{3},0\right)y\,B'\left(-\frac{1}{3},0\right)$.

La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}/6}{1/2}=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0,7454$

10. Dada la elipse $x^2+4y^2+2x-16y+13=0$, halla su ecuación reducida, determina su centro de simetría, y calcula sus focos, vértices y excentricidad.



El centro de la elipse es $O(-1,2)$

Los focos son: $F\left(-1+\sqrt{3},2\right)$ y $F'\left(-1-\sqrt{3},2\right)$

Los vértices son: $A(1,2)\,y\,A'(-3,2)$ en el eje mayor y $B(-1,3)\,y\,B'(-1,1)$ en el eje menor

La excentricidad de la elipse es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,8660$.

11. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos $F(3,7)$ y $F'(3,1)$ es constante e igual a 10. Determina el centro de simetría, los vértices y la excentricidad.

La ecuación es: $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$

El centro es $O(3,4)$.

Los vértices de la elipse son: $A(3,9)\,y\,A'(3,-1)$ sobre el eje mayor y $B(7,4)\,y\,B'(-1,4)$ sobre el eje menor.

La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0,6$

12. Halla la ecuación de una elipse con centro en el punto $O(-5,3)$ y excentricidad $e=0,5$, si uno de los focos es el punto $F(0,3)$.

La ecuación es: $3x^2+4y^2+30x-24y-189=0$

13. Halla la ecuación de una elipse centrada en el origen cuya excentricidad es $e=0,6$ si uno de los vértices del eje menor es el punto $B(10,0)$.

La ecuación de la elipse es: $25x^2+16y^2-2500=0$

14. Halla el centro, los semiejes, los focos, los vértices y la excentricidad de la elipse $E:\ 16x^2+9y^2-18y-135=0$.

El centro de la elipse es $O(0,1)$

Los ejes son: $a=4; b=3; c=\sqrt{7}$

Los focos son: $F\left(0,1+\sqrt{7}\right)$ y $F'\left(0,1-\sqrt{7}\right)$

Los vértices son: $A(0,5)\,y\,A'(0,-3)$ en el eje mayor y $B(3,1)\,y\,B'(-3,1)$ en el eje menor

La excentricidad de la elipse es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}\approx 0,6614$.

15. Determina la ecuación, los focos, los vértices y la excentricidad de una elipse sabiendo que pasa por el punto $P(2,3)$ y que los vértices en el eje mayor son $A'(0,0)$ y $A(10,0)$.

La ecuación de la elipse es: $9x^2+16y^2-90x=0$

Los focos son: $F\left(5+\frac{5\sqrt{7}}{4},0\right)$ y $F'\left(5-\frac{5\sqrt{7}}{4},0\right)$

Los vértices en el eje menor son $B\left(5,\frac{15}{4}\right)y\,B'\left(5,-\frac{15}{4}\right)$

La excentricidad de la elipse es $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{5\sqrt{7}}{4}}{5}=\frac{\sqrt{7}}{4}\approx 0,6614$.

4. La Hipérbola

16. Halla los vértices, focos, excentricidad y asíntotas de las siguientes hipérbolas:

a) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ **b)** $\frac{(x+3)^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ **c)** $x^2-y^2=4$

a) Los vértices son $B(0,2)\,y\,B'(0,-2)$. Los focos son los puntos $F(0,3)\,y\,F'(0,-3)$.

La excentricidad es $e=1,5$

Las asíntotas son las rectas $\begin{cases} y=\frac{2}{\sqrt{5}}x \\ y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x \end{cases}$

b) Los focos son los puntos $F(7,0)\,y\,F'(-13,0)$ y los vértices son $A(3,0)\,y\,A'(-9,0)$

La excentricidad es $e\approx 1,6667$

Las asíntotas son las rectas $\begin{cases} y = \frac{4}{3}(x+3) \\ y = -\frac{4}{3}(x+3) \end{cases}$

c) Los focos son los puntos $F\left(2\sqrt{2},0\right) y F'\left(-2\sqrt{2},0\right)$ y los vértices son $A(2,0)\, y\, A'(-2,0)$

La excentricidad es $e \approx 1,4142$

Las asíntotas son las rectas $\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$

17. Encuentra la ecuación y las coordenadas de los vértices de la hipérbola cuyos focos son $F(-2,0)$ y $F'(2,0)$,y cuyas asíntotas son $y=\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}x$.

La ecuación de la hipérbola es $x^2 - 3y^2 = 3$

Los vértices de la hipérbola son $A\left(\sqrt{3},0\right) y A'\left(-\sqrt{3},0\right)$

18. Halla la ecuación y los focos de la hipérbola con vértices $B(0,2)$ y $B'(0,-2)$,y asíntotas $y = \pm 2x$.

Los focos son $F\left(0,\sqrt{5}\right) y F'\left(0,-\sqrt{5}\right)$

La ecuación de la hipérbola es $y^2 - 4x^2 - 4 = 0$

19. Halla el centro, los focos, los vértices, las asíntotas y la excentricidad de la hipérbola de ecuación $4x^2 - y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$.

El centro es el punto $O(-1,-3)$

Los focos son $F\left(-1,-3+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ y $F'\left(-1,-3-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

Los vértices: $B(-1,0)$ y $B'(-1,-6)$.

Las asíntotas son las rectas $\begin{cases} y = 2x-1 \\ y = -2x-5 \end{cases}$

La excentricidad es $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$

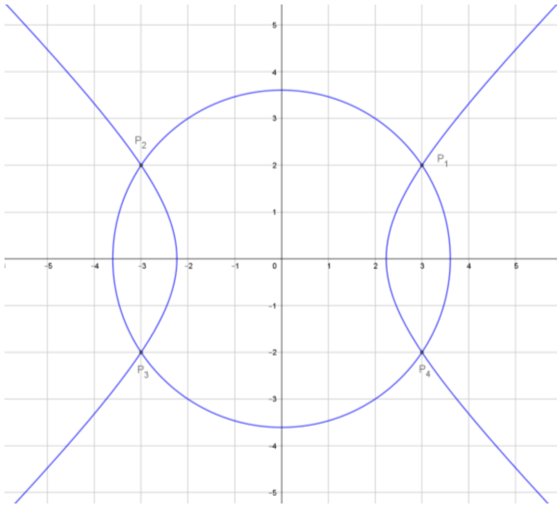
20. Halla la ecuación de la hipérbola con centro en el punto $O(-1,3)$, excentricidad $e=\sqrt{2}$, eje focal paralelo al eje de ordenadas y eje real $2b=8$.

La ecuación es: $y^2-x^2-6y-2x-8=0$

21. Calcula los puntos de corte entre la hipérbola $x^2-y^2=5$ y la circunferencia $x^2+y^2=13$. Comprueba tus soluciones con la gráfica de las dos cónicas realizada con GeoGebra.

Hay cuatro puntos de corte:

$P_1(3,2), P_2(-3,2), P_3(-3,-2)\, y\, P_4(3,-2)$



5. La Parábola

22. Halla el parámetro p, el vértice, el foco, el eje y la directriz de las siguientes parábolas:

a) $y^2=-4x$ **b)** $x^2=-\frac{1}{4}y$ **c)** $y=\frac{1}{3}x^2$

a) $p=-2 \quad V(0,0),\quad F(-1,0),\quad eje: y=0,\quad d: x=1$

b) $p=\frac{-1}{8} \quad V(0,0),\quad F\left(0,-\frac{1}{16}\right),\quad eje: x=0,\quad d: y=\frac{1}{16}$

c) $p=\frac{3}{2} \quad V(0,0),\quad F\left(0,\frac{3}{4}\right),\quad eje: x=0,\quad d: y=-\frac{3}{4}$

23. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $F(0,3)$ y de la recta $y=-3$. Determina las coordenadas del vértice y la ecuación de su eje de simetría.

$V(0,0)$. La ecuación es: $x^2 = 12y$.

24. Halla la ecuación reducida de la parábola con eje vertical que pasa por el punto $P(-2,-2)$.

La ecuación es: $x^2 = -2y$.

25. Determina la ecuación reducida de la parábola con parámetro $p = -\frac{1}{2}$ y eje horizontal.

La ecuación: $y^2 = -x$

26. Halla la ecuación y todos los elementos de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto $F\left(0,-\sqrt{2}\right)$.

Las coordenadas del foco, $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$.

$p = -2\sqrt{2}$.

La ecuación de la parábola es $x^2 = -4\sqrt{2}y$.

La directriz es la recta $y = \sqrt{2}$

Y el eje de simetría es el eje de ordenadas, $x = 0$

27. Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz $d: 2x + 3 = 0$.

La ecuación de la parábola es: $y^2 = 6x$

28. Determina las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a) Con foco en $F(3,2)$ y directriz $d: x = -3$

b) Con vértice en $V(2,1)$ y foco en $F(2,2)$

c) Cuya directriz es la recta $d: y = -1$ y el foco $F(-2,0)$

a) La ecuación es: $y^2 - 4y - 12x + 4 = 0$.

b) La ecuación es: $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$.

c) La ecuación es: $x^2 + 4x - 2y + 3 = 0$

29. Escribe las formas reducidas de las ecuaciones de las siguientes parábolas y halla todos sus elementos:

a) $(y+3)^2+4(x-1)=0$ **b)** $y=\frac{1}{2}x^2-3x+6$ **c)** $y^2+4x+4y-4=0$

d) $2x^2-3x+y-4=0$ **e)** $x^2-6x+2y+8=0$ **f)** $x+y=y^2$

a) $V(1,-3);\ p=-2$

Foco: $F(0,-3)$. Directriz: $d: x=2$. Eje: $e: y=-3$

b) $V\left(3,\frac{3}{2}\right);\ p=1$

Foco: $F(3,2)$. Directriz: $d: y=1$. Eje: $e: x=3$

c) $V(2,-2);\ p=-2$

Foco: $F(1,-2)$. Directriz: $d: x=3$. Eje: $e: y=-2$.

d) $V\left(\frac{3}{4},\frac{41}{8}\right);\ p=-\frac{1}{4}$

Foco: $F\left(\frac{3}{4},5\right)$. Directriz: $d: y=\frac{21}{4}$. Eje. $e: x=\frac{3}{4}$.

e) $V\left(3,\frac{1}{2}\right);\ p=-1$

Foco: $F(3,0)$. Directriz: $d: y=1$. Eje. $e: x=3$.

f) $V\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right);\ p=\frac{1}{2}$

Foco: $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Directriz: $d: x=-\frac{1}{2}$. Eje: $e: y=\frac{1}{2}$

30. Altura de un arco parabólico. Un arco parabólico tiene 23 m de altura y 24 m de base. Halla la altura del arco sobre el punto de la base situado a 8 m del centro.

La altura es $y\approx 12,78$

31. Vértice y foco de una antena parabólica. El receptor de una antena parabólica de televisión se encuentra a 1,4 m del vértice. Tomando unos ejes de coordenadas con el origen en el vértice, determina la ecuación de una sección transversal de la antena.

La ecuación de la sección transversal parabólica de la antena es:

- Si el eje es vertical: $x^2=5,6y$
- Si el eje es horizontal: $y^2=5,6x$

32. Caída de la carga desde un avión. Un avión de carga vuela a una altura de 6000 m y a una velocidad de 720 km/h. Se deja caer un paquete de suministros desde el avión. Considerando el origen del sistema de coordenadas el punto del suelo en la vertical del avión en el instante del lanzamiento, escribe una ecuación de la trayectoria del paquete. ¿A qué distancia del origen impactará el paquete en el suelo?

El paquete impacta en el suelo a 7 km del origen.

33. Lado recto y diámetro focal de una parábola. El segmento perpendicular al eje que pasa por el foco y tiene extremos en puntos de la parábola, se llama lado recto de la misma, y su longitud es el diámetro focal de la parábola. Demuestra que el diámetro focal de la parábola es el doble del valor absoluto del parámetro.

$$P_1P_2 = \sqrt{\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)^2 + \left(p-(-p)\right)^2} = \sqrt{(2p)^2} = 2p\ .$$

Actividades finales

Circunferencia

34. Determina la ecuación de la circunferencia en estos casos:

a) Tiene centro $C(-2,5)$ y radio $r=3$

b) Tiene centro en $C(3,-1)$ y pasa por $P(4,2)$

c) Tiene por diámetro el segmento de extremos $A(3,5)$ y $B(-3,1)$

d) Pasa por $P(-4,2)$ y $Q(0,2)$ y tiene radio $r=2$

e) Tiene centro en $C(5,1)$ y es tangente a la recta $x-y=0$.

a) $x^2+y^2+4x-10y+20=0$

b) $x^2+y^2-6x+2y=0$

c) $x^2+y^2-6y-4=0$

d) $x^2+y^2+4x-4y+4=0$

e) $x^2+y^2-10x-2y+18=0$

35. Determina la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los siguientes casos. Calcula después su centro y su radio. En cada caso, comprueba tu resultado y dibuja la gráfica con Geogebra:

a) $A(1,5)$, $B(5,3)$ y $C(3,-1)$

b) $A(-3,6)$, $B(1,0)$ y $C(-5,0)$

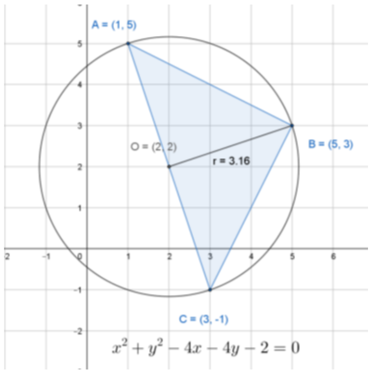
c) $A(1,1)$, $B(6,3)$ y $C(9,1)$

d) $A(1,4)$, $B(1,-8)$ y $C(7,-2)$

e) $A(-2,1)$, $B(-2,2)$ y $C(2,-2)$

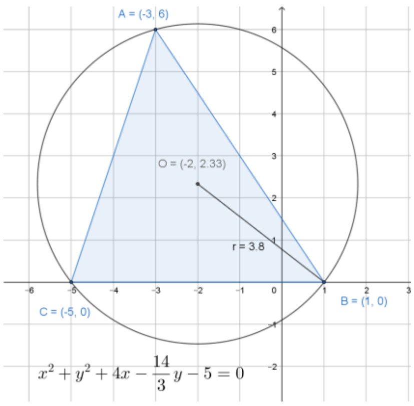
a) La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2+y^2-4x-4y-2=0 \Rightarrow \begin{cases} O(2,2) \\ r=\sqrt{10} \end{cases}$$



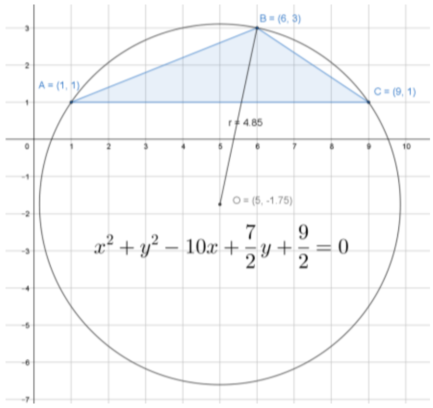
b) La ecuación de la circunferencia es:

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{130}{9} \Rightarrow \begin{cases} O\left(-2,\frac{7}{3}\right) \\ r=\dfrac{\sqrt{130}}{3} \end{cases}$$



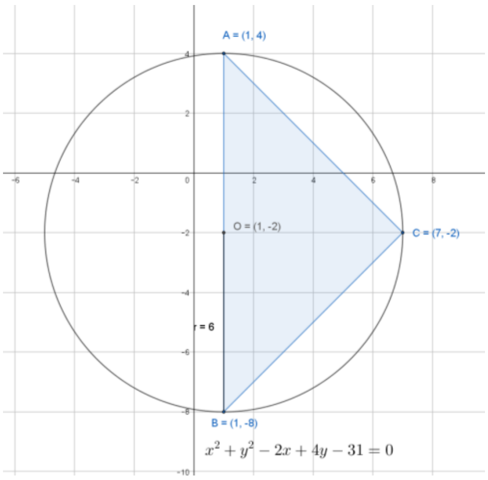
c) La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-5)^2+\left(y+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{337}{16}\Rightarrow\begin{cases}O\left(5,-\frac{7}{4}\right)\\ r=\frac{\sqrt{377}}{4}\end{cases}$$



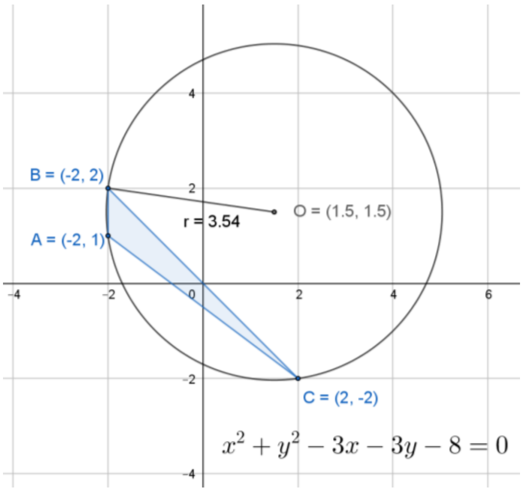
d) La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=36\Rightarrow\begin{cases}O(1,-2)\\ r=6\end{cases}$$



e) La ecuación de la circunferencia es:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\Rightarrow\begin{cases} O\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) \\ r=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$



36. Determina si las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias. En caso afirmativo, halla su centro y su radio:

a) $x^2+y^2-4x+6y+16=0$

b) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

c) $2x^2+2y^2-3x-4y+4=0$

d) $3x^2+3y^2-6x+3y+2=0$

e) $16x^2+16y^2-64x-32y+55=0$

a) La ecuación no corresponde a una circunferencia.

b) Se trata de la circunferencia con centro en $C(2,-3)$ y radio $r=5$.

c) La ecuación no corresponde a una circunferencia.

d) Es la circunferencia con centro en $C\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ y radio $r=\frac{\sqrt{21}}{6}$.

e) La ecuación es la de la circunferencia con centro en $C(2,1)$ y radio $r=\frac{5}{4}$.

37. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(1,4)$ y $Q(5,2)$ sabiendo que su centro pertenece a la recta de ecuación $r:2x+5y+9=0$.

La ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2-x+4y-32=0$

38. Determina la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta de ecuación $t:2x+y-5=0$ en el punto $T(2,1)$, sabiendo que su radio vale $r=2\sqrt{5}$. ¿Cuántas soluciones hay?

Hay dos circunferencias. Una con centro en $C_1(-2,-1)$ y otra con centro en $C_2(6,3)$.

Las ecuaciones son: $x^2+y^2+4x+2y-15=0$
$x^2+y^2-12x-6y+25=0$

39. Determina la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta de ecuación $t: 2x+y-5=0$ en el punto $T(2,1)$, sabiendo que pasa por el punto $P(4,-1)$ ¿Cuántas soluciones hay?

La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2-12x-6y+25=0$

40. Halla la ecuación de la circunferencia, c, que pasa por los puntos $P(0,2)$ y $Q(0,-2)$ y es tangente a $t: y=2x+2$. Halla la ecuación de la simétrica de c respecto de t.

La ecuación de la circunferencia es:

$x^2+y^2-8x-4=0$

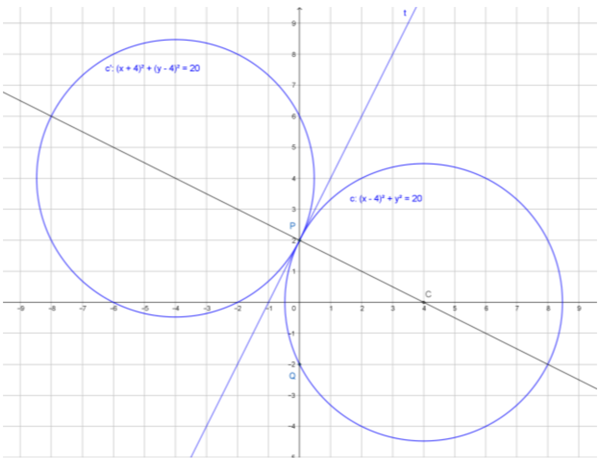
La ecuación de la simétrica es: $x^2+y^2+8x-8y+12=0$

41. Dados los puntos $C(3,2)$ y $P(-1,-1)$, halla

a) La ecuación de la circunferencia que tiene su centro en *C* y pasa por *P*.

b) La ecuación de la recta tangente a la circunferencia por *P*.

c) La ecuación de la recta normal a la circunferencia por *P*.



a) La ecuación es $x^2+y^2-6x-4y-12=0$

b) La ecuación de la tangente es $4x+3y+7=0$

c) La recta normal es la recta que pasa por P y por C. $n: 3x-4y-1=0$

42. Halla la ecuación de la circunferencia que es tangente a las rectas $r: 3x+2y-5=0$ y $s: 3x-2y-1=0$ si tiene su centro en la recta $n: 2x+3y+13=0$. ¿Cuántas soluciones hay?

Las ecuaciones de las dos circunferencias son: $x^2+y^2+16x-2y+\frac{116}{13}=0$

$$x^2+y^2-2x+10y+\frac{194}{13}=0$$

43. Determina la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de vértices $A(-5,4)$, $B(7,8)$ y $C(10,-1)$.

La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2-10x-8y+31=0$

44. Halla la distancia desde el centro de la circunferencia cuya ecuación es $x^2+y^2+4x+6y-12=0$ a las rectas $r: 4x+3y-8=0$, $s: 5x-12y+8=0$ y $t: 3x+4y-8=0$. Compara los resultados obtenidos con el radio de la circunferencia y decide la posición relativa de cada recta respecto de la circunferencia.

$d(C,r)=5=r \Rightarrow$ La recta *r* es tangente a la circunferencia.

$d(C,s)=\frac{34}{13}<5=r \Rightarrow$ La recta *s* es secante a la circunferencia.

$d(C,t)=\frac{26}{5}>5=r \Rightarrow$ La recta *t* es exterior a la circunferencia.

45. Calcula la potencia del punto $P(3,5)$ respecto de la circunferencia con centro en $C(-1,2)$ y radio $r=3$. En función del resultado, determina la posición relativa de P respecto de la circunferencia.

$pot(P,c)=16>0 \Rightarrow$ *P* es exterior a la circunferencia.

46. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(3,5)$ y tiene radio 5 sabiendo que su centro se encuentra sobre la recta de ecuación $y=3x+1$.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y-24=0 \\ x^2+y^2-6x-20y+84=0 \end{cases}$$

Elipses e Hipérbolas

47. Halla la ecuación reducida (con centro en el origen) de la elipse en cada caso:

a) $a=4$, $b=3$. Focos sobre el eje OX

b) $a=4$, $b=3$. Focos sobre el eje OY

c) Foco en $F(0,2)$ y vértice del eje mayor en $A(0,3)$

d) Foco en $F(4,0)$ y excentricidad $e=0,8$.

e) Focos sobre el eje OX, $a=17$ y $c=15$.

a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow 9x^2+16y^2-144=0$

b) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1 \Rightarrow 16x^2+9y^2-144=0$

c) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow 9x^2+5y^2-45=0$

d) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow 9x^2+25y^2-225=0$

e) $\dfrac{x^2}{289}+\dfrac{y^2}{64}=1 \Rightarrow 64x^2+289y^2-18496=0$.

48. Halla los semiejes, focos, vértices y excentricidad de las siguientes elipses:

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ **c)** $2x^2+3y^2=6$

d) $9x^2+4y^2=6$ **e)** $x^2+4y^2=1$ **f)** $3x^2+2y^2=1$

a) $a=5; b=3; c=4$

Los focos son los puntos $F(4,0)$ y $F'(-4,0)$. Los vértices son $A(5,0)$ y $A'(-5,0)$ en el eje mayor, y $B(0,3)\, y\, B'(0,-3)$ en el eje menor. La excentricidad de la elipse es $e=0,8$.

b) $a=4; b=2; c=2\sqrt{3}$

Los focos son los puntos $F\left(0,2\sqrt{3}\right)$ y $F'\left(0,-2\sqrt{3}\right)$. Los vértices son $A(0,4)$ y $A'(0,-4)$ en el eje mayor, y $B(2,0)\, y\, B'(-2,0)$ en el eje menor. La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,866$.

c) $a=\sqrt{3}; b=\sqrt{2}; c=1$

Los focos son los puntos $F(1,0)$ y $F'(-1,0)$. Los vértices son $A\left(\sqrt{3},0\right)$ y $A'\left(-\sqrt{3},0\right)$ en el eje mayor, y $B\left(0,\sqrt{2}\right) y\, B'\left(0,-\sqrt{2}\right)$ en el eje menor. La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,5774$.

d) $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}; b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}; c=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

Los focos son los puntos $F\left(0,\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$ y $F'\left(0,-\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$. Los vértices son $A\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ y $A'\left(0,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ en el eje mayor, y $B\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0\right) y B'\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ en el eje menor. La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,7454$.

e) $a=1; b=\frac{1}{2}; c=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Los focos son los puntos $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ y $F'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. Los vértices son $A(1,0)$ y $A'(-1,0)$ en el eje mayor, y $B\left(0,\frac{1}{2}\right) y B'\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ en el eje menor. La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,866$.

f) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}; b=\frac{\sqrt{3}}{3}; c=\frac{\sqrt{6}}{6}$

Los focos son los puntos $F\left(0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ y $F'\left(0,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. Los vértices son $A\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $A'\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en el eje mayor, y $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right) y B'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ en el eje menor. La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,5774$.

49. Determina la ecuación de la elipse en cada caso:

a) Centro en $C(3,1)$, foco en $F(3,4)$ y excentricidad $e=0,25$.

b) Centro en $C(-2,2)$, vértice en $A(-2,-1)$ y pasa por el origen.

c) Vértices en $A'(0,4)$ y $A(4,4)$; eje menor de longitud 2.

d) Focos en $F(2,1)$ y $F'(2,5)$ y excentricidad $e=\frac{1}{3}$

e) Vértice en el eje mayor $A(5,12)$ y en el menor $B(9,6)$.

a) La ecuación de la elipse es $\frac{(x-3)^2}{135}+\frac{(y-1)^2}{144}=1$.

b) La ecuación de la elipse es $\frac{(x+2)^2}{36/5}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$.

c) La ecuación de la elipse es $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{1}=1$.

d) La ecuación de la elipse es $\frac{(x-2)^2}{32}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$.

e) La ecuación de la elipse es $\frac{(x-5)^2}{4^2}+\frac{(y-6)^2}{6^2}=1$

50. Halla el centro, los semiejes, los focos, vértices y excentricidad de las siguientes elipses:

a) $\frac{(x+5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

b) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

c) $\frac{(x-1)^2}{9/4}+\frac{(y-1)^2}{1/4}=1$

d) $(x-2)^2+\frac{(y-4)^2}{9}=1$

e) $x^2+4y^2-6x+20y-28=0$

f) $9x^2+4y^2-54x+40y-109=0$

a) El centro es el punto $C(-5,2)$. Los semiejes son $a=5; b=4; c=3$

El eje mayor es paralelo al eje OX, por tanto, los focos son $F(-2,2)$ y $F'(-8,2)$

Los vértices en el eje mayor son $A(0,2)$ y $A'(-10,2)$, y en el eje menor $B(-5,6)$ y $B'(-5,-2)$

La excentricidad de la elipse es $e=0,6$.

b) El centro es el punto $C(3,3)$. Los semiejes son $a=4; b=3; c=\sqrt{7}$.

El eje mayor es paralelo al eje OY, por tanto, los focos son $F\left(3,3+\sqrt{7}\right)$ y $F'\left(3,3-\sqrt{7}\right)$

Los vértices en el eje mayor son $A(3,7)$ y $A'(3,-1)$, y en el eje menor $B(6,3)$ y $B'(0,3)$

La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,6614$.

c) El centro es el punto $C(1,1)$. Los semiejes son $a=\frac{3}{2}; b=\frac{1}{2}; c=\sqrt{2}$.

El eje mayor es paralelo al eje OX, por tanto, los focos son $F\left(1+\sqrt{2},1\right)$ y $F'\left(1-\sqrt{2},1\right)$

Los vértices en el eje mayor son $A\left(\frac{5}{2},1\right)$ y $A'\left(\frac{-1}{2},1\right)$, y en el eje menor $B\left(1,\frac{3}{2}\right)$ y $B'\left(1,\frac{1}{2}\right)$

La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,9428$.

d) El centro es el punto $C(2,4)$. Los semiejes son $a=3; b=1; c=2\sqrt{2}$.

El eje mayor es paralelo al eje OY, por tanto, los focos son $F\left(2,4+2\sqrt{2}\right)$ y $F'\left(2,4-2\sqrt{2}\right)$

Los vértices en el eje mayor son $A(2,7)$ y $A'(2,1)$, y en el eje menor $B(3,4)$ y $B'(1,4)$

La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,9428$.

e) El centro es el punto $C\left(3,\frac{-5}{2}\right)$. Los semiejes son $a=8; b=4; c=4\sqrt{3}$.

El eje mayor es paralelo al eje OX, por tanto, los focos son $F\left(3+4\sqrt{3},\frac{-5}{2}\right)$ y $F'\left(3-4\sqrt{3},\frac{-5}{2}\right)$

Los vértices en el eje mayor son $A\left(11,\frac{-5}{2}\right)$ y $A'\left(-5,\frac{-5}{2}\right)$, y en el eje menor $B\left(3,\frac{3}{2}\right)$ y $B'\left(3,\frac{-13}{2}\right)$

La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,866$.

f) El centro es el punto $C(3,-5)$. Los semiejes son $a=3\sqrt{2}; b=2\sqrt{2}; c=\sqrt{10}$.

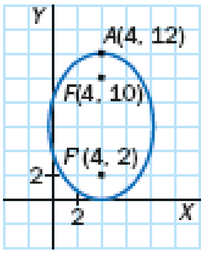
El eje mayor es paralelo al eje OY, por tanto, los focos son $F\left(3,-5+\sqrt{10}\right)$ y $F'\left(3,-5-\sqrt{10}\right)$

Los vértices en el eje mayor son $A\left(3,-5+3\sqrt{2}\right)$ y $A'\left(3,-5-3\sqrt{2}\right)$, y en el eje menor $B\left(3+2\sqrt{2},-5\right)$ y $B'\left(3-2\sqrt{2},-5\right)$

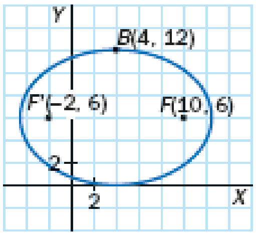
La excentricidad de la elipse es $e\approx 0,7454$.

51. Determina las ecuaciones de las elipses cuyas gráficas son:

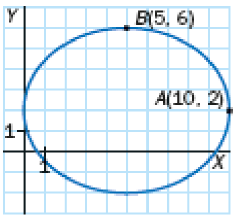
a)



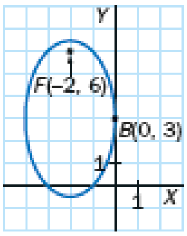
b)



c)



d)



a) La ecuación de la elipse es $\frac{(x-4)^2}{20}+\frac{(y-6)^2}{36}=1$

b) La ecuación de la elipse es $\frac{(x-4)^2}{72}+\frac{(y-6)^2}{36}=1$.

c) La ecuación de la elipse es $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$.

d) La ecuación de la elipse es $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{13}=1$.

52. Halla la ecuación reducida de la hipérbola que verifica las siguientes condiciones:

a) Focos en $(\pm 5, 0)$ y vértices en $(\pm 4, 0)$

b) Focos en $(0, \pm 4)$ y vértices en $(0, \pm 3)$

c) Asíntotas $y=\pm 2x$ y vértices en $(\pm 3, 0)$

d) Excentricidad $e=1,2$ y focos en $(0, \pm 3)$

e) Vértices en $\left(\pm 2\sqrt{3}, 0\right)$ y pasa por $P(4, 4)$

a) La ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow 9x^2-16y^2-144=0$

b) La ecuación de la hipérbola es $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1 \Rightarrow 7y^2-9x^2-63=0$

c) La ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1 \Rightarrow 4x^2-y^2-36=0$.

d) La ecuación de la hipérbola es $\frac{y^2}{25/4}-\frac{x^2}{11/4}=1 \Rightarrow 44y^2-100x^2-275=0$.

e) La ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{48}=1 \Rightarrow 4x^2-y^2-48=0$.

53. Halla los focos, vértices, asíntotas y excentricidad de la hipérbola cuya ecuación es, en cada caso:

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$

c) $9x^2-4y^2=6$

d) $4y^2-x^2=1$

e) $x^2-y^2=1$

f) $9x^2-16y^2=1$

a) Los focos son los puntos $F(5,0)$ y $F'(-5,0)$. Los vértices son $A(4,0)$ y $A'(-4,0)$.

Las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{3}{4}x$, y la excentricidad es $e=1,25$.

b) Los focos son los puntos $F\left(\sqrt{7},0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{7},0\right)$. Los vértices son $A\left(\sqrt{3},0\right)$ y $A'\left(-\sqrt{3},0\right)$.

Las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}x$, y la excentricidad es $e\approx 1,5275$.

c) Los focos son los puntos $F\left(\frac{\sqrt{78}}{6},0\right)$ y $F'\left(-\frac{\sqrt{78}}{6},0\right)$. Los vértices son $A\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ y $A'\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$

Las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{3}{2}x$, y la excentricidad es $e\approx 1,8028$.

d) Los focos son los puntos $F\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ y $F'\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. Los vértices son $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $B'\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

Las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{1}{2}x$, y la excentricidad es $e\approx 2,2361$

e) Los focos son los puntos $F\left(\sqrt{2},0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{2},0\right)$. Los vértices son $A(1,0)$ y $A'(-1,0)$.

Las asíntotas son las rectas $y=\pm x$, y la excentricidad es $e\approx 1,4142$.

f) Los focos son los puntos $F\left(\frac{5}{12},0\right)$ y $F'\left(-\frac{5}{12},0\right)$. Los vértices son $A\left(\frac{1}{3},0\right)$ y $A'\left(-\frac{1}{3},0\right)$.

Las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{3}{4}x$, y la excentricidad es $e=1,25$.

54. Determina la ecuación de la hipérbola en cada caso:

a) Focos en $F'(0,0)$ y $F(8,0)$. Vértices en $A'(3,0)$ y $A(5,0)$

b) Vértices en $A'(2,-3)$ y $A(2,3)$. Semidistancia focal $c=6$.

c) Asíntotas $y-1=\pm\frac{2}{3}(x+2)$. Distancia focal $2c=\sqrt{52}$

d) Asíntotas $y=x,\ y=4-x$. Vértice en $A(3,2)$

e) Eje real paralelo a OY, centro en $O(4,3)$, excentricidad $e=3$ y semieje transverso, $a=2$.

a) La ecuación de la hipérbola es $15x^2-y^2-120x+225=0$

b) La ecuación de la hipérbola es $3y^2-x^2+4x-31=0$.

c) Hay dos soluciones:

Con el eje real paralelo a OX: $4x^2-9y^2+16x-18y-29=0$

Con el eje real paralelo a OY: $9y^2-4x^2-18y-16x-43=0$.

d) La ecuación de la hipérbola es $x^2-y^2-4x+4y-1=0$.

e) La ecuación de la hipérbola es $8y^2-x^2-48y+8x+52=0$.

55. Halla el centro, los semiejes, los focos, vértices, asíntotas y excentricidad de las siguientes hipérbolas:

a) $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$

b) $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

c) $\frac{y^2}{25}-\frac{(x+4)^2}{9}=1$

d) $\frac{(y+1)^2}{1/4}-\frac{(x-2)^2}{1/9}=1$

e) $x^2-4y^2-6x+20y=0$

f) $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

a) El centro de la hipérbola es $C(4,-2)$. El eje real es paralelo al eje de abscisas. El semieje real es $a=2$, y el semieje imaginario es $b=4$.

Aplicando la relación fundamental de la hipérbola $c=2\sqrt{5}$.

Los focos son los puntos $F\left(4+2\sqrt{5},-2\right)$ y $F'\left(4-2\sqrt{5},-2\right)$, y los vértices son $A(6,-2)$ y $A'(2,-2)$

Las asíntotas son las rectas $y+2=\pm 2(x-4)$.

Y la excentricidad es $e\approx 2,2361$

b) El centro de la hipérbola es $C(-1,0)$. El eje real es paralelo al eje de abscisas. El semieje real es $a=3$, y el semieje imaginario es $b=4$.

Aplicando la relación fundamental de la hipérbola $c=5$.

Los focos son los puntos $F(4,0)$ y $F'(-6,0)$, y los vértices son $A(2,0)$ y $A'(-4,0)$.

Las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{4}{3}(x+1)$.

Y la excentricidad es $e\approx 1,6667$.

c) El centro de la hipérbola es $C(-4,0)$. El eje real es paralelo al eje de ordenadas. El semieje real es $b=5$, y el semieje imaginario es $a=3$.

Aplicando la relación fundamental de la hipérbola $c=\sqrt{34}$

Los focos son los puntos $F\left(-4,\sqrt{34}\right)$ y $F'\left(-4,-\sqrt{34}\right)$, y los vértices son $A(-4,5)$ y $A'(-4,-5)$.

Las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{5}{3}(x+4)$. Y la excentricidad es $e\approx 1,1662$.

d) El centro de la hipérbola es $C(2,-1)$. El eje real es paralelo al eje de ordenadas. El semieje real es $b=\frac{1}{2}$, y el semieje imaginario es $a=\frac{1}{3}$.

Aplicando la relación fundamental de la hipérbola $c=\frac{\sqrt{13}}{6}$.

Los focos son los puntos $F\left(2,-1+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)$ y $F'\left(2,-1-\frac{\sqrt{13}}{6}\right)$, y los vértices son $A\left(2,\frac{-1}{2}\right)$ y $A'\left(2,\frac{-3}{2}\right)$.

Las asíntotas son las rectas $y+1=\pm\frac{3}{2}(x-2)$. Y la excentricidad es: $e\approx 1,20185$.

e) El centro de la hipérbola es $C\left(3,\frac{5}{2}\right)$. El eje real es paralelo al eje de ordenadas. El semieje real es $b=2$, y el semieje imaginario es $a=4$.

Aplicando la relación fundamental de la hipérbola $c=2\sqrt{5}$.

Los focos son los puntos $F\left(3,\frac{5}{2}+2\sqrt{5}\right)$ y $F'\left(3,\frac{5}{2}-2\sqrt{5}\right)$, y los vértices son $A\left(3,\frac{9}{2}\right)$ y $A'\left(3,\frac{1}{2}\right)$.

Las asíntotas son las rectas $y-\frac{5}{2}=\pm\frac{1}{2}(x-3)$. Y la excentricidad es: $e\approx 2,2361$.

f) El centro de la hipérbola es $C(2,-3)$. El eje real es paralelo al eje de abscisas. El semieje real es $a=1$, y el semieje imaginario es $b=3$.

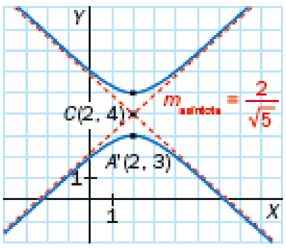
Aplicando la relación fundamental de la hipérbola $c=\sqrt{10}$.

Los focos son los puntos $F\left(2+\sqrt{10},-3\right)$ y $F'\left(2-\sqrt{10},-3\right)$, y los vértices son $A(3,-3)$ y $A'(1,-3)$.

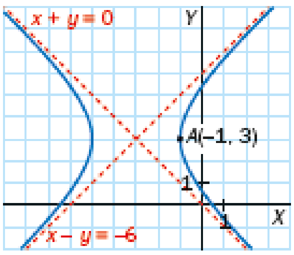
Las asíntotas son las rectas $y+3=\pm 3(x-2)$. Y la excentricidad es $e\approx 3,1623$.

56. Halla las ecuaciones de las hipérbolas cuyas gráficas son:

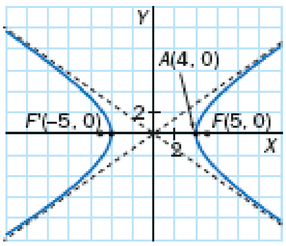
a)



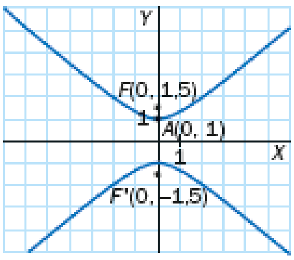
b)



c)



d)



a) La e ... es $\frac{(y-4)^2}{1}-\frac{(}{4}$

b) La ecuación de la hipérbola es $\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$.

c) La ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

d) La ecuación de la hipérbola es $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{5/4}=1$.

Parábolas

57. Halla la ecuación reducida de la parábola en los siguientes casos:

a) Foco en $F(3,0)$ y directriz $d: x+3=0$

b) Foco en $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y vértice en $V(0,0)$

c) Eje en *OY*, vértice en $V(0,0)$ y $p=-1$

d) Eje en *OX*, directriz $d: x-2=0$ y $p=-4$

e) Vértice en $V(0,0)$ y $d: y-2=0$.

a) La ecuación de la parábola es $y^2=12x$.

b) La ecuación de la parábola es $x^2=2y$.

c) La ecuación de la parábola es $x^2=-2y$

d) El vértice es el origen de coordenadas y la ecuación de la parábola es $y^2=-8x$

e) La ecuación de la parábola es $x^2=-8y$.

58. Halla el parámetro, vértice, eje, foco y directriz de las parábolas cuyas ecuaciones son las siguientes:

a) $x^2=8y$ **b)** $y^2=-4x$ **c)** $2y^2-5x=0$

d) $2x^2+3y=0$ **e)** $x^2-2y=0$ **f)** $\frac{1}{4}y^2=\frac{1}{3}x$

a) El parámetro es $p=4$. El vértice es $V(0,0)$, el foco es F$(0,2)$, el eje es la recta $e: x=0$, y la directriz es la recta $d: y=-2$

b) El parámetro es $p=-2$. El vértice es $V(0,0)$, el foco es F$(-1,0)$, el eje es la recta $e: y=0$, y la directriz es la recta $d: x=1$

c) El parámetro es $p=\frac{5}{4}$. El vértice es $V(0,0)$, el foco es $F\left(\frac{5}{8},0\right)$, el eje es la recta $e: y=0$, y la directriz es la recta $d: x=-\frac{5}{8}$.

d) El parámetro es $p=\frac{-3}{4}$. El vértice es $V(0,0)$, el foco es $F\left(0,\frac{-3}{8}\right)$, el eje es la recta $e: x=0$, y la directriz es la recta $d: y=\frac{3}{8}$.

e) El parámetro es $p=1$. El vértice es $V(0,0)$, el foco es $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$, el eje es la recta $e: x=0$, y la directriz es la recta $d: y=\frac{-1}{2}$.

f) El parámetro es $p=\frac{2}{3}$. El vértice es $V(0,0)$, el foco es $F\left(\frac{1}{3},0\right)$, el eje es la recta $e: y=0$, y la directriz es la recta $d: x=-\frac{1}{3}$.

59. Determina la ecuación de la parábola en cada caso:

a) Foco $F(2,5)$, directriz $d: x=0$

b) Vértice en $V(-1,3)$, parámetro $p=1$

c) Vértice en $V(-2,-3)$, foco en $F(-2,0)$

d) Foco en $F\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, parámetro $p=-1$, eje $e: x=-1$

e) Eje paralelo a *OY*, parámetro $p=-\frac{1}{4}$, foco en $F(3,1)$.

a) La ecuación de la parábola es: $y^2-4x-10y+29=0$.

b) El ejercicio tiene dos soluciones. Una con el eje horizontal y otra con el eje vertical.

- Con el eje paralelo a OX: $y^2-2x-6y+7=0$.
- Con el eje paralelo a OY: $x^2+2x-2y+7=0$.

c) La ecuación es: $x^2+4x-12y-32=0$.

d) La ecuación de la parábola es: $x^2+2x+2y-1=0$.

e) La ecuación de la parábola es: $16x^2-96x+8y+135=0$.

60. Halla el parámetro, vértice, eje, foco y directriz de las parábolas cuyas ecuaciones son:

a) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ **b)** $4y^2-6x+20y+1=0$ **c)** $3y^2-4x+6y+7=0$

d) $x^2-4x-12y+16=0$ **e)** $x^2+6x+12y+15=0$ **f)** $y^2=4(x+2y)$.

a) El vértice es $V(-1,1)$, el parámetro es $p=-1$, y el foco es $F\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

El eje es la recta $e: x=-1$, y la directriz es la recta $d: y=\frac{3}{2}$

b) El vértice es $V\left(-4,\frac{-5}{2}\right)$, el parámetro es $p=\frac{3}{4}$, y el foco es $F\left(\frac{-29}{8},\frac{-5}{2}\right)$

El eje es la recta $e: y=-\frac{5}{2}$, y la directriz es la recta $d: x=\frac{-35}{8}$

c) El vértice es $V(1,-1)$, el parámetro es $p=\frac{2}{3}$, y el foco es $F\left(\frac{4}{3},-1\right)$

El eje es la recta $e: y=-1$, y la directriz es la recta $d: x=\frac{2}{3}$

d) El vértice es $V(2,1)$, el parámetro es $p=6$, y el foco es $F(2,4)$.

El eje es la recta $e: x=2$, y la directriz es la recta $d: y=-2$.

e) El vértice es $V\left(-3,\frac{-1}{2}\right)$, el parámetro es $p=-6$, y el foco es $F\left(-3,\frac{-7}{2}\right)$.

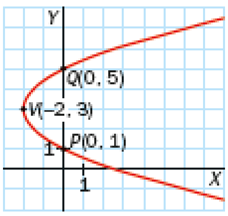
El eje es la recta $e: x=-3$, y la directriz es la recta $d: y=\frac{5}{2}$.

f) El vértice es $V(-4,4)$, el parámetro es $p=2$, y el foco es $F(-3,4)$

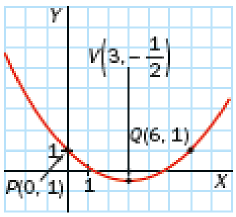
El eje es la recta $e: y=4$, y la directriz es la recta $d: x=-5$.

61. Determina las ecuaciones de las parábolas cuyas gráficas son:

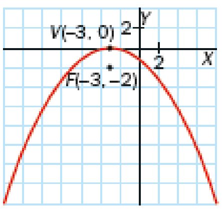
a)



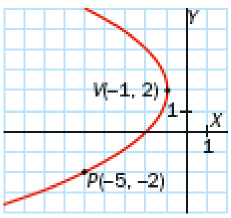
b)



c)



d)



a) La ecuación de la parábola es $(y-3)^2=2(x+2)\Rightarrow y^2-2x-6y+5=0$

b) La ecuación de la parábola es $(x-3)^2=6\left(y+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow x^2-6x-6y+6=0$

c) La ecuación de la parábola es $(x+3)^2=-8y\Rightarrow x^2+6x+8y+9=0$.

d) La ecuación de la parábola es $(y-2)^2=-4(x+1)\Rightarrow y^2+4x-4y+8=0$

62. Decide a qué tipo de cónica corresponde cada una de las siguientes ecuaciones y, en cada caso, determina sus elementos característicos:

a) $4x^2-4x-8y+9=0$

b) $3x^2+4y^2-6x+24y+27=0$

c) $3x^2+3y^2-6x+6y-20=0$

d) $x^2+20=4(y^2-2x)$

a) Se trata de una parábola con el eje paralelo al eje de ordenadas.

El vértice es $V\left(\frac{1}{2},1\right)$, el parámetro es $p=1$, y el foco es $F\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

El eje es la recta $e: x=\frac{1}{2}$, y la directriz es la recta $d: y=\frac{1}{2}$.

b) Se trata de una elipse.

Los focos son los puntos $F(2,-3)$ y $F'(0,-3)$. Los vértices son $A(3,-3)$ y $A'(-1,-3)$ en el eje mayor y $B\left(1,-3+\sqrt{3}\right)$ y $B'\left(1,-3-\sqrt{3}\right)$ en el eje menor.

La excentricidad es $e=0,5$

c) Se trata de una circunferencia.

El centro es $C(1,-1)$ y el radio es r = $\frac{\sqrt{78}}{3}$

d) Se trata de una hipérbola.

El eje real es paralelo al eje de ordenadas. El centro es el punto $C(-4,0)$. El semieje real es $b=1$ y el semieje imaginario $a=2$. Aplicando la relación fundamental de la hipérbola, $c=\sqrt{5}$

Los focos son $F\left(-4,\sqrt{5}\right)$ y $F'\left(-4,-\sqrt{5}\right)$. Los vértices son $B(-4,1)$ y $B'(-4,-1)$.

Las asíntotas son las rectas $y=\pm\frac{1}{2}(x+4)$, y la excentricidad es $e\approx 2,2361$

Aplicaciones

63. Eje radical. Halla el eje radical de las circunferencias de ecuaciones $c_1: x^2+y^2+2x-3=0$ y $c_2: x^2+y^2+4y-5=0$. Comprueba que es una recta perpendicular a la que une los centros de las dos circunferencias.

Un punto $X(x,y)$ pertenece al eje radical si su potencia respecto de las dos circunferencias es la misma.

64. Eje radical. Halla el eje radical de las circunferencias $c_1: x^2+y^2-5=0$ y $c_2: \begin{cases} C(2,5) \\ r=2 \end{cases}$.

$2x+5y-15=0$.

65. Centro radical. Dadas tres circunferencias cuyos centros no están alineados, existe un único punto del plano cuya potencia respecto de las tres es la misma. Se llama Centro Radical de las tres circunferencias. Calcula el centro radical de las circunferencias $c_1: x^2+y^2+2x+8y+8=0$, $c_2: x^2+y^2-10x+4y-7=0$ y $c_3: x^2+y^2-x+y-5=0$.

$$C.R.(c_1c_2c_3):\left(\frac{-53}{72},-\frac{37}{24}\right)$$

66. Tangentes a una circunferencia. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $c: x^2+y^2-6x-4y=0$ trazadas desde el punto $P(2,7)$.

Las ecuaciones de las tangentes son:

$t_1: 3x-2y+8=0$

$t_2: 2x+3y-25=0$

67. Tangentes a una circunferencia. Por el punto $P(6,6)$ trazamos las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-4x-2y-4=0$, siendo los puntos de tangencia T y T'. Halla la longitud del segmento PT. ¿Qué relación tiene con la potencia de *P* respecto de la circunferencia?

$$PT=\sqrt{pot(P,c)}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

68. Tangentes a una circunferencia. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(-1,2)$ y $B(0,1)$ y es tangente al eje de abscisas ¿Cuántas soluciones hay?

Hay dos soluciones distintas que son $\begin{cases} x^2+y^2-6x-10y+9=0 \\ x^2+y^2+2x-2y+1=0 \end{cases}$

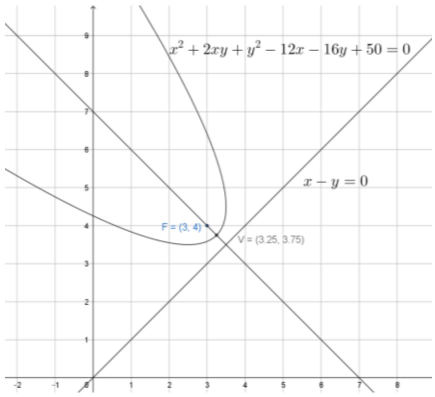
69. Tangentes a una circunferencia. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-6x+2y-3=0$ paralelas a la recta de ecuación $2x-3y+10=0$. Determina las coordenadas de los puntos de tangencia.

Las coordenadas de los puntos de tangencia son $\begin{cases} T_1(1,2) \\ T_2(5,-4) \end{cases}$

70. Parábola con el eje oblicuo. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $F(3,4)$ y de la recta $d: x-y=0$. Determina su eje (perpendicular a la directriz que pasa por el foco) y su vértice (punto medio entre el foco y la directriz; o también, intersección de la parábola con el eje).

El eje de esta parábola es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco: $x+y-7=0$

Y el vértice es el punto de corte de la parábola con el eje: $V\left(\frac{13}{4},\frac{15}{4}\right)$



71. Tangentes a una parábola. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola de ecuación $y^2+4x-4y+8=0$ trazadas desde el punto $P(1,1)$.

Las dos tangentes son $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

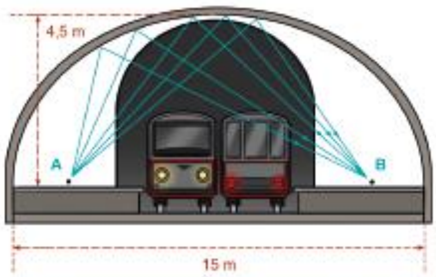
72. Mesa elíptica. Recortando un tablero rectangular de 288×144 mm deseamos construir una mesa con forma de elipse, de la mayor superficie posible. ¿En qué puntos se han de fijar los extremos de una cuerda para dibujar la elipse sobre el tablero, y cuál debe ser la longitud de la cuerda que debemos utilizar? ¿Qué excentricidad tendrá elipse obtenida?

Si tomamos como punto de referencia el centro del tablero, los puntos donde hay que fijar la cuerda, de 288 mm de longitud, están a 124,7 mm del centro sobre una línea paralela a su dimensión mayor.

La excentricidad de la elipse obtenida es $e \approx 0,866$

73. Rincón de los susurros. La bóveda de una estación de metro tiene forma semielíptica, de modo que las secciones verticales de la misma son semielipses. La distancia de pared a pared en la estación es de 15 m, y la altura en el centro del túnel es de 4,5 m. ¿A qué distancia de la pared deben colocarse dos personas, una en cada andén, para poder comunicarse en voz muy baja?

Deben colocarse a 1,5 m de cada pared.



74. Chimenea semielíptica. Se desea construir un arco de chimenea con forma semielíptica de modo que el hueco tenga una anchura en la base de 3 m y una altura máxima de 1 m. Para diseñar el arco sobre la pared, ¿en qué puntos habrá que fijar una cuerda y cuál deberá ser su longitud?

Los focos de la semielipse se encuentran en el suelo, a 38 cm de los extremos del hueco, y la longitud de la cuerda debe ser 3 m.

Un mundo matemático

1. Busca en Internet las distancias medias de cada uno de los planetas y Plutón al Sol. ¿Cuál es la distancia media de la Luna a la Tierra?

2. Elabora una hoja de cálculo en la que introduzcas los valores de las excentricidades de las órbitas, así como las distancias medias obtenidas en el apartado anterior.

3. Tomando como semieje mayor de cada órbita elíptica la distancia media de cada planeta al Sol obtenida en el apartado 1, y utilizando la excentricidad de cada una, calcula la semidistancia focal de cada elipse. Para ello, introduce una fórmula general en la hoja de cálculo que realice los cálculos de forma automática.

4. Determina el semieje menor de cada órbita planetaria.

5. Calcula las distancias al Sol de cada planeta en el afelio y en el perihelio. (En el caso de la Luna, su distancia a la Tierra en el apogeo y en el perigeo). ¿Con qué característica de la órbita identificas dichos puntos?

6. Investiga en Internet el valor de las distancias de cada planeta al Sol en el afelio y en el perihelio, y compara el valor encontrado con el valor calculado en el apartado anterior.

Planeta	Distancia (en UA)	Excentricidad	Datos Internet	Semidistancia Focal(UA)	Semieje Menor(UA)	Distancia Afelio(UA)	Dato Internet	Distancia Perihelio(UA)	Dato Internet	Afelio (Km)	Perihelio (Km)
Mercurio	0,39	0,20563069	0.206	0,080195969	0,381665569	0,470195969	0.47	0,309804031	0.31	7,052940E+07	4,647060E+07
Venus	0,72	0,00677323	0.007	0,004876726	0,719983484	0,724876726	0.728	0,715123274	0.718	1,087315E+08	1,072685E+08
Tierra	1	0,01671022	0.017	0,01671022	0,999860375	1,01671022	1.02	0,98328978	0.98	1,525065E+08	1,474935E+08
Luna[1]	0,00256	0,0549006	0,0549	0,000140546	0,002556139	0,002700546	0,0027	0,002419454	0,0024	4,050818E+05	3,629182E+05
Marte	1,52	0,09341233	0.093	0,141986742	1,513353814	1,661986742	1.67	1,378013258	1.38	2,492980E+08	2,067020E+08
Júpiter	5,2	0,04839266	0.048	0,251641832	5,193907622	5,451641832	5.45	4,948358168	4.95	8,177463E+08	7,422537E+08
Saturno	9,54	0,0541506	0.056	0,516596724	9,52600272	10,05659672	10.0	9,023403276	9.02	1,508490E+09	1,353510E+09
Urano	19,18	0,04716771	0.047	0,904676678	19,15865236	20,08467668	20.1	18,27532332	18.3	3,012702E+09	2,741298E+09
Neptuno	30,06	0,00858587	0.009	0,258091252	30,05889201	30,31809125	30.3	29,80190875	30.0	4,547714E+09	4,470286E+09
Plutón	39,44	0,24880766	0.248	9,81297411	38,19972695	49,25297411	49.9	29,62702589	29.7	7,387946E+09	4,444054E+09