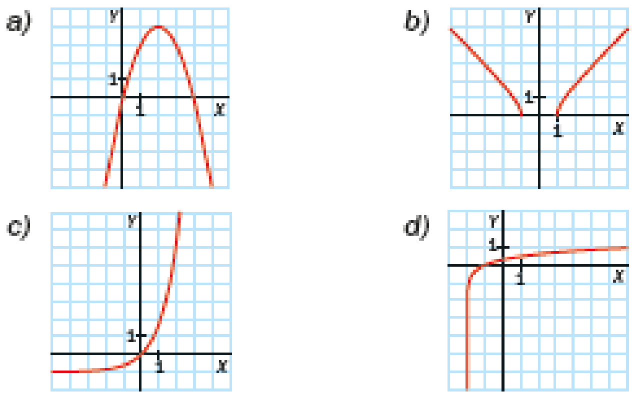
2 Dominio y recorrido

1. Observa las siguientes gráficas y determina el dominio y el recorrido de las funciones correspondientes:

Si observamos en el eje de abscisas, OX, y en el eje de ordenadas, OY, los valores de x e y, respectivamente, para los cuales las gráficas de estas funciones están dibujadas, vemos que:



a) $D(f)=\mathbb{R}$ y $R(f)=(-\infty,4]$

b) $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)=\mathbb{R}-(-1,1)$ y $R(f)=(0,\infty]$

c) $D(f)=\mathbb{R}$ y $R(f)=(-1,\infty)$

d) $D(f)=(-2,\infty)$ y $R(f)=\mathbb{R}$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4-5x^2+3$

b) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-x-2}$

c) $f(x)=\sqrt[5]{x^2-1}$

d) $f(x)=e^{2x}$

e) $f(x)=\log\left(4-x^2\right)$

f) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$

a) Como función polinómica, su dominio es toda la recta real; así pues, $D(f)=\mathbb{R}$.

b) Una función con raíz de índice par, como lo es esta raíz cuarta, solo está definida para radicandos nulos o positivos:

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[2,\infty)-2 \Rightarrow D(f)=(-\infty,-1]\cup[2,\infty)=\mathbb{R}-(-1,2)$$

c) Una función con raíz de índice impar, como lo es esta raíz quinta, está definida para cualquier valor del radicando, por lo que $D(f)=\mathbb{R}$.

d) El dominio de una función exponencial es toda la recta real; por tanto, $D(f)=\mathbb{R}$.

e) El logaritmo solo está definido para argumentos estrictamente positivos:

$$4-x^2=(2-x)(2+x)>0 \Rightarrow x\in(-2,2) \Rightarrow D(f)=(-2,2)$$

f) Dado que $x^2+5\neq 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$, no existe ningún valor real de x que anule el denominador de esta función racional, así que $D(f)=\mathbb{R}$.

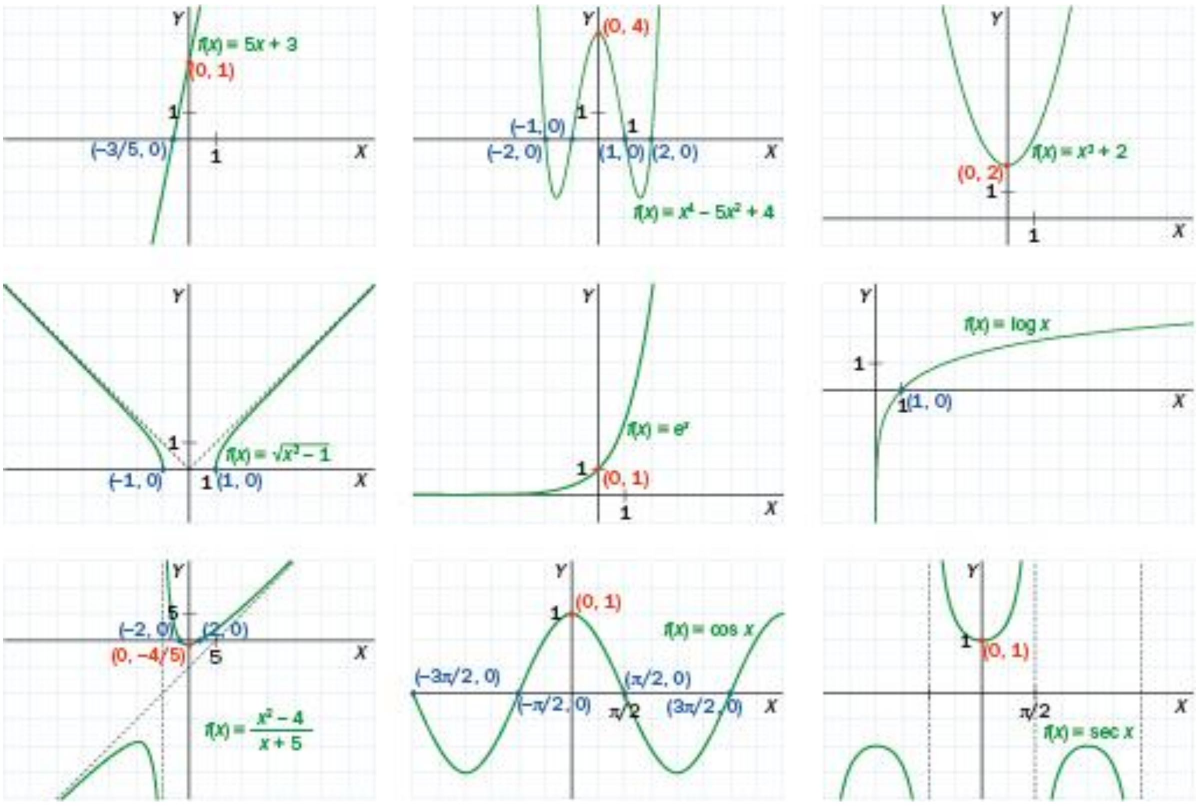
3 Puntos de corte con los ejes

3. Localiza los puntos de corte con los ejes de estas funciones:

a) $f(x)=5x+3$ **b)** $f(x)=x^4-5x^2+4$ **c)** $f(x)=x^2+2$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ **e)** $f(x)=e^x$ **f)** $f(x)=\log x$

g) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+5}$ **h)** $f(x)=\cos x$ **i)** $f(x)=\sec x$



Recordemos que para hallar los puntos de corte con el eje de abscisas, OX, resolvemos la ecuación f(x) = 0, mientras que para obtener el punto de corte con el eje de ordenadas, OY, evaluamos la función en x = 0. Así pues:

a) $OX: f(x)=0 \Rightarrow 5x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{5} \Rightarrow \left(-\frac{3}{5},0\right)$ es el punto de corte de la función $f(x)=5x+3$ con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=5\cdot 0+3=3 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (0,3)$ es el punto de corte de la función $f(x)=5x+3$ con el eje de ordenadas.

b)

$OX: f(x)=0 \Rightarrow x^4-5x^2+4=0 \Rightarrow (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=-1, x_3=1, x_4=2 \Rightarrow (\pm 1,0),(\pm 2,0)$ son los puntos de corte de la función $f(x)=x^4-5x^2+4$ con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=0^4-5\cdot 0^2+4=4 \Rightarrow (0,4)$ es el punto de corte de la función $f(x)=x^4-5x^2+4$ con el eje de ordenadas.

c) OX: como $f(x)=x^2+2\neq 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$, esta función no tiene puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=0^2+2=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (0,2)$ es el punto de corte de la función $f(x)=x^2+2$ con el eje de ordenadas.

d) $OX: f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow (x+1)\cdot(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1 \Rightarrow (\pm 1,0)$ son los puntos de corte de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ con el eje de abscisas.

OY: dado que $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)=\mathbb{R}-(-1,1)$, no es posible evaluar esta función en x = 0, al no ser este valor parte de su dominio; por tanto, esta función carece de punto de corte con el eje de ordenadas.

e) OX: como $f(x)=e^x\neq 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$, esta función no tiene puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=e^0=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$ es el punto de corte de la función $f(x)=e^x$ con el eje de ordenadas.

f) OX: $f(x)=0 \Rightarrow \log x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$, es el punto de corte de la función $f(x)=\log x$ con el eje de abscisas.

OY: dado que $D(f)=(0,\infty]$, esta función no puede evaluar en x = 0, valor que está fuera de su dominio de definición; por tanto, esta función carece de punto de corte con el eje de ordenadas.

g) $OX: f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x+5}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow (x+2)(x-2)=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2 \Rightarrow (\pm 2,0)$ son los puntos de corte de esta función con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=\frac{0^2-4}{0+5}=-\frac{4}{5} \Rightarrow y=-\frac{4}{5} \Rightarrow \left(0,-\frac{4}{5}\right)$ es el punto de corte de esta función con el eje de ordenadas.

h) $OX: f(x)=0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots\right\} = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \Rightarrow \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0\right)$ con $k\in\mathbb{Z}$ son los infinitos puntos de corte de la función $f(x)=\cos x$ con el eje de abscisas.

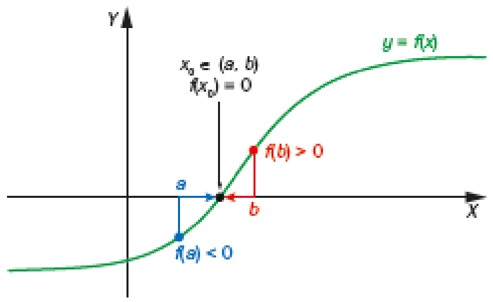
$OY: f(0)=\cos 0 = 1 \Rightarrow (0,1)$ es el punto de corte de la función $f(x)=\cos x$ con el eje de ordenadas.

i) OX: como $f(x)=\sec x = \frac{1}{\cos x} \neq 0 \; \forall x\in D(f)$, esta función no tiene puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow (0,1)$ es el punto de corte de la función $f(x)=\sec x$ con el eje de ordenadas.

4. Aproximación de una raíz por bisección. A veces no es posible resolver de manera exacta cierta ecuación f(x) = 0. Pero si la función f(x) puede dibujarse de forma continua en un intervalo [a,b] donde su valor cambia de signo, está claro que en algún punto x0 de su interior esta debe cruzar el eje OX y anularse (teorema de Bolzano).

Así pues, con hacer tal intervalo lo suficientemente pequeño sin más que dividirlo una y otra vez por la mitad, podemos hallar la raíz de la ecuación con la precisión que deseemos. Es el llamado método de la bisección.



Teniendo esto en cuenta, resuelve de manera aproximada la ecuación x = cos x. Para ello, parte de la función f(x) = x - cos x en el intervalo [0,1] y obtén su raíz con un error de aproximación de una centésima.

La función $f(x)=x-\cos x$ puede dibujarse de manera continua en el intervalo [0,1]. Además, su valor cambia de negativo a positivo en dicho intervalo, ya que f(0) = -1 y $f(1)\simeq 0,46$. Así pues, en algún punto, x0, interior del intervalo [0,1] dicha función debe anularse, es decir, $f(x_0)=x_0-\cos x_0 = 0$.

Tal punto verifica que $x_0=\cos x_0$ y representa, por lo tanto, la solución de la ecuación $x=\cos x$.

Para obtener un valor aproximado del punto x0 dividimos el intervalo [0,1] en dos partes iguales y nos quedamos con la mitad en cuyos extremos la función $f(x)=x-\cos x$ tenga signo contrario.

Después, repetiremos este proceso cuantas veces sean necesarias hasta alcanzar la aproximación deseada para el valor de x0.

$f(0,5)\simeq -0,4 \Rightarrow$ el punto de corte con el eje OX está dentro del intervalo [0,5, 1], cuyo punto medio es 0,75.

$f(0,75)\simeq 0,02 \Rightarrow$ el punto de corte con el eje OX está dentro del intervalo [0,5, 0,75], cuyo punto medio es 0,625.

$f(0,625) \simeq -0,2 \Rightarrow$ el punto de corte con el eje OX está dentro del intervalo [0,625, 0,75], cuyo punto medio es 0,6875.

$f(0,6875) \simeq -0,1 \Rightarrow$ el punto de corte con el eje OX está dentro del intervalo [0,6875, 0,75], cuyo punto medio es 0,71875.

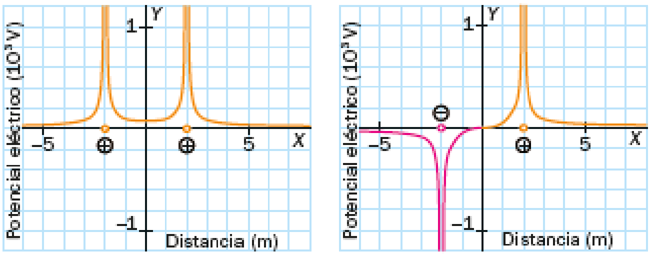
$f(0,71875) \simeq -0,03 \Rightarrow$ el punto de corte con el eje OX está dentro del intervalo [0,71875, 0,75], cuyo punto medio es 0,734375.

$f(0,734375) \simeq -0,01 \Rightarrow$ el punto de corte con el eje OX está dentro del intervalo [0,734375, 0,75].

Concluimos, por tanto, que $f(x) = x - \cos x = 0$ para un valor aproximado $x_0 = 0,74 \pm 0,01$, el cual puede tomarse como solución de la ecuación $x = \cos x$ con un error de aproximación de una centésima, como pedía el enunciado.

4 Simetría

5. Simetría en el potencial eléctrico. En las gráficas de la derecha aparece representado el potencial eléctrico que dos cargas generan a su alrededor. Explica el tipo de simetría presente en cada uno de los casos.



En la primera gráfica figura el potencial eléctrico en torno a dos cargas positivas e iguales. En ella puede observarse cómo la mitad izquierda de la gráfica se obtiene al voltear o reflejar la mitad derecha con respecto al eje vertical. Se trata, por tanto, de una función par, es decir, simétrica respecto del eje de ordenadas, OY, verificándose que $f(-x) = f(x)$.

La segunda gráfica representa el potencial eléctrico alrededor de dos cargas de signo contrario, y en ella se aprecia cómo el potencial alrededor de la carga negativa cambia de signo. En consecuencia, ahora hemos de voltear o reflejar la mitad derecha de la gráfica con respecto a los ejes vertical y horizontal de manera consecutiva para obtener la mitad izquierda. Así pues, es una función impar, o sea, simétrica respecto del origen de coordenadas, O, y se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

6. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 + 2$ **b)** $f(x) = 5x^3 - 4x$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^4 - 1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

e) $f(x) = x^2 - 3x$

En cada caso, inspeccionamos el valor de f(-x) y lo comparamos con el de f(x):

a) $f(-x)=3(-x)^2+2=3x^2+2=f(x)\Rightarrow$ función par.

b) $f(-x)=5(-x)^3-4(-x)=-5x^3+4x=-\left(5x^3-4x\right)=-f(x)\Rightarrow$ función impar.

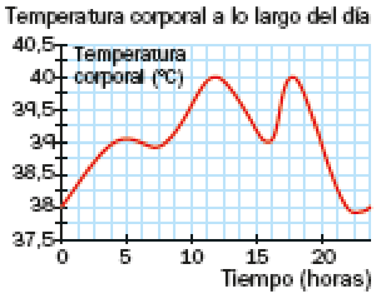
c) $f(-x)=\sqrt{(-x)^4-1}=\sqrt{x^4-1}=f(x)\Rightarrow$ función par.

d) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)}=\dfrac{x^2+1}{-x}=-\dfrac{x^2+1}{x}=-f(x)\Rightarrow$ función impar.

e) $f(-x)=(-x)^2-3(-x)=x^2+3x$, que no coincide con $f(x)=x^2-3x$ ni con $-f(x)=-x^2+3x$, luego esta función no es par ni impar.

5 Crecimiento, acotación y curvatura

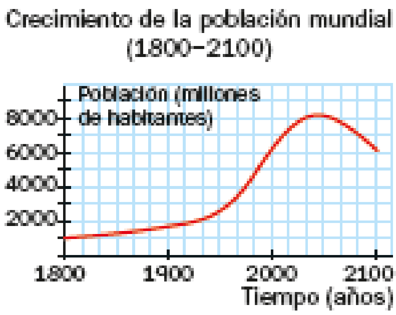
7. Temperatura corporal de un paciente. La siguiente gráfica representa la variación de temperatura corporal experimentada por un paciente a lo largo de un día. Analiza su crecimiento y localiza sus extremos.



Determinamos los intervalos del dominio en los que esta función crece y decrece, y localizamos las coordenadas de sus extremos.

Esta función es creciente en los intervalos [0, 5), (7, 12), (16, 18) y (22,5, 24); es decreciente en los intervalos (5, 7) y (12, 16) y (18, 22,5). Sus extremos están localizados en los puntos de coordenadas (0,38) (mínimo relativo), (5, 39,1) (máximo relativo), (7, 38,9) (mínimo relativo), (12, 40) (máximo absoluto), (16, 39) (mínimo relativo), (18, 40) (máximo absoluto), (22,5, 37,9) (mínimo absoluto) y (24, 38) (máximo relativo).

8. Crecimiento de la población mundial. Observa la gráfica y responde: ¿en qué década comenzó a ralentizarse el crecimiento de la población mundial? ¿Cuándo se espera que esta alcance el máximo?

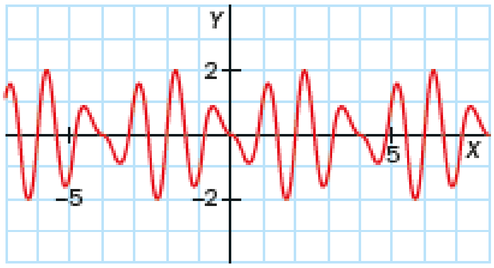


Si observamos la gráfica, se aprecia un punto de inflexión en torno al año 1980. Antes de ese año, el crecimiento de la población se aceleraba, es decir, esta se producía a un ritmo cada vez más rápido, pues la pendiente de la gráfica va en aumento. Después, el crecimiento comenzó a decelerar, esto es, a darse a un ritmo más lento, ya que la pendiente de la gráfica va disminuyendo. Por tanto, podríamos decir que el crecimiento de la población mundial empezó a ralentizarse en la década de los años 80.

Si las previsiones recogidas en esta gráfica para la evolución futura de la población mundial son correctas, en torno al año 2050 parece que esta alcanzará su máximo, con un valor de unos 8000 millones de habitantes.

6 Perioricidad

9. Comprueba la periodicidad de la función que aparece en la gráfica del margen y determina su periodo.



En efecto, sin más que inspeccionar la gráfica de esta función comprobamos que se trata de una función periódica, ya que su forma se repite cada cierto intervalo de la variable independiente, x.

Dicho intervalo resulta ser de 4 unidades, pues para cualquier valor de x la función verifica que . Por tanto, el periodo de esta función periódica es T = 4.

10. Fases de la Luna. La Luna pasa por sus cuatro fases en 28 días, durante los cuales sólo vemos desde la Tierra una porción de su cara iluminada por el Sol. Construye una tabla con la fracción de superficie lunar visible a lo largo de 56 días, tomando como puntos de referencia los momentos en que se alcanza cada una de las cuatro fases, y representa gráficamente los datos. ¿Es periódica esta función? ¿Qué forma crees que tendrá?

Si consideramos las cuatro fases principales del ciclo lunar que aparecen en la imagen adjunta, la porción de la superficie de nuestro satélite visible desde la Tierra a lo largo de 56 días se expresa en la función dada por la siguiente tabla:

Tiempo (días)	0	7	14	21	28	35	42	49	56
Fracción visible	1/2	1/4	0	1/4	1/2	1/4	0	1/4	1/2

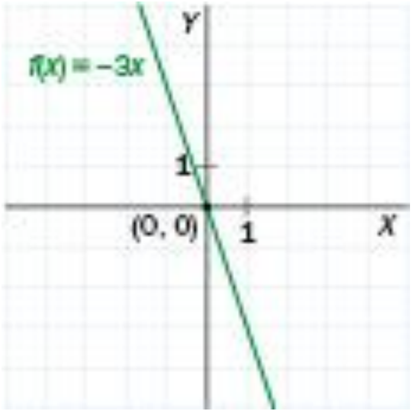
Comprobamos que se trata de una función periódica de periodo T = 28 días, cuya gráfica oscila entre un valor máximo de 1/2 (luna llena) y uno mínimo de 0 (luna nueva). Como la superficie lunar iluminada por el Sol que vemos desde nuestro planeta varía diariamente de manera gradual, la función tendrá una forma similar a esta:

7 Funciones polinómicas

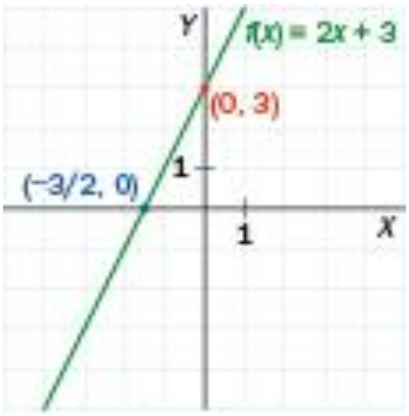
11. Representa estas funciones polinómicas de primer grado:

a) $f(x) = -3x$ **b)** $f(x) = 2x + 3$ **c)** $f(x) = 2 - 4x$

a) Se trata de una función lineal (pasa por el origen de coordenadas) decreciente, pues su pendiente, m = -3, es negativa (desciende tres unidades en el eje OY a medida que avanzamos, de izquierda a derecha, una unidad en el eje OX).



b) Se trata de una función afín (no pasa por el origen de coordenadas) creciente, ya que su pendiente, m = 2, es positiva (asciende dos unidades en el eje OY a medida que avanzamos, de izquierda a derecha, una unidad en el eje OX); tiene como ordenada en el origen n = 3, es decir, corta al eje OY en el punto (0, 3).

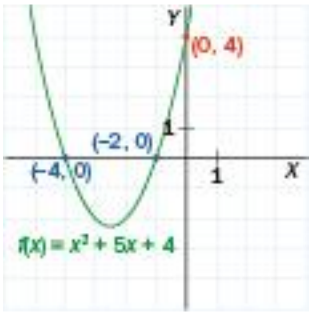


c) Se trata de una función afín (no pasa por el origen de coordenadas) decreciente, puesto que su pendiente, m = -4, es negativa (desciende cuatro unidades en el eje OY a medida que avanzamos, de izquierda a derecha, una unidad en el eje OX); su ordenada en el origen es n = 2, o sea, corta al eje OY en el punto (0, 2).

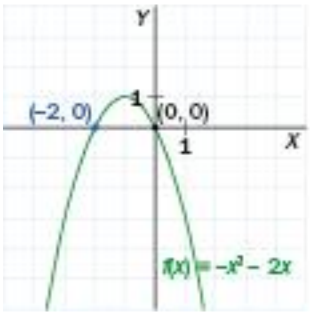
12. Representa estas funciones polinómicas de segundo grado:

a) $f(x) = x^2 + 5x + 4$ **b)** $f(x) = -x^2 - 2x$ **c)** $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

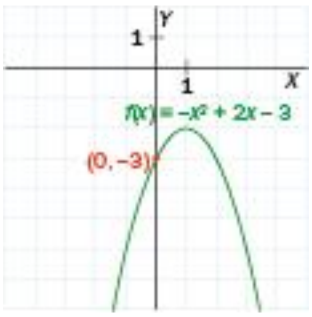
a) Se trata de una parábola abierta hacia arriba (a = 1 > 0) cuyo punto de corte con el eje OY es (0, 4); sus puntos de corte con el eje OX son (-4, 0) y (-1, 0), y su vértice se localiza en (-5/2, -3/2).



b) Se trata de una parábola abierta hacia abajo (a = -1 < 0) cuyos puntos de corte con los ejes son (0, 0) y (-2, 0); su vértice se encuentra en el punto (-1, 1).



c) Se trata de una parábola abierta hacia abajo (a = -1 < 0) cuyo punto de corte con el eje OY es (0, -3); carece de puntos de corte con el eje OX y su vértice se localiza en (1, -2). Para representarla correctamente, evaluamos la función en un tercer punto; por ejemplo, en x = 2 (simétrico a x = 0 con respecto al eje de simetría de la parábola x = 1), y obtenemos el punto (2, -3).



8 Funciones con radicales

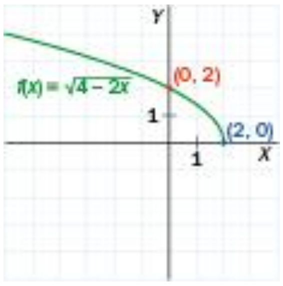
13. Representa las siguientes funciones con radicales:

a) $f(x)=\sqrt{4-2x}$ **b)** $f(x)=-\sqrt[3]{x+5}$ **c)** $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ **d)** $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

Para representar estas funciones, localizaremos sus puntos de corte con los ejes y evaluaremos algunos otros puntos de sus respectivos dominios; tendremos en cuenta, además, las posibles simetrías que pudieran existir:

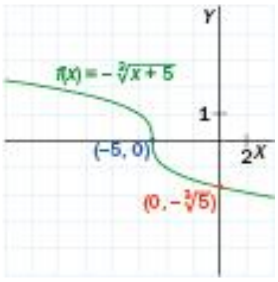
a) $4-2x\geq 0\Rightarrow x\leq 2\Rightarrow D(f)=(-\infty,2]$

x	-2	-1	0	1	2
y	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{2}$	0



b) Dado que es una raíz impar, $D(f)=\mathbb{R}$.

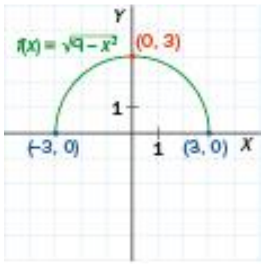
x	-13	-6	-5	-4	0	3
y	2	1	0	-1	$-\sqrt[3]{5}$	-2



c) $9-x^2\geq 0\Rightarrow -3\leq x\leq 3\Rightarrow D(f)=[-3,3]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	3	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	0

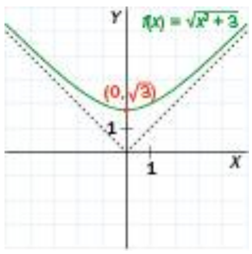
Nótese que se trata de una función par.



d) $x^2+3\geq 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	2	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{3}$

Nótese que se trata de una función par.



14. En unos mismos ejes, representa estas funciones con radicales dentro del intervalo [0,2]:

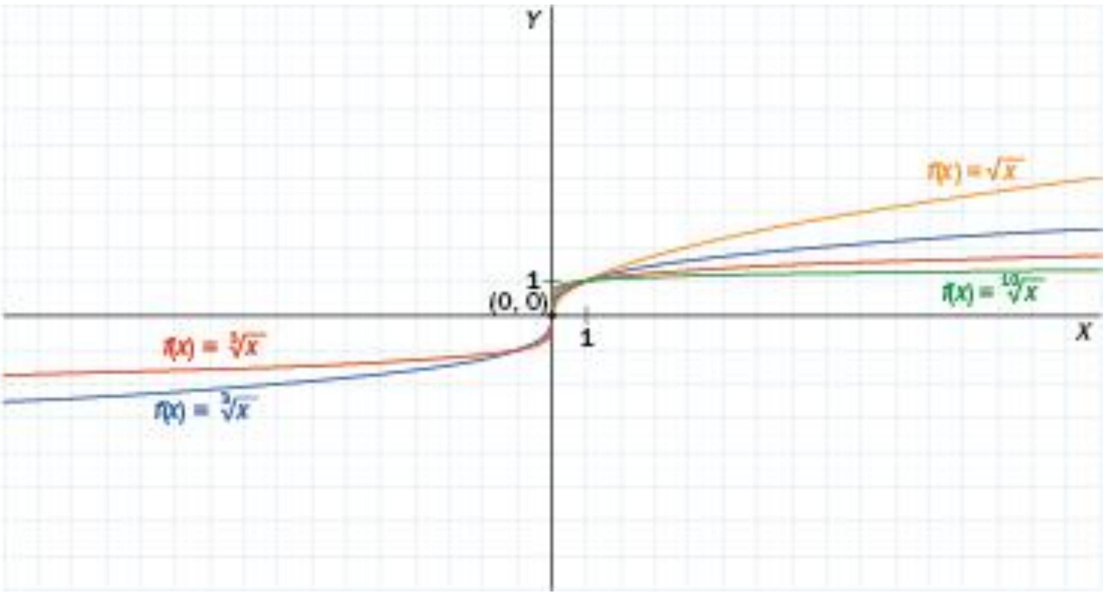
a) $f(x)=\sqrt{x}$ **b)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$ **c)** $f(x)=\sqrt[5]{x}$ **d)** $f(x)=\sqrt[10]{x}$

Como puede verse, las gráficas de todas estas funciones con radicales pasan por los puntos (0, 0) y (1, 1).

Si las evaluamos en algunos otros puntos del intervalo [0, 2], o bien las representamos con la ayuda de una calculadora gráfica o de cualquier programa informático, obtendremos sus correspondientes gráficas.

Observa cómo en el interior del intervalo [0,1] el valor de la función resulta ser más grande cuanto mayor es el índice de la raíz.

Dentro del intervalo [1,2], sin embargo, ocurre lo contrario, ya que a partir de x = 1 el valor de la función es menor cuanto mayor sea el índice de la raíz.



9 Funciones racionales

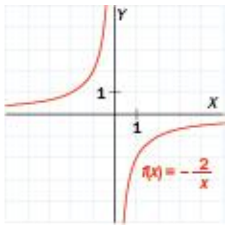
15. Representa estas funciones racionales y comprueba en cada una de ellas que el producto *x·y* se mantiene constante:

a) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{4x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2}{3x}$ **d)** $f(x) = -\dfrac{3}{5x}$

En efecto, todas estas funciones racionales son funciones de proporcionalidad inversa, en las cuales el producto x·y se mantiene constante. Poseen simetría respecto del origen, o sea, son funciones impares, y sus gráficas son, por tanto, hipérbolas equiláteras cuyos ejes son los propios ejes de coordenadas. Las representamos evaluándolas en algunos puntos de sus respectivos dominios, que en todos los casos es $\mathbb{R} - \{0\}$:

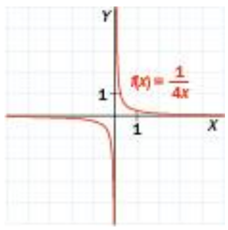
a) $y = -\dfrac{2}{x} \Rightarrow x \cdot y = -2$

x	±1/2	±1	±2	±4
y	∓ 4	∓ 2	∓ 1	$\mp 1/2$



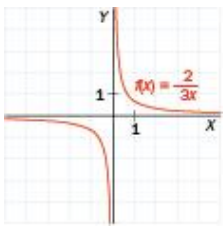
b) $y = \dfrac{1}{4x} \Rightarrow x \cdot y = \dfrac{1}{4}$

x	±1/4	±1/2	±1	±2
y	±1	±1/2	±1/4	±1/8



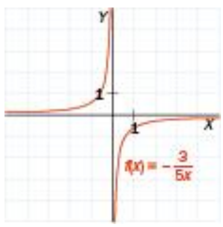
c) $y = \dfrac{2}{3x} \Rightarrow x \cdot y = \dfrac{2}{3}$

x	±1/3	±2/3	±1	±2
y	±2	±1	±2/3	±1/3



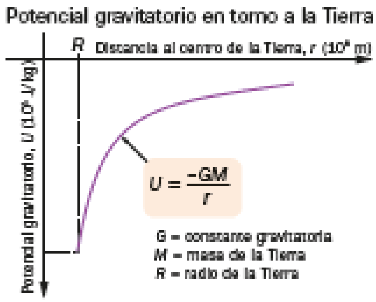
d) $y = -\dfrac{3}{5x} \Rightarrow x \cdot y = -\dfrac{3}{5}$

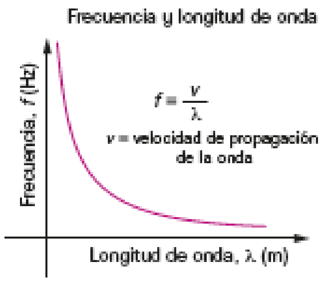
x	±1/5	±3/5	±1	±3
y	∓ 3	∓ 1	$\mp 3/5$	$\mp 1/5$



16. Explica el comportamiento de las dos gráficas de la derecha como ejemplos de función de proporcionalidad inversa.

Según la expresión que se muestra en la primera gráfica, el potencial gravitatorio en torno a la Tierra, U, es inversamente proporcional a la distancia, r, medida desde el centro del planeta. La constante de proporcionalidad es el producto –GM, donde G es la constante de gravitación universal y M, la masa de la Tierra. Se trata, por tanto, de una función de proporcionalidad inversa creciente.





Según la expresión que se muestra en la segunda gráfica, la frecuencia, f, y la longitud de onda, λ, son inversamente proporcionales, pues el producto de ambas magnitudes siempre es igual a la velocidad de propagación de la onda, v, valor que es siempre positivo. Así pues, se trata de una función de proporcionalidad inversa decreciente.

10 La función exponencial

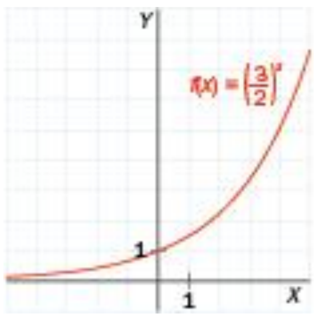
17. Representa las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ **b)** $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **c)** $f(x) = 2^{-x}$ **d)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

Según sea la base, b, mayor o menor que uno (recuerda que, en cualquier caso, b > 0), tendremos, respectivamente, una función exponencial creciente o decreciente. Además, todas ellas cortan al eje OY en el punto (0, 1) y pasan por el punto (1, b). Las representamos evaluándolas en algunos puntos de sus dominios de definición, que es toda la recta real:

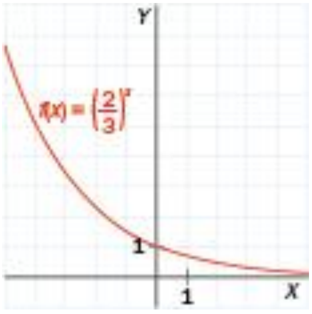
a) Como $b = \frac{3}{2} > 1$ se trata de una función exponencial creciente:

x	-2	-1	0	1	2
y	4/9	2/3	1	3/2	9/4



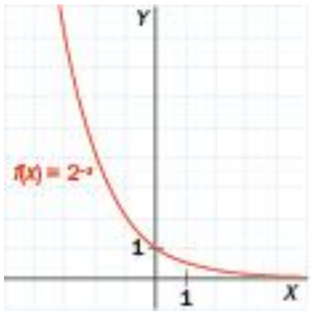
b) Como $b=\frac{2}{3}<1$ se trata de una función exponencial decreciente:

x	-2	-1	0	1	2
y	9/4	3/2	1	2/3	4/9



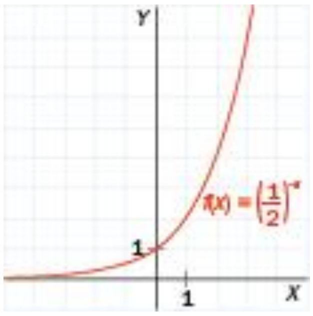
c) Como $f(x)=2^{-x}=\left(2^{-1}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, tenemos que $b=\frac{1}{2}<1$, luego se trata de una función exponencial decreciente:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	1/2	1/4

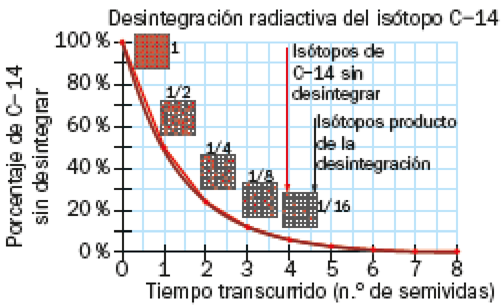


d) Como $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^x=2^x$, tenemos que $b=2>1$, luego se trata de una función exponencial creciente:

x	-2	-1	0	1	2
y	1/4	1/2	1	2	4



18. Desintegración radiactiva. La gráfica que aparece representada a la derecha, ¿se corresponde con una función exponencial? Interpreta los datos y justifica tu respuesta.



En esta gráfica se muestra el proceso de desintegración radiactiva del isótopo de carbono-14. En ella podemos constatar cómo cada vez que transcurre un periodo de semidesintegración o semivida, tiempo equivalente, para este isótopo en concreto, a 5730 años, la fracción de átomos de carbono-14 que aún no se han desintegrado se reduce a la mitad:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

En general, transcurridas n semividas la fracción de la cantidad inicial de sustancia que queda sin desintegrar será:

$$1 \cdot \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}^{n \text{ veces}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En consecuencia, la desintegración radiactiva obedece una función exponencial decreciente, ya que $b = \frac{1}{2} < 1$.

11 La función logarítmica

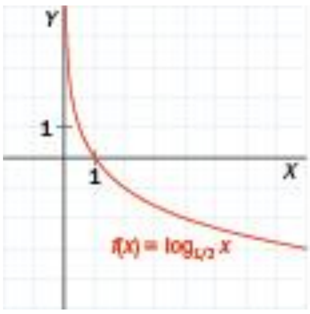
19. Representa las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x) = \log_{1/2} x$ **b)** $f(x) = \log_{3/2} x$ **c)** $f(x) = \log_2(-x)$ **d)** $f(x) = \log_2(1/x)$

Según sea la base, b, mayor o menor que uno (recuerda que, en cualquier caso, b > 0), tendremos, respectivamente, una función logarítmica creciente o decreciente. Las representamos evaluándolas en algunos puntos de sus respectivos dominios de definición:

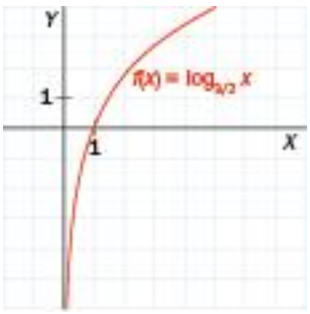
a) Como . $b = \frac{1}{2} < 1$. es una función logarítmica decreciente:

x	1/4	1/2	1	2	4
y	2	1	0	-1	-2



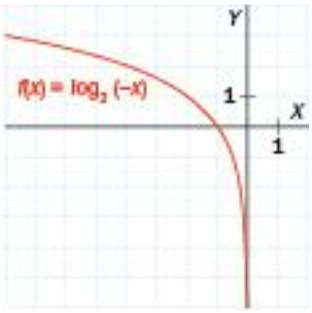
b) $D(f) = (0, \infty)$. Como $b = \frac{3}{2} > 1$ es una función exponencial creciente:

x	4/9	2/3	1	3/2	9/4
y	-2	-1	0	1	2



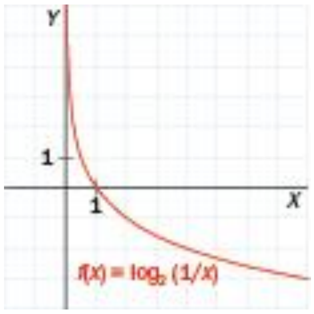
c) Aunque $b = 2 > 1$, como $D(f) = (-\infty, 0)$ se trata, en realidad, de una función exponencial decreciente:

x	-4	-2	-1	-1/2	-1/4
y	2	1	0	-1	-2



d) $D(f) = (0, \infty)$.. Como $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right) = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$, aunque $b = 2 > 1$, se trata, en realidad, de una función exponencial decreciente:

x	1/4	1/2	1	2	4
y	2	1	0	-1	-2



20. Busca información acerca de situaciones en las que resulta conveniente emplear escalas logarítmicas. Defínelas, en cada caso, mediante una función logarítmica adecuada y represéntalas.

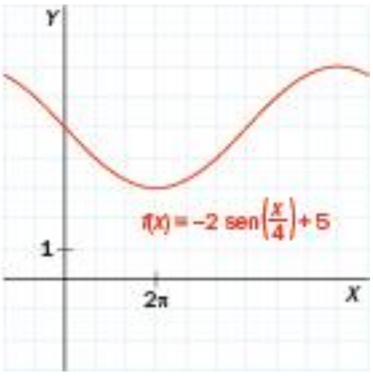
Respuesta libre. Además de la escala de pH tratada en el libro del alumno, la respuesta podría tratar, por ejemplo, sobre la definición, en acústica, del nivel de intensidad sonora, en decibelios; sobre la construcción de la escala de Richter en sismología, que cuantifica la energía liberada en un terremoto; o bien sobre la medición, en astronomía, de la cantidad de luz que se recibimos de los astros al definir su magnitud aparente.

12 Funciones trigonométricas

21. Representa estas funciones trigonométricas y halla su amplitud y periodo:

a) $f(x) = -2\,\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right) + 5$ **b)** $f(x) = 3 - 4\cos(2x)$

a) Como esta función oscila entre los extremos ymáx = 2 + 5 = 7 e ymín = -2 + 5 = 3, su amplitud es: $A = \frac{y_{\text{máx}} - y_{\text{mín}}}{2} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$



Dado que el periodo de una función seno es 2π y, además, se ha de verificar que:

$$-2\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}x\right) = -2\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}x + \mathbf{2\pi}\right) = -2\,\text{sen}\left[\frac{1}{4}\overbrace{(x+\mathbf{8\pi})}^{x+T}\right] \Rightarrow T = \mathbf{8\pi}$$

Para representarla, tendremos en cuenta que esta función oscila periódicamente en torno al valor y = 5 con una amplitud A = 2 (es decir, desde y = 3 hasta y = 7) y un periodo T = 8π. Así pues, solo es necesario evaluarla, por ejemplo, en algunos puntos del intervalo comprendido entre x = -4π y x = 4π:

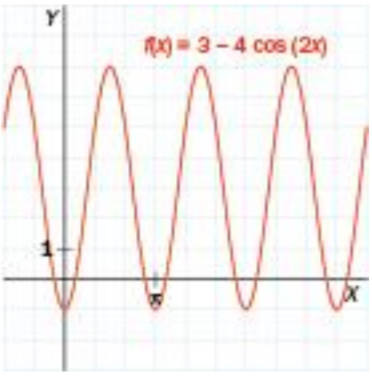
x	-4π	-3π	-2π	-π	0	π	2π	3π	4π
y	5	$5+\sqrt{2}$	7	$5+\sqrt{2}$	5	$5-\sqrt{2}$	3	$5-\sqrt{2}$	5

b) Como esta función oscila entre los extremos ymáx = -3 - 4 = -7 e ymín = 3 - 4 = -1, su amplitud es:

$$A = \frac{y_{\text{máx}} - y_{\text{mín}}}{2} = \frac{7-(-1)}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Dado que el periodo de una función coseno es 2π y, además, se cumple que:

$$-4\cos(2x) = -4\cos(2x+\mathbf{2\pi}) = -4\cos\left[2\overbrace{(x+\mathbf{\pi})}^{x+T}\right] \Rightarrow T = \mathbf{\pi}$$



Para representarla, tendremos en cuenta que esta función oscila periódicamente en torno al valor y = 4 con una amplitud A = 3 (es decir, desde y = 1 hasta y = 7) y un periodo T = π. Así pues, solo es necesario evaluarla, por ejemplo, en algunos puntos del intervalo comprendido entre x = -π/2 y x = π/2:

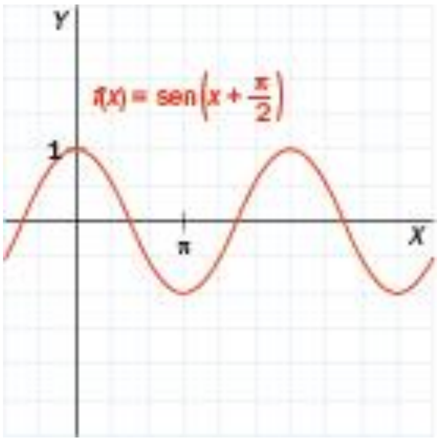
x	-π/2	-3π/8	-π/4	-π/8	0	π/8	π/4	3π/8	π/2
y	7	$3+2\sqrt{2}$	3	$3-2\sqrt{2}$	-1	$3-2\sqrt{2}$	3	$3+2\sqrt{2}$	7

22. Representa las siguientes funciones trigonométricas y compáralas con las gráficas de las funciones $\text{sen}\,x$ y $\cos x$ ¿A qué conclusión llegas?

a) $f(x) = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $f(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

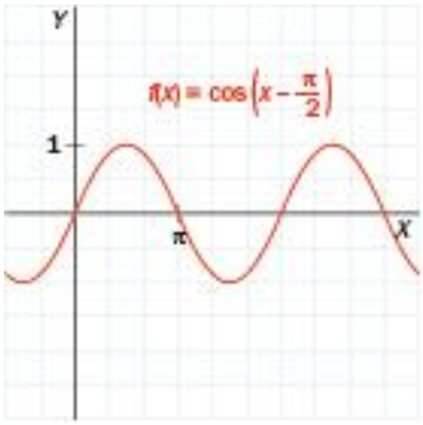
a) Evaluemos ambas funciones en algunos puntos del intervalo comprendido entre x = -π y x = +π para obtener su representación gráfica:

Puedes comprobar que se trata de una gráfica idéntica a la de la función $f(x)=\cos x$.



x	-π	-3π/4	-π/2	-π/4	0	π/4	π/2	3π/4	π
y	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1

b) Puedes comprobar que se trata de una gráfica idéntica a la de la función $f(x)=\text{sen}x$



x	-π	-3π/4	-π/2	-π/4	0	π/4	π/2	3π/4	π
y	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0

13 Funciones definidas a trozos

23. Representa las siguientes funciones definidas a trozos:

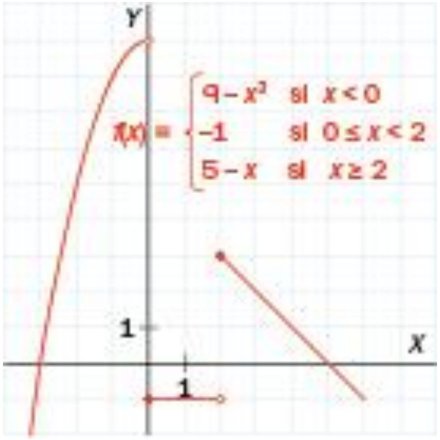
a) $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ -1 & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ 5-x & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x^2+3x-2 & \text{si} \quad -1<x\le 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

a) El primer trozo, definido para x < 0, consiste en y = 9 – x^2, una parábola abierta hacia abajo que corta al eje OX en el punto (-3, 0); su vértice y punto de corte con el eje OY estaría en (0, 9), aunque no llega a alcanzarlo por no estar definida en x = 0.

El segundo trozo, definido en 0 ≤ x < 2, es la función constante y = -1, es decir, una recta horizontal de altura -3.

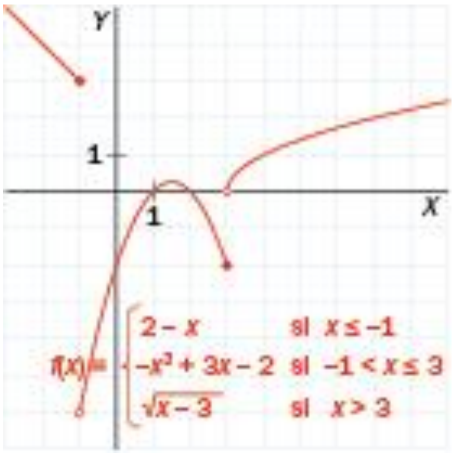
El tercer y último trozo, definido para x ≥ 2, se trata de la recta y = 5 - x, de pendiente negativa m = -1, cuyo punto de corte con el eje OX se halla en (5, 0); pasa, además, por el punto (2, 3).



b) El primer trozo, definido para x ≤ -1, es la recta y = 2 - x, de pendiente negativa m = 1, que pasa, por ejemplo, por los puntos (-1, 3) y (-3, 5).

El segundo trozo, definido en -1 < x ≤ 3, se trata de la parábola abierta hacia abajo y = x^2 + 3x -2, que corta a los ejes en los puntos (1, 0), (2, 0) y (0, -2), y cuyo vértice está en (3/2, 1/4); pasa, además, por los puntos (3, -2) y (-1, -6), aunque no alcanza este último por no estar definida en x = -1.

El tercer y último trozo, definido para x > 3, es la función racional $f(x)=\sqrt{x-3}$, cuyo punto de corte con el eje OX, que no llega a alcanzar, se situaría en (3, 0); pasa, además, por los puntos (4, 1) y (7, 2), por ejemplo.

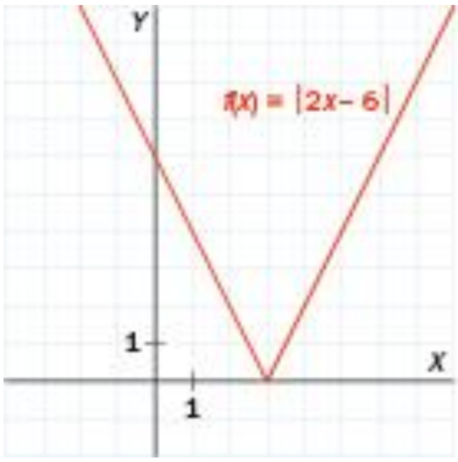


24. Representa la función $f(x)=|2x-6|$, teniendo en cuenta que esta es, en realidad, la función definida a trozos:

$$f(x)=|2x-6|=\begin{cases}-(2x-6)=-2x+6 & \text{si} \quad x<3\\ 2x-6 & \text{si} \quad x\geq 3\end{cases}$$

El primer trozo, definido para x < 3, es la recta y = -2x + 6, de pendiente negativa m = -2, cuyos puntos de corte con los ejes son (0, 6) y (3, 0), aunque no llega a alcanzar este último por no estar definida en x = 3.

El segundo trozo, definido para x ≥ 3, consiste en la recta y = 2x - 6, de pendiente positiva m = 2, cuyo punto de corte con el eje OX es (3, 0) y que pasa, además, por el punto (5, 4), por ejemplo.

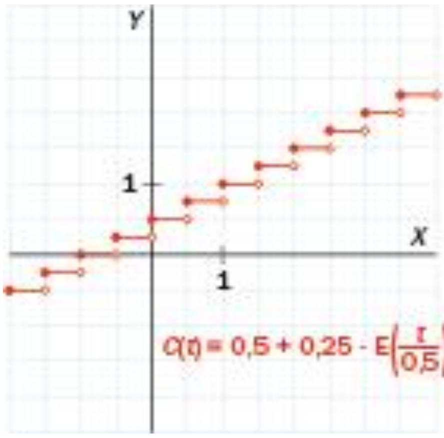


25. Tarifas de un aparcamiento público. El estacionamiento regulado de vehículos dentro del casco histórico de cierta población tiene una tarifa de 50 céntimos por la primera media hora más 25 céntimos por cada media hora extra o fracción de la misma. Expresa como una función definida a trozos el coste del estacionamiento según tiempo transcurrido y realiza su representación gráfica.

Si tomamos como variable independiente, t, el tiempo, en horas, que el vehículo permanece estacionado, y como variable dependiente C, el coste, en euros, asociado al estacionamiento, podemos expresar dicho coste mediante la siguiente función definida a trozos, relacionada con la función parte entera:

$$C(t)=\begin{cases} 0,50 & \text{si } \quad 0\le t<0,5 \\ 0,50+0,25\cdot 1 & \text{si } \; 0,5\le t<1 \\ 0,50+0,25\cdot 2 & \text{si } \quad 1\le t<1,5 \\ 0,50+0,25\cdot 3 & \text{si } \; 1,5\le t<2 \\ \qquad \dots & \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t)=0,5+0,25\cdot \mathrm{E}\left(\frac{t}{0,5}\right)$$



14 Operaciones con funciones

26. Con las funciones $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=\sqrt{1-x}$ realiza las siguientes operaciones y halla los dominios de las funciones que obtengas como resultado:

a) $f+g$ **b)** $f-g$ **c)** $f\cdot g$ **d)** $\dfrac{f}{g}$

e) $\dfrac{g}{f}$ **f)** g^2 **g)** $f\circ g$ **h)** $g\circ f$

En primer lugar, determinamos los dominios de definición de las funciones con las cuales vamos a operar. El dominio de f(x), como función polinómica, es toda la recta real: $D(f)=\mathbb{R}$; g(x), en cambio, no está definida para radicandos negativos, por lo que $D(g)=(-\infty,1]$. Así pues:

a) $(f+g)(x)=x^2-4+\sqrt{1-x} \quad \Rightarrow \quad D(f+g)=D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}\cap(-\infty,1]=(-\infty,1]$

b) $(f-g)(x)=x^2-4-\sqrt{1-x} \quad \Rightarrow \quad D(f-g)=D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}\cap(-\infty,1]=(-\infty,1]$

c) $(f\cdot g)(x)=(x^2-4)\cdot\sqrt{1-x}=x^2\sqrt{1-x}-4\sqrt{1-x} \quad \Rightarrow \quad D(f-g)=D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}\cap(-\infty,1]=(-\infty,1]$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow D\left(\dfrac{f}{g}\right)=D(f)\cap D(g)-\{x|\,g(x)=0\}=\mathbb{R}\cap(-\infty,1]-\{1\}=(-\infty,1]-\{1\}=(-\infty,1)$

e)
$\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4} \Rightarrow D\left(\dfrac{g}{f}\right)=D(f)\cap D(g)-\{x|\,f(x)=0\}=\mathbb{R}\cap(-\infty,1]-\{\pm 2\}=(-\infty,1]-\{\pm 2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,1]$

f) $(g^2)(x)=(g\cdot g)(x)=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}=1-x \Rightarrow D(g^2)=D(g)\cap D(g)=(-\infty,1]\cap(-\infty,1]=(-\infty,1]$

g) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\left(\sqrt{1-x}\right)^2-4=1-x-4=-3-x=-(x+3) \Rightarrow$

$\Rightarrow D(f\circ g)=\{x\in D(g)\,|\,g(x)\in D(f)\}=\left\{x\in[-\infty,1)\,|\,\sqrt{1-x}\in\mathbb{R}\right\}=(-\infty,1]$

h) $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\sqrt{1-(x^2-4)}=\sqrt{1-x^2+4}=\sqrt{5-x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow D(g\circ f)=\{x\in D(f)\,|\,f(x)\in D(g)\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-4\leq 1\right\}=\left[-\sqrt{5},+\sqrt{5}\right]$

27. ¿Cómo y con qué operaciones expresarías estas funciones?

a) El beneficio, B, a partir del coste, C, y los ingresos, I, en la fabricación y venta de x unidades.

b) La velocidad de conexión a una red, v, en función del tiempo, t, a partir de la velocidad según el número de equipos conectados, n, y de este en función del tiempo.

a) El beneficio resulta de la diferencia entre los ingresos por la venta y los costes de fabricación, Así pues, si los beneficios, ingresos y costes en función de x unidades fabricadas y vendidas vienen representados, respectivamente, por las funciones B(x), I(x) y C(x), tenemos que:

$$B(x)=(I-C)(x)=I(x)-C(x)$$

b) Si la velocidad de conexión a una red, v, depende del número de equipos, n, que en un momento determinado, t, se encuentran conectados a esta según las funciones v(n) y n(t), entonces la velocidad en función del tiempo se puede expresar mediante la composición de estas dos funciones según:

$$(v\circ n)(t)=v[n(t)]$$

15 Transformación de funciones

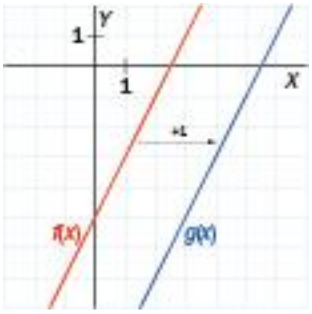
28. Realiza estas traslaciones y representa las gráficas:

a) $f(x)=2x-5$ **dos unidades hacia arriba y tres a la derecha.**

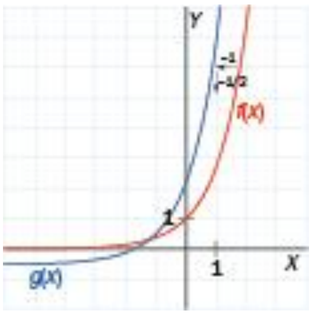
b) $f(x)=e^{x}$ **media unidad hacia abajo y una a la izquierda.**

c) $f(x)=\log x$ **una unidad hacia abajo y dos a la derecha.**

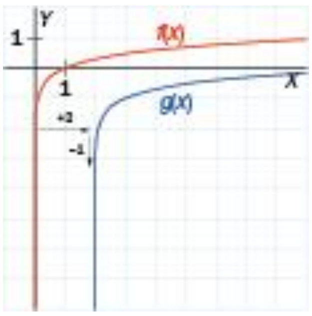
a) $g(x)=f(\overbrace{x-3}^{\text{tres unidades hacia la derecha}})\overbrace{+2}^{\text{dos unidades hacia arriba}}=2(x-3)-5+2=2x-9$



b) $g(x)=f(\overbrace{x+1}^{\text{una unidad hacia la izquierda}})\overbrace{-\frac{1}{2}}^{\text{media unidad hacia abajo}}=e^{x+1}-\frac{1}{2}$



c) $g(x)=f(\overbrace{x-2}^{\text{dos unidades hacia la derecha}})\overbrace{-1}^{\text{una unidad hacia abajo}}=\log(x-2)-1$



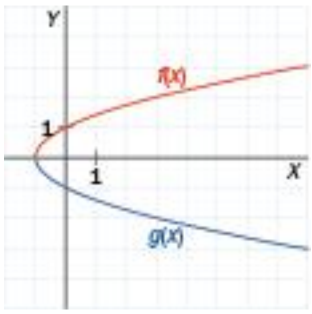
29. Representa estas gráficas a partir de las transformaciones adecuadas:

a) **La simétrica de** $f(x)=\sqrt{x+1}$ **con respecto al eje OX.**

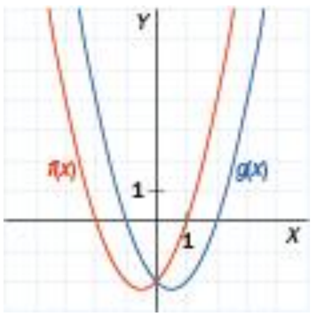
b) **La simétrica de** $f(x)=x^2+x-2$ **con respecto al eje OY.**

c) $f(x)=3x+5$ **dilatada horizontalmente en un factor dos.**

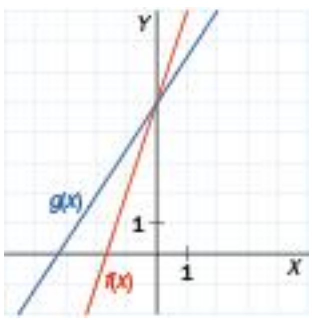
a) $g(x)=\overbrace{\quad - \quad}^{\text{simetría con respecto al eje } OX} f(x)=-\sqrt{x+1}$



b) $g(x)=f(\overbrace{\quad -x \quad}^{\text{simetría con respecto al eje } OY})=(-x)^2+(-x)-2=x^2-x-2$



c) $g(x)=f\left(\overbrace{\quad \frac{x}{2} \quad}^{\text{dilatación horizontal en un factor 2}}\right)=3\left(\frac{x}{2}\right)+5=\frac{3}{2}x+5$



16 La función inversa

30. Para cada una de estas funciones, halla su inversa y comprueba que $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$:

a) $f(x)=5-3x$

b) $f(x)=\sqrt{2x+1}$

c) $f(x)=\dfrac{2}{3x}$

d) $f(x)=e^{5-x}$

e) $f(x)=\text{sen}\,(1-x)$

f) $f(x)=\text{arctg}\,5x$

a) $f(x)=5-3x \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\frac{5-x}{3}]{\text{1º Despejamos } x:\ y=5-3x\Rightarrow x=\frac{5-y}{3}} f^{-1}(x)=\dfrac{5-x}{3}$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{5-(5-3x)}{3}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=5-3\left(\frac{5-x}{3}\right)=x$$

b) $f(x)=\sqrt{2x+1} \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\frac{x^2-1}{2}]{\text{1º Despejamos } x:\ y=\sqrt{2x+1}\Rightarrow x=\frac{y^2-1}{2}} f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-1}{2}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\sqrt{2\left(\frac{x^2-1}{2}\right)+1}=x$$

c) $f(x)=\dfrac{2}{3x} \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\frac{2}{3x}]{\text{1º Despejamos } x:\ y=\frac{2}{3x}\Rightarrow x=\frac{2}{3y}} f^{-1}(x)=\dfrac{2}{3x}$

Como en las funciones de proporcionalidad inversa se verifica que $f(x)=f^{-1}(x)$:

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\frac{2}{3\left(\frac{2}{3x}\right)}=x$$

d) $f(x)=e^{5-x} \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=5-\log x]{\text{1º Despejamos } x:\ y=e^{5-x}\Rightarrow x=5-\log y} f^{-1}(x)=5-\log x$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=5-\log\left(e^{5-x}\right)=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=e^{5-(5-\log x)}=x$$

e) $f(x)=\operatorname{sen}(1-x) \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=1-\operatorname{arcsen} x]{\text{1.º Despejamos } x:\ y=\operatorname{sen}(1-x)\Rightarrow x=1-\operatorname{arcsen} y} f^{-1}(x)=1-\operatorname{arcsen} x$

$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=1-\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}(1-x)\right]=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\operatorname{sen}\left[1-(1-\operatorname{arcsen} x)\right]=x$

f) $f(x)=\operatorname{arctg}(5x) \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\frac{1}{5}\operatorname{tg} x]{\text{1.º Despejamos } x:\ y=\operatorname{arctg}(5x)\Rightarrow x=\frac{1}{5}\operatorname{tg} y} f^{-1}(x)=\frac{1}{5}\operatorname{tg} x$

$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{1}{5}\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}(5x)\right]=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\operatorname{arctg}\left[5\left(\frac{1}{5}\operatorname{tg} x\right)\right]=x$

31. Obtén la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-1 \quad (x\geq 0)$

b) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$

d) $f(x)=\log(3x+4)$

f) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

e) $f(x)=\cos(2x-6)$

a) $\underset{(\text{con } x\geq 0)}{f(x)=x^2-1} \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\sqrt{x+1}]{\text{1º Despejamos } x:\ y=x^2-1\Rightarrow x=\sqrt{y+1}} f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$

b) $f(x)=\sqrt[3]{x+2} \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=x^3-2]{\text{1º Despejamos } x:\ y=\sqrt[3]{x+2}\Rightarrow x=y^3-2} f^{-1}(x)=x^3-2$

c) $f(x)=\dfrac{1}{2-x} \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=2-\frac{1}{x}]{\text{1º Despejamos } x:\ y=\frac{1}{2-x}\Rightarrow x=2-\frac{1}{y}} f^{-1}(x)=2-\dfrac{1}{x}$

d) $f(x)=\log(3x+4) \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\frac{e^x-4}{3}]{\text{1º Despejamos } x:\ y=\log(3x+4)\Rightarrow x=\frac{e^y-4}{3}} f^{-1}(x)=\dfrac{e^x-4}{3}$

e) $f(x)=\cos(2x-6) \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\frac{6+\arccos x}{2}]{\text{1.º Despejamos } x:\ y=\cos(2x-6)\Rightarrow x=\frac{6+\arccos y}{2}} f^{-1}(x)=\dfrac{6+\arccos x}{2}$

f) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=-1+2\operatorname{arctg} x]{\text{1.º Despejamos } x:\ y=\operatorname{tg}\left(\frac{x+1}{2}\right)\Rightarrow x=-1+2\operatorname{arctg} y} f^{-1}(x)=-1+2\operatorname{arctg} x$

Piensa

1. Explica la dependencia exponencial entre el número de contraseñas y la longitud de las mismas.

Si construimos contraseñas escogiendo caracteres entre las 27 letras de nuestro abecedario y los 10 dígitos del 0 al 9. Si la contraseña estuviera constituida por una cadena de n de dichos caracteres, el número de contraseñas distintas que sería posible construir ascendería a:

$$\overbrace{37 \cdot 37 \cdot \ \ldots \ \cdot 37}^{n \text{ veces}} = 37^n$$

2. En cada uno de los ejemplos de funciones presentados hasta ahora, identifica la variable dependiente e independiente, así como sus respectivos dominios de definición y recorridos.

- La variable independiente es el número de caracteres que forma la cadena de la contraseña; la variable dependiente es el número de contraseñas diferentes que es posible construir con dicha cadena de caracteres. Aquí, tanto el dominio como el recorrido son números naturales.
- La variable independiente es el precio de venta al público, en euros, de la barra de pan; la variable dependiente es la cantidad de barras demandadas semanalmente. El dominio de esta función es el conjunto de precios, en euros, {0,5, 1,0, 1,5, 2,0, 3,0}, mientras que el recorrido está formado por sus correspondientes demandas, en miles de barras, {300, 150, 100, 75, 50}.
- La variable independiente es la temperatura en grados Celsius o centígrados (ºC); la variable dependiente es la temperatura en grados Fahrenheit (ºF). Segú la gráfica, dominio va desde 0 ºC hasta 100 ºC, y el recorrido, de 32 ºF hasta 212 ºF.
- La variable independiente es la velocidad a la que circula el vehículo en km/h; la variable dependiente es la distancia recorrida por este, en metros, hasta que se detiene al accionar los frenos. El dominio y el recorrido son aquí números reales positivos.

3. ¿Qué podemos decir acerca del crecimiento y la curvatura en los extremos *B* y *D*? ¿Y en los puntos de inflexión *C* y *E*?

En los extremos B y D, la función alcanza un mínimo y máximo relativos, respectivamente, luego en ellos esta no crece ni decrece, ya que su pendiente es horizontal.

En torno a los puntos de inflexión C y E se observa cómo la pendiente de la función no varía de manera apreciable; en ellos, por tanto, podemos decir que la variación de la función se estabiliza, es decir, que el crecimiento y decrecimiento se producen a un ritmo constante.

4. Justifica la última propiedad de la función exponencial.

En efecto, aunque la función exponencial varía en cada uno de sus puntos a un ritmo distinto, pues su pendiente varía de un punto a otro, la variación relativa, o razón de cambio, que este tipo de función experimenta en intervalos Δx iguales, definida como

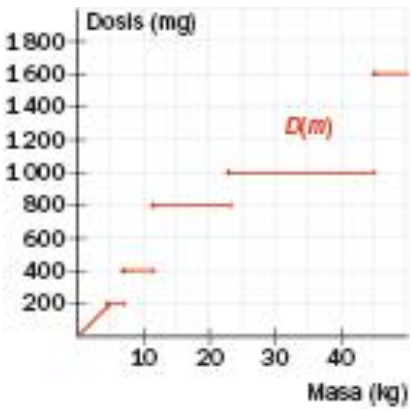
$$\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}$$

permanece constante, pues

$$\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}=\frac{b^{x+\Delta x}}{b^x}=\frac{\boxed{b^x}\,b^{\Delta x}}{\boxed{b^x}}=b^{\Delta x}=\text{cte}\quad\text{si}\quad \Delta x=\text{cte}$$

5. Observa la tabla para la administración pediátrica de un fármaco, escribe la expresión de la dosis diaria de medicamento, *D* (en gramos), en función de la masa corporal del niño, *m* (en kilogramos) y realiza su representación gráfica.

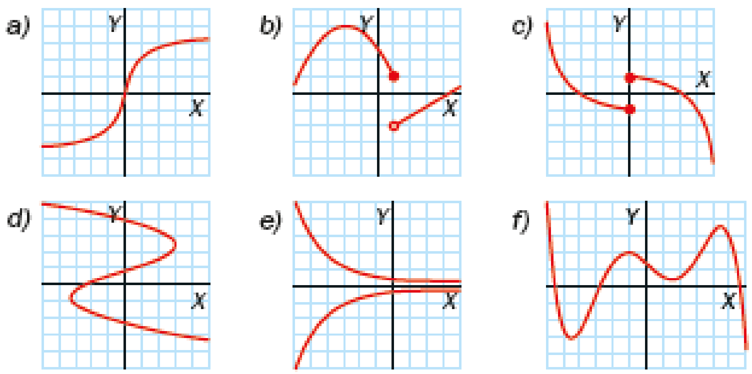
$$D(m)=\begin{cases}40m & \text{si} \quad m<4{,}5\\ 200 & \text{si} \quad 4{,}5\le m<7\\ 400 & \text{si} \quad 7\le m<11{,}5\\ 800 & \text{si} \quad 11{,}5\le m<23\\ 1000 & \text{si} \quad 23\le m<45\\ 1600 & \text{si} \quad m\ge 45\end{cases}$$



Actividades finales

La función y sus características

32. Justifica cuáles de estas gráficas pertenecen a una función:



Representan funciones las gráficas que preservan la unicidad de la imagen; es decir, aquellas en las que a cada valor de la variable independiente, *x*, se le asocia un único valor de la variable dependiente, *y*. Según esto, pertenecen a funciones las gráficas a), c) y f).

33. Escribe una expresión analítica para estas funciones:

a) El volumen ocupado por un gas es directamente proporcional a su temperatura.

b) La resistencia aerodinámica total que sufre un avión en vuelo aumenta con el cuadrado de su velocidad.

c) La cantidad demandada de un producto es inversamente proporcional al precio del mismo.

d) La sensación provocada por la percepción de un estímulo físico depende de la raíz cúbica de su intensidad.

a) El volumen ocupado por un gas, V, es directamente proporcional a su temperatura, T:

$V(T) = kT$, con $k = \text{cte}$.

b) La resistencia aerodinámica total, R, que sufre un avión en vuelo aumenta con el cuadrado de su velocidad, v:

$$R(v) = kv^2, \text{ con } k = \text{cte}.$$

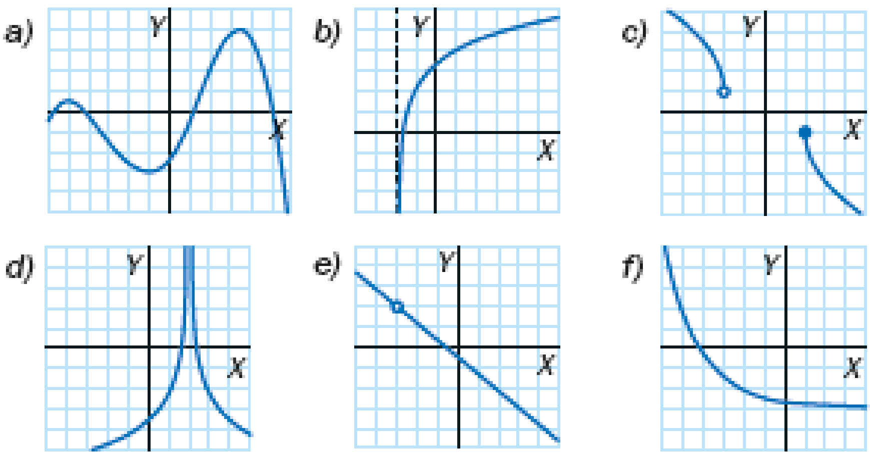
c) La cantidad demandada de un producto, Q, es inversamente proporcional al precio, p, del mismo:

$$Q(p) = \frac{k}{p}, \text{ con } k = \text{cte}.$$

d) La sensación, S, provocada por la percepción de un estímulo físico depende de la raíz cúbica de su intensidad, I:

$$S(I) = k\sqrt[3]{I}, \text{ con } k = \text{cte}.$$

34. ¿Qué dominio y recorrido tienen estas funciones?



a) $D(f)=\mathbb{R}$ y $R(f)=\left(-\infty,4\right]$

b) $D(f)=\left(-2,\infty\right)$ y $R(f)=\mathbb{R}$

c) $D(f)=\left(-\infty,-2\right)\cup\left[2,\infty\right)$ y $R(f)=\left(-\infty,-1\right]\cup\left(1,\infty\right)$

d) $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$ y $R(f)=\mathbb{R}$

e) $D(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$ y $R(f)=\mathbb{R}-\{2\}$

f) $D(f)=\mathbb{R}$ y $R(f)=\left(-3,\infty\right)$

35. Obtén el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

c) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+4}$

d) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-5x+6}$

e) $f(x)=\sqrt{2x+6}+\sqrt{6-2x}$

f) $f(x)=\sqrt{(2-3x)(4x-5)}$

g) $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+3}$

h) $f(x)=\sqrt[3]{2x-5}$

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+2x+15}}{x^2-4}$

j) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$

k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

l) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{(x-3)(2-x)}}$

m) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-4}}$

n) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{-x^2+5x-6}}$

a) Excluimos del dominio los puntos que anulan los denominadores.

b) Queda fuera del dominio el valor que anula el denominador: $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$.

c) Como $x^2+4\neq 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$, el denominador no se anula para ningún valor real de x, así que el dominio de esta función racional es toda la recta real: $D(f)=\mathbb{R}$.

d) Están excluidos del dominio los valores que anulan el denominador:
$x^2\text{-}5x+6=\left(x-2\right)\left(x-3\right)=0\Rightarrow x_1=2, x_2=3\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{2,3\}$.

e) Ninguna de las dos raíces cuadradas está definida para números negativos:
$2x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -3$ y $6-2x\geq 0\Rightarrow x\leq 3\Rightarrow x\in\left[-3,\infty\right)\cap\left(-\infty,3\right]\Rightarrow D(f)=\left[-3,3\right]$

f) La raíz cuadrada solo está definida para radicandos nulos o positivos:

$$(2-3x)(4x-5)\geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\leq x\leq \frac{5}{4} \Rightarrow D(f)=\left[\frac{2}{3},\frac{5}{4}\right]$$

g) De nuevo, el radicando de una raíz cuadrada no puede ser negativo:

$$-x^2-2x+3=(x+3)(x-1)\geq 0 \Rightarrow -3\leq x\leq 1 \Rightarrow D(f)=[-3,1]$$

h) Como raíz de índice impar, su dominio coincide con el del radicando: $D(f)=\mathbb{R}$.

i) Por un lado, el radicando del numerador no puede ser negativo y, por otro, hemos de excluir los valores que hagan nulo el denominador:

$$\left.\begin{array}{r} -x^2+2x+15\geq 0 \Rightarrow -3\leq x\leq 5 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \end{array}\right\} \Rightarrow D(f)=[-3,5]-\{\pm 2\}$$

j) Como raíz cuadrada, el radicando no debe ser negativo:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x}\geq 0 \Rightarrow x\in[-1,0)\cup[1,\infty)$$

La resolución de esta inecuación ya excluye el valor, x = 0, que anula el denominador de la fracción del radicando, por lo cual de aquí obtenemos directamente el dominio de esta función: $D(f)=[-1,0)\cup[1,\infty)$.

k) La fracción del radicando de esta raíz cuadrada no puede ser negativa:

$$\frac{x+2}{x-3}\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup(3,\infty)$$

Como al resolver esta inecuación ya queda excluido el valor que anula el denominador, ,x = 3 tenemos que: $D(f)=(-\infty,-2]\cup(3,\infty)$.

l) Por un lado, la raíz cuadrada del denominador no puede anularse y, por otro, su radicando no puede ser negativo; así pues:

$$(x-3)(2-x)>0 \Rightarrow 2<x<3 \Rightarrow D(f)=(2,3)$$

m) La raíz cuadrada solo está definida para radicandos nulos o positivos:

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-2)}\geq 0 \Rightarrow x\in(-2,-1]\cup(2,\infty)$$

En la resolución de la inecuación se excluyen ya los valores que anulan el denominador de la fracción del radicando, $x=\pm 2$, por lo que el dominio de la función es: $D(f)=(-2,-1]\cup(2,\infty)$.

n) La raíz cuadrada solo está definida para radicandos nulos o positivos:

$$-\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}\geq 0 \Rightarrow \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}\leq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup(2,3)$$

Al resolver la inecuación quedan excluidos ya los valores que anulan el denominador, x = 2 y x = 3, así que el dominio de la función es: $D(f)=(-\infty,-1]\cup(2,3)$.

36. Halla el dominio de estas funciones:

a) $f(x)=xe^{-x^2}$

b) $f(x)=\sqrt{x}\,e^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$

d) $f(x)=\log\dfrac{2x+6}{5-x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{\log(3x+4)}$

f) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x)=\operatorname{cosec}(2x)$

h) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

a) Las operaciones que aparecen en la expresión de esta función siempre pueden realizarse, por lo que la función está bien definida para cualquier valor de x: $D(f)=\mathbb{R}$.

b) El radicando de la raíz cuadrada no puede ser negativo (es decir, $x\geq 0$) y, además, el denominador del exponente no puede ser nulo (o sea, $x\neq 0$); así pues, debe verificarse que $x>0$, por lo cual: $D(f)=(0,\infty)$.

c) No forman parte del dominio los valores que anulan el denominador:

$$e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$$

d) Un logaritmo solo está definido para argumentos estrictamente positivos:

$$\frac{2x+6}{5-x}>0\Rightarrow -3<x<5\Rightarrow D(f)=(-3,5)$$

La inecuación excluye directamente el valor, x = 5, que anula su denominador.

e) El argumento del logaritmo ha de ser estrictamente positivo:

$$3x+4>0\Rightarrow x>-\frac{4}{3}$$

Además, como el logaritmo se encuentra en el denominador, este no puede anularse:

$$\log(3x+4)=0\Rightarrow 3x+4=1\Rightarrow x=-1$$

En consecuencia, tenemos que excluir también este valor, por lo que

$$D(f)=\left(-\frac{4}{3},\infty\right)-\{-1\}$$

f) Por la definición de la tangente, quedan fuera del dominio de esta función los valores de x tales que

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Esto ocurre cuando el ángulo es múltiplo impar de $\pi/2$:

$$x+\frac{\pi}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ \text{con } k=0,\pm1,\pm2,\ldots\Rightarrow x+\cancel{\frac{\pi}{2}}=\cancel{2}k\frac{\pi}{\cancel{2}}+\cancel{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow x=k\pi$$

Por tanto, $D(f)=\mathbb{R}-\{k\pi|\,k\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{R}-\{0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\ldots\}$.

g) Por la definición de la cosecante, están excluidos del dominio de esta función los valores de x tales que $\operatorname{sen}2x=0$.

Esto ocurre cuando el ángulo es múltiplo de π :

$$2x=k\pi,\ \text{con } k=0,\pm1,\pm2,\ldots\Rightarrow x=k\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, $D(f)=\mathbb{R}-\left\{k\frac{\pi}{2} | k\in\mathbb{Z}\right\}=\mathbb{R}-\left\{0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi,\pm\frac{3\pi}{2},...\right\}$.

h) El denominador de esta función se anula en x = 0, valor para el cual no está definida:

$$D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$$

37. Determina el dominio de estas funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<1\\ \sqrt{x-1} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<0\\ \sqrt{x-1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x\leq -1\\ \sqrt{x-1} & \text{si } x>-1\end{cases}$

Como funciones individuales, los dos trozos de estas cuatro funciones tendrían los siguientes dominios:

$$D\left(\sqrt{x-1}\right)=[1,\infty) \quad \text{y} \quad D\left(\frac{1}{x+1}\right)=\mathbb{R}-\{-1\}$$

Teniendo esto en cuenta, vemos que las cuatro funciones definidas a trozos a partir de estas dos poseen los siguientes dominios:

a) $D(f)=[0,\infty)$ b) $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup[1,\infty)$ c) $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

d) $D(f)=(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$

38. Halla los puntos de corte con los ejes de cada una de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{5-4x}{2}$

b) $f(x)=x^2+4x+3$

c) $f(x)=-x^3-2x^2+x+2$

d) $f(x)=\dfrac{3x-2}{5-x}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}+1$

f) $f(x)=\sqrt{4x^2-3}$

g) $f(x)=1-3^{2-x}$

h) $f(x)=\log_2\dfrac{2x-1}{x-8}$

i) $f(x)=3\,\text{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

j) $f(x)=-2\cos(x+\dfrac{\pi}{2})$

a) $OX: f(x)=0\Rightarrow\dfrac{5-4x}{2}=0\Rightarrow x=\dfrac{5}{4}\Rightarrow\left(\dfrac{5}{4},0\right)$ es el punto de corte con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=\dfrac{5}{2}\Rightarrow\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

b) $OX: f(x)=0\Rightarrow x^2+4x^2+3=0\Rightarrow x_1=-3, x_2=-1\Rightarrow(-3,0),(-1,0)$ son los puntos de corte con el eje de abscisas.

OY: $f(0)=3 \Rightarrow (0,3)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

c) OX: $f(x)=0 \Rightarrow -x^3-2x^2+x+2=0 \Rightarrow (x+2)(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=-1, x_3=1 \Rightarrow (-2,0),(\pm 1,0)$ son los puntos de corte con el eje de abscisas.

OY: $f(0)=2 \Rightarrow (0,2)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

d) OX: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{3x-2}{5-x}=0 \Rightarrow 3x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3},0\right)$ es el punto de corte con el eje de abscisas.

OY: $f(0)=-\dfrac{2}{5} \Rightarrow \left(0,-\dfrac{2}{5}\right)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

e) OX: como $f(x)=\dfrac{x}{1-x}+1=\dfrac{1}{1-x} \neq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, la función carece de puntos de corte con el eje de abscisas.

OY: $f(0)=1 \Rightarrow (0,1)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

f) OX: $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{4x^2-3}=0 \Rightarrow 4x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ son los puntos de corte con el eje de abscisas.

OY: como $4x^2-3 \geq 0 \Rightarrow D(f)=\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},\infty\right)=\mathbb{R}-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, no es posible evaluar la función en x = 0, al no formar este valor parte de su dominio; por tanto, la función carece de punto de corte con el eje de ordenadas.

g) OX: $f(x)=0 \Rightarrow 1-3^{2-x}=0 \Rightarrow 3^{2-x}=1 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$ es el punto de corte con el eje de abscisas.

OY: $f(0)=1-3^2=-8 \Rightarrow (0,-8)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

h) OX: $f(x)=0 \Rightarrow \log_2 \dfrac{2x-1}{x-8}=0 \Rightarrow \dfrac{2x-1}{x-8}=1 \Rightarrow x=-7 \Rightarrow (-7,0)$ es el punto de corte con el eje de abscisas.

OY: $f(0)=\log_2 \dfrac{1}{8}=-3 \Rightarrow (0,-3)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

Dado que el logaritmo exige argumentos estrictamente positivos, tenemos que $\dfrac{2x-1}{x-8}>0 \Rightarrow D(f)=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right) \cup (8,\infty)$, por lo que, en efecto, la función está definida en los puntos de corte previamente calculados.

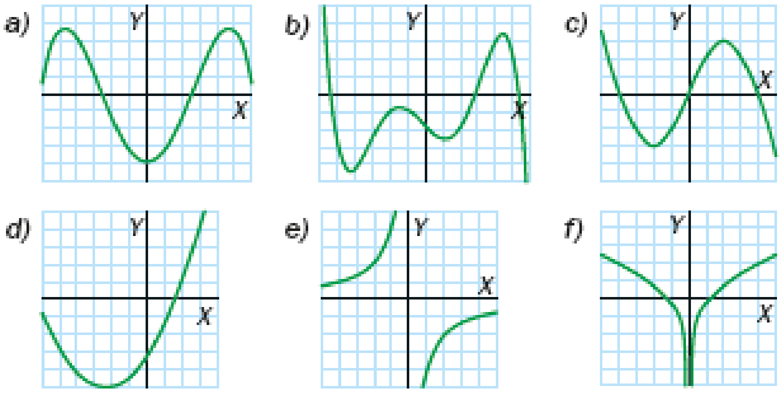
i) OX: $f(x)=0 \Rightarrow 3\,\text{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow x-\dfrac{\pi}{2}=k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}=(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \left((2k+1)\dfrac{\pi}{2},0\right)$ son los infinitos puntos de corte con el eje de abscisas.

OY: $f(0)=3\,\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-3 \Rightarrow (0,-3)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

j) OX: $f(x)=0 \Rightarrow -2\cos(x+\dfrac{\pi}{2})=0 \Rightarrow x+\dfrac{\pi}{2}=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}=k\pi+\dfrac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=k\pi \Rightarrow (k\pi,0)$, son los infinitos puntos de corte con el eje de abscisas.

OY: $f(0) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

39. Observa las siguientes gráficas y determina si las funciones a las que representan poseen o no alguna simetría:



En cada gráfica, inspeccionamos los valores que adopta la función a ambos lados del eje de ordenadas, es decir, para valores positivos y negativos de la variable x, y comparamos f(-x) con f(x):

a) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ función par .

b) $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ no es par ni impar .

c) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ función impar .

d) $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ no es par ni impar .

e) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ función impar .

f) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ función par

40. Determina la simetría de estas funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = e^{-x^2}$

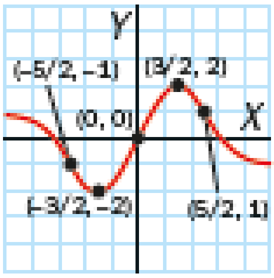
En cada caso, inspeccionamos el valor de f(-x) y lo comparamos con el de f(x):

a) $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = -\sqrt{x} = -f(x) \Rightarrow$ función impar.

b) $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x) \Rightarrow$ función par.

c) $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)\Rightarrow$ función par.

41. Analiza el crecimiento, curvatura y acotación de la función f(x) a partir de su representación gráfica. ¿Aprecias en ella alguna simetría?



Los extremos de la función f(x) se localizan en los puntos de coordenadas $\left(-\frac{3}{2},-2\right)$, que es un mínimo absoluto, y $\left(\frac{3}{2},2\right)$, que es un máximo absoluto; por tanto, esta es creciente en el intervalo $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ y decreciente en los intervalos $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$.

La función posee, además, tres puntos de inflexión, de coordenadas $\left(-\frac{5}{2},-1\right)$, $(0,0)$ y $\left(\frac{5}{2},1\right)$ siendo abierta hacia abajo (convexa) en los intervalos $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup\left(0,\frac{5}{2}\right)$ y abierta hacia arriba (cóncava) en los intervalos $\left(-\frac{5}{2},0\right)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)$.

Se trata de una función acotada, pues los valores que esta toma en el mínimo y en el máximo absolutos representan, respectivamente, la cota inferior y superior de la función: $-2\le f(x)\le 2$.

Finalmente, si observamos los valores que adopta la función a ambos lados del eje de OY, comprobamos que $f(-x)=-f(x)$, luego es una función impar.

42. Comprueba si estas funciones poseen alguna simetría:

a) $f(x)=x^4-3x^2+6$

b) $f(x)=3x-2x^3$

c) $f(x)=-x^2+7x-3$

d) $f(x)=\dfrac{-x}{x^3-5x}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x}$

f) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

g) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

h) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

i) $f(x)=x\,e^{-x^2}$

j) $f(x)=\log(x^2+1)$

k) $f(x)=e^{-x^2}\operatorname{sen} x$

l) $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$

a) $f(-x)=(-x)^4-3(-x)^2+6=x^4-3x^2+6=f(x)\Rightarrow$ función par.

b) $f(-x)=3(-x)-2(-x)^3=-3x+2x^3=-\left(3x-2x^3\right)=-f(x)\Rightarrow$ función impar.

c) $f(-x)=(-x)^2+7(-x)-3=x^2-7x-3$, que no coincide con $f(x)=-x^2+7x-3$ ni con $-f(x)=x^2-7x+3$, luego esta función no es par ni impar.

d) $f(-x)=\dfrac{-(-x)}{(-x)^3-5(-x)}=\dfrac{x}{-x^3+5x}=\dfrac{-x}{x^3-5x}=f(x)\Rightarrow$ función par.

e) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-3}{2(-x)}=\dfrac{x^2-3}{-2x}=-\dfrac{x^2-3}{2x}=-f(x)\Rightarrow$ función impar.

f) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$, que no coincide con $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ ni con $-f(x)=-\dfrac{1-x}{1+x}$, luego esta función no es par ni impar.

g) $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)\Rightarrow$ función par.

h) $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}=f(x)\Rightarrow$ función par.

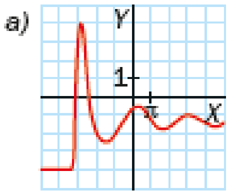
i) $f(-x)=(-x)e^{-(-x)^2}=-x\,e^{-x^2}=-f(x)\Rightarrow$ función impar.

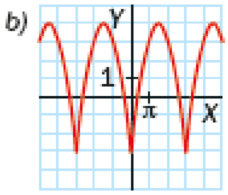
j) $f(-x)=\log\left[(-x)^2+1\right]=\log(x^2+1)=f(x)\Rightarrow$ función par.

k) $f(-x)=e^{-(-x)^2}\operatorname{sen}(-x)=e^{-x^2}\left(-\operatorname{sen} x\right)=-e^{-x^2}\operatorname{sen} x=-f(x)\Rightarrow$ función impar.

l) $f(-x)=\operatorname{sen}(-x)+\cos(-x)=-\operatorname{sen} x+\cos x$, que no coincide con $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$ ni con $-f(x)=-\operatorname{sen} x-\cos x$, luego esta función no es par ni impar.

43. ¿Son periódicas las siguientes funciones? En caso afirmativo, ¿cuál es su periodo?





a) No es una función periódica.

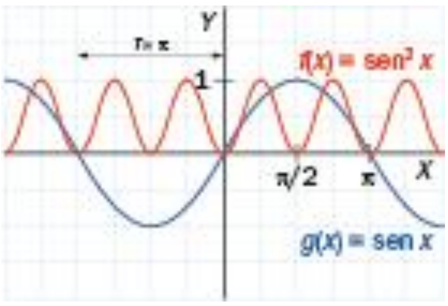
b) Es una función periódica de periodo $T = 3\pi$.

44. Representa la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}^2 x$ y estudia su simetría y periodicidad. Compara las conclusiones que obtengas con la simetría y periodicidad de la función seno y justifica la diferencia que halles entre ambas funciones a este respecto.

Representamos las gráficas de las funciones $g(x) = \text{sen} x$ y $f(x) = \text{sen}^2 x$ evaluándolas en algunos puntos:

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$
$g(x) = \text{sen} x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$f(x) = \text{sen}^2 x$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Al comparar ambas gráficas, podemos observar que $f(x) = \text{sen}^2 x$ es par y oscila entre los valores 0 y 1 con un periodo $T = \pi$, mientras que $g(x) = \text{sen} x$ es impar y oscila entre los valores -1 y +1 con un periodo $T = 2\pi$.



El comportamiento de la función $f(x) = \text{sen}^2 x$ se explica por el hecho de que esta se obtiene a partir del cuadrado de la función $g(x) = \text{sen} x$:

$$f(x) = \text{sen}^2 x = (\text{sen}\, x)^2 = [g(x)]^2$$

operación que arroja, a partir de los valores correspondientes de *g*(*x*), valores positivos comprendidos entre 0 y 1 para *f*(*x*), haciendo de *f*(*x*) una función par cuyo periodo resulta ser la mitad que el *g*(*x*).

Funciones elementales

45. Obtén la expresión analítica de estas funciones polinómicas de primer y segundo grado:

a) La recta que pasa por los puntos (2,-3) y (-4,1).

b) La recta de pendiente m = -4 que pasa por el punto (-1,5).

c) La parábola cuyos puntos de corte con los ejes son (-2,0), (3,0) y (0,6).

d) La parábola que corta al eje OY en (0,-2) y con vértice en el punto (1,-1).

a) Resolvemos el sistema que resulta al sustituir los puntos por los que pasa la recta en la ecuación $y = mx + n$:

$$\begin{cases}(2,-3) \Rightarrow -3 = 2m + n \\ (-3,1) \Rightarrow 1 = -3m + n\end{cases} \Rightarrow m = -\frac{4}{5}, n = -\frac{7}{5}$$

Así pues, la expresión analítica de esta función es $f(x) = -\dfrac{4x+7}{5}$.

b) Sustituimos el punto (-1,5) en la ecuación de la recta con pendiente m = -4 para obtener la ordenada en el origen:

$$\begin{cases}y = -4x + n \\ (-1,5)\end{cases} \Rightarrow 5 = (-4)(-1) + n \Rightarrow n = 1$$

Por tanto, la expresión analítica de la función es $f(x) = -4x + 1$.

c) Los puntos de corte con el eje OX indican que podemos factorizar la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ como $y = a(x+2)(x-3)$, donde el coeficiente a lo obtenemos a partir del punto de corte con el eje OY:

$$\begin{cases}y = a(x+2)(x-3) \\ (0,6)\end{cases} \Rightarrow 6 = -6a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -(x+2)(x-3)$$

En consecuencia, la expresión analítica de esta función cuadrática es $f(x) = -(x+2)(x-3) = -x^2 + x + 6$.

d) Resolvemos el sistema obtenido a partir de los puntos por los que pasa la parábola $y = ax^2 + bx + c$ y el valor de la abscisa del vértice, $x_v = -\dfrac{b}{2a}$:

$$\begin{cases} (0,-2) \Rightarrow -2 = c \\ (1,-1) \Rightarrow -1 = a+b+c \\ 1 = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow -2a = b \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=2, c=-2$$

Por consiguiente, la expresión analítica de esta función cuadrática es $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

46. Considerando los puntos de corte con los ejes y sus propiedades generales, esboza la gráfica de estas cuatro funciones polinómicas:

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$

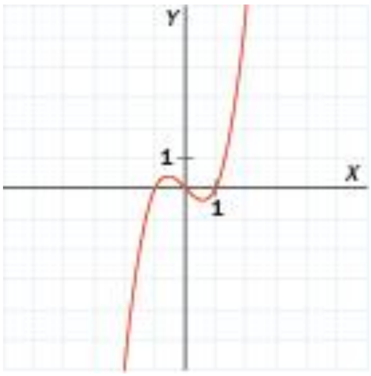
c) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

d) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

a) Se trata de una función polinómica, así que $D(f) = \mathbb{R}$ y, por tanto, corta al eje OY. Como es de grado tres, es decir, de grado impar, tenemos también que $R(f) = \mathbb{R}$, así que, por lo menos, cortará al eje OX en un punto:

$$OX: f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x = x(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow (-1,0),(0,0),(1,0)$$

$$OY: f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$$

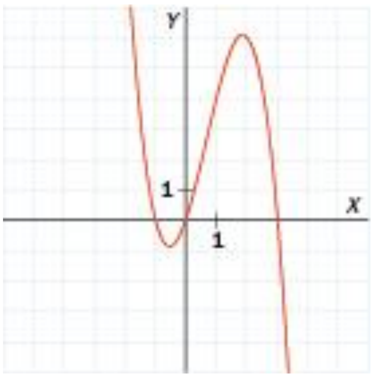


Además, en este caso la función posee simetría impar, pues se cumple que $f(-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$.

Por otro lado, como el coeficiente del término cúbico es positivo, sus ramas parabólicas tienden a $\pm\infty$ a medida que la variable x tiende a $\pm\infty$, respectivamente.

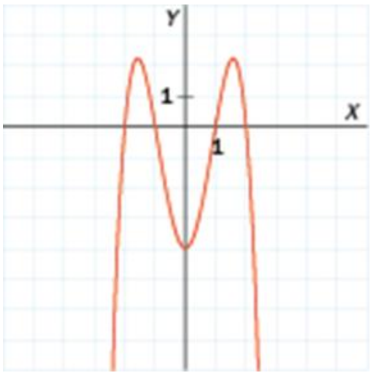
b) Como es una función polinómica, $D(f) = \mathbb{R}$ y, en consecuencia, corta al eje OY. Al ser de grado tres, o sea, de grado impar, tenemos asimismo que $R(f) = \mathbb{R}$, por lo que cortará al eje OX en, al menos, un punto:

$$OX: f(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 2x^2 + 3x = x(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3 \Rightarrow (-1,0),(0,0),(3,0)$$
$$OY: f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$$



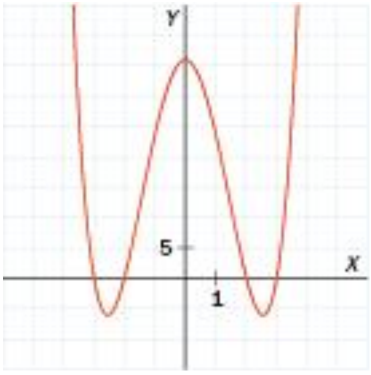
Dado que el coeficiente del término cúbico es negativo, sus ramas parabólicas tienden a $\mp\infty$ si la variable x tiende a $\pm\infty$, respectivamente.

c) Por ser una función polinómica, $D(f)=\mathbb{R}$ y, por lo tanto, corta al eje OY. Como es de grado cuatro, es decir, de grado par, su recorrido no es toda la recta real y no podemos asegurar de antemano que corte al eje OX. Por otro lado, como el coeficiente del término x4 es negativo, la función está acotada superiormente y sus ramas parabólicas tienden ambas hacia $-\infty$ cuando la variable x tiende a $\pm\infty$. Hallemos sus puntos de corte:



$$OX: f(x)=0 \Rightarrow -x^4+5x^2-4=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=-2, x_2=-1, x_3=1, x_4=2 \Rightarrow (-2,0),(-1,0),(1,0),(2,0)$$
$$OY: f(0)=-4 \Rightarrow (0,-4)$$

d) Como función polinómica, $D(f)=\mathbb{R}$ y, en consecuencia, corta al eje OY. Dado que es de grado cuatro, o sea, de grado par, su recorrido no coincide con la recta real y no es posible decir a priori si corta o no al eje OX. Por otro lado, el coeficiente del término x4 es positivo, así que la función está acotada inferiormente y las dos ramas parabólicas tienden hacia $+\infty$ si la variable x tiende a $\pm\infty$ Sus puntos de corte con los ejes son:



$$OX: f(x)=0 \Rightarrow f(x)=x^4-13x^2+36=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=-3, x_2=-2, x_3=2, x_4=3 \Rightarrow (-3,0),(-2,0),(2,0),(3,0)$$

$$OY: f(0)=36 \Rightarrow (0,36)$$

47. Esboza la gráfica de las siguientes funciones hallando sus puntos de corte con los ejes y evaluando algunos otros puntos de sus correspondientes dominios. ¿Poseen alguna simetría?

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{-x}}$

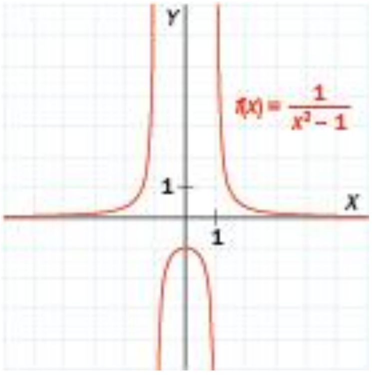
f) $f(x)=\log x^2$

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

$OX: f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2-1} \neq 0\ \forall x \in D(f) \Rightarrow$ no tiene puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=-1 \Rightarrow (0,-1)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

$f(-x)=\dfrac{1}{x^2-1}=f(x) \Rightarrow$ posee simetría par.



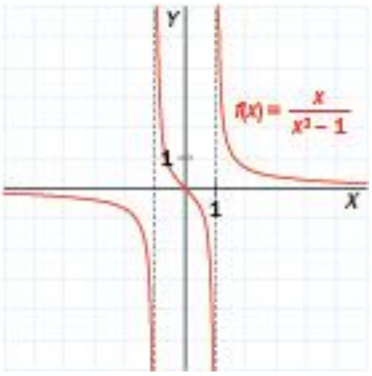
x	0	±1/2	±3/2	±2	±3	±4
y	-1	-4/3	4/5	1/5	1/8	1/15

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

$OX: f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x}{x^2-1}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

$f(-x)=\dfrac{-x}{x^2-1}=-f(x) \Rightarrow$ posee simetría impar.

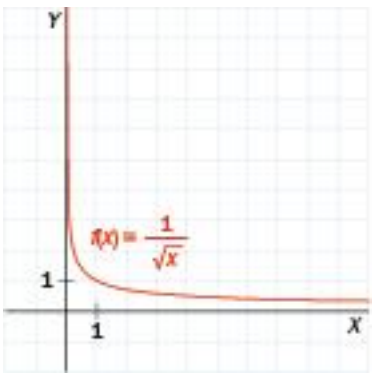


x	0	±1/2	±3/2	±2	±3	±4
y	0	$\mp 4/6$	$\pm 6/5$	$\pm 2/5$	$\pm 3/8$	$\pm 4/15$

c) $D(f)=(0,\infty)$

$OX: f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}} \neq 0\ \forall x \in D(f) \Rightarrow$ no tiene puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY: x=0 \notin D(f) \Rightarrow$ no tiene punto de corte con el eje de ordenadas.



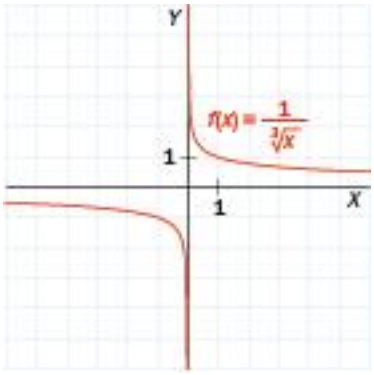
x	1/25	1/16	1/9	1/4	1	4	9	16	25
y	5	4	3	2	1	1/2	1/3	1/4	1/5

d) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

$OX: f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \neq 0 \ \forall x \in D(f) \Rightarrow$ no tiene puntos de corte con el eje de absci sas.

$OY: x=0 \notin D(f) \Rightarrow$ no tiene punto de corte con el eje de ordenadas.

$f(-x)=\frac{1}{-\sqrt[3]{x}}=-f(x) \Rightarrow$ posee simetría impar.



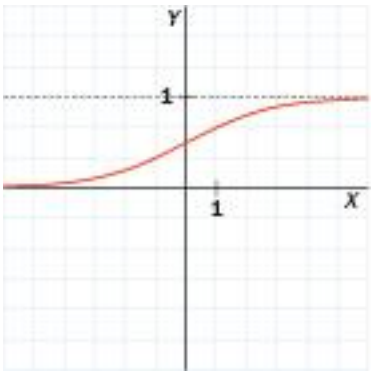
x	±1/64	±1/27	±1/8	±1	±8	±27	±64
y	±4	±3	±2	±1	±1/2	±1/3	±1/4

e) $D(f)=\mathbb{R}$, pues $1+2^{-x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$OX: f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{1+2^{-x}} \neq 0 \ \forall x \in D(f) \Rightarrow$ no tiene puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY: f(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje de ordenadas.

$f(-x)=\frac{1}{1+2^{x}}$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, luego no posee simetría par ni impar.



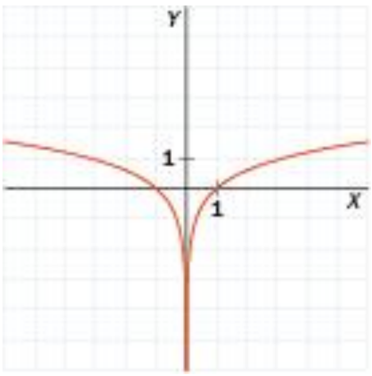
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1/9	1/5	1/3	1/2	2/3	4/5	8/9

f) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

$OX: f(x)=0 \Rightarrow \log x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow (\pm 1,0)$ son los puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY: x=0 \notin D(f) \Rightarrow$ no tiene punto de corte con el eje de ordenadas.

$f(-x)=\log x^2 = f(x) \Rightarrow$ posee simetría par.2logx



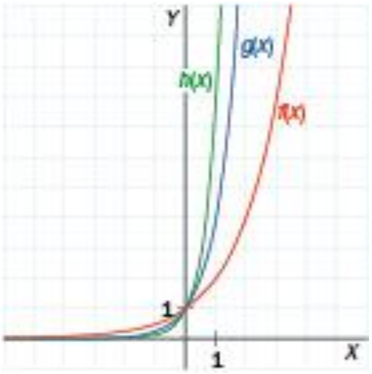
x	±1/e	±1	±e	±e2	±e3	±e4
y	-2	0	2	4	6	8

48. Representa las funciones exponenciales de cada apartado sobre unos mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo se comportan según el valor de la base?

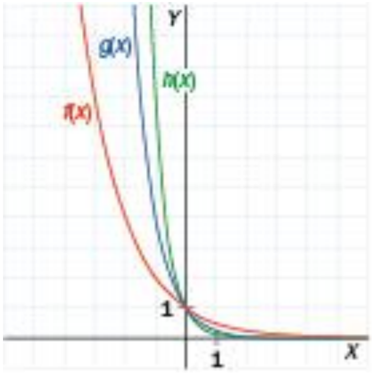
a) $f(x)=2^x \qquad g(x)=4^x \qquad h(x)=8^x$

b) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad h(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^x$

a) Las tres son funciones exponenciales crecientes, ya que su base es mayor que la unidad. Se aprecia cómo su crecimiento es mayor a medida que aumenta el valor de la base.



b) Las tres son funciones exponenciales decrecientes, pues su base está comprendida entre cero y uno. Se observa que el decrecimien to es más acusado según disminuye el valor de la base.

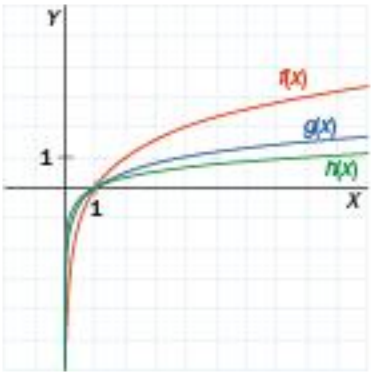


49. Representa las funciones logarítmicas de cada apartado sobre unos mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo se comportan según el valor de la base?

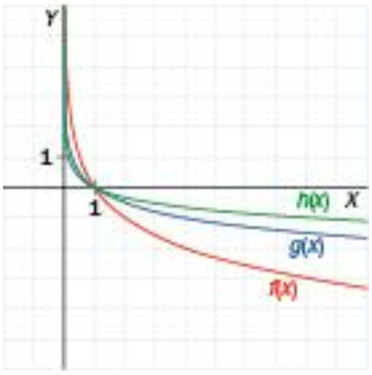
a) $f(x)=\log_2 x \qquad g(x)=\log_4 x \qquad h(x)=\log_8 x$

b) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x \qquad g(x)=\log_{\frac{1}{4}} x \qquad h(x)=\log_{\frac{1}{8}} x$

a) Las tres son funciones logarítmicas crecientes, debido a que su base es mayor que la unidad. Se ve cómo su crecimiento es más lento cuant o mayor es el valor de la base



b) Las tres son funciones logarítmicas decrecientes, porque su base de halla comprendida entre cero y uno. Se aprecia que el decrecimiento es más acusado según aumenta el valor de la base



50. ¿Cuál es el periodo de estas funciones trigonométricas?

a) $f(x) = \text{sen}\,5x$

b) $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$

c) $f(x) = \text{tg}\left(\frac{4x}{3}\right)$

d) $f(x) = \text{cotg}\,2x$

a) El periodo de la función seno es 2π radianes; por lo tanto:

$$f(x) = \text{sen}(5x) = \text{sen}(5x + \mathbf{2\pi}) = \text{sen}\left[5\overbrace{\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)}^{x+T}\right] = f(x+T) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5}$$

b) Como el periodo de la función coseno es 2π radianes:

$$f(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2} + \mathbf{2\pi}\right) = \text{sen}\left[\frac{3}{2}\overbrace{\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)}^{x+T}\right] = f(x+T) \Rightarrow T = \frac{4\pi}{3}$$

c) Dado que periodo de la función tangente es π radianes, ahora tenemos:

$$f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{4x}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{4x}{3}+\boldsymbol{\pi}\right)=\operatorname{tg}\left[\frac{4}{3}\overbrace{\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}^{x+T}\right]=f\left(x+T\right)\Rightarrow T=\frac{3\pi}{4}$$

d) El periodo de la función cotangente es π radianes, así que:

$$f(x)=\operatorname{cotg}\left(2x\right)=\operatorname{cotg}\left(2x+\boldsymbol{\pi}\right)=\operatorname{cotg}\left[2\overbrace{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}^{x+T}\right]=f\left(x+T\right)\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$$

51. Halla la ordenada en el origen, la amplitud y el periodo de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x)=-2\operatorname{sen}\left(3x-\pi\right)$

b) $f(x)=4\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x)=6\operatorname{sen}\left(\frac{5x+3\pi}{4}\right)-7$

d) $f(x)=3-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2x}{5}\right)$

a) El punto de corte con el eje OY está en: $f(0)=-2\operatorname{sen}\left(3\cdot 0-\pi\right)=-2\operatorname{sen}\left(-\pi\right)=\operatorname{sen}\pi=0\Rightarrow\left(0,0\right)$.

Dado que esta función oscila entre los extremos ymáx = 2 e ymín = -2, su amplitud es:

$$A=\frac{y_{\text{máx}}-y_{\text{mín}}}{2}=\frac{2-(-2)}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Por último, como el periodo de la función seno es 2π radianes:

$$f(x)=-2\operatorname{sen}\left(3x-\pi\right)=-2\operatorname{sen}\left(3x-\pi+\boldsymbol{2\pi}\right)=-2\operatorname{sen}\left[3\overbrace{\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}^{x+T}-\pi\right]=f\left(x+T\right)\Rightarrow T=\frac{2\pi}{3}$$

b) El punto de corte con el eje OY se encuentra en

$$f(0)=4\cos\left(\frac{0}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=4\cdot 0=0\Rightarrow\left(0,0\right).$$

Como la función oscila entre los extremos ymáx = 4 e ymín = -4, su amplitud es:

$$A=\frac{y_{\text{máx}}-y_{\text{mín}}}{2}=\frac{4-(-4)}{2}=\frac{8}{2}=4$$

El periodo de la función coseno es 2π radianes, así pues:

$$f(x)=4\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=4\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}+\boldsymbol{2\pi}\right)=4\cos\left[\frac{1}{4}\overbrace{\left(x+\boldsymbol{8\pi}\right)}^{x+T}-\frac{\pi}{2}\right]=f\left(x+T\right)\Rightarrow T=8\pi$$

c) El punto de corte con el eje OY está en

$$f(0)=6\,\text{sen}\left(\frac{5\cdot 0+3\pi}{4}\right)-7=6\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)-7=6\cdot(-1)-7=-13\Rightarrow(0,-13).$$

La función oscila entre los extremos ymáx = -1 e ymín = -13, así que su amplitud es:

$$A=\frac{y_{\text{máx}}-y_{\text{mín}}}{2}=\frac{-1-(-13)}{2}=\frac{12}{2}=6$$

Dado que el periodo de la función seno es 2π radianes:

$$f(x)=6\,\text{sen}\left(\frac{5x+3\pi}{4}\right)-7=6\,\text{sen}\left(\frac{5x+3\pi}{4}+\mathbf{2\pi}\right)-7=6\,\text{sen}\left[\frac{5}{4}\overbrace{\left(x+\frac{\mathbf{8\pi}}{\mathbf{5}}\right)}^{x+T}+\frac{3\pi}{4}\right]-7=f(x+T)\Rightarrow T=\frac{8\pi}{5}$$

d) El punto de corte con el eje OY está en

$$f(0)=f(x)=3-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\cdot 0}{5}\right)=3-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=3-\cancel{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}=3-\sqrt{2}\Rightarrow\left(0,3-\sqrt{2}\right).$$

Como la función oscila entre los extremos ymáx = 5 e ymín = 1, su amplitud es:

$$A=\frac{y_{\text{máx}}-y_{\text{mín}}}{2}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

El periodo de la función seno es 2π radianes, así que:

$$f(x)=f(x)=3-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2x}{5}\right)=f(x)=3-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2x}{5}+\mathbf{2\pi}\right)=3-2\cos\left[\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}(x+\mathbf{5\pi})\right]=f(x+T)\Rightarrow T=5\pi$$

52. Representa estas funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } x<1\\ 2x-1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<-1\\ x+1 & \text{si } -1\leq x<1\\ -2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

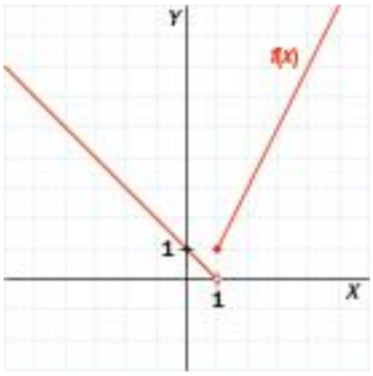
d) $f(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{si } x\leq -1\\ 1-x^2 & \text{si } -1<x\leq 1\\ x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{si } x\leq 0\\ \log x & \text{si } x>0\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -e^{x} & \text{si } x>0\end{cases}$

a) El primer trozo, definido para x < 1, es la recta y = 1-x, de pendiente m = -1, cuyos puntos de corte con los ejes son (0, 1) y (1, 0).

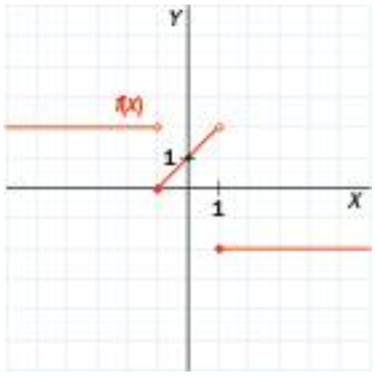
El segundo trozo, definido para x ≥ 0, se trata la recta y = 2x - 1, de pendiente m = 2, pasa, por ejemplo, por los puntos (1, 1) y (3, 5).



b) El primer trozo, definido para x < -1, es la función constante y = 2, es decir, una recta horizontal de altura 2.

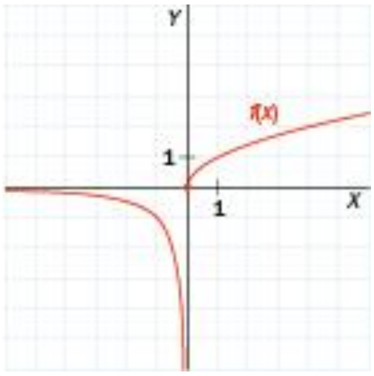
El segundo trozo, definido para -1 ≤ x <1, consiste en la recta y = x + 1, de pendiente m = 1, cuyos puntos de corte con los ejes son (0,1) y (-1,0);

El tercer y último trozo, definido para x ≥ 1, es la función constante y = -2, o sea, una recta horizontal de altura -2.



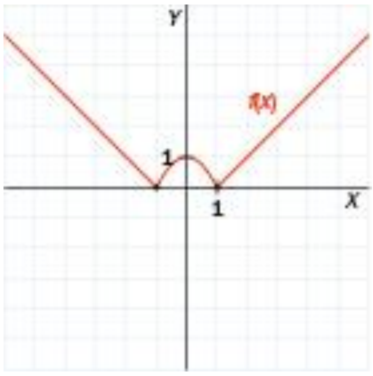
c) El primer trozo, definido para x < 0, consiste en la rama situada en el tercer cuadrante de la hipérbola y = 1/x.

El segundo trozo, definido para x ≥ 0, es la función con raíz $y = \sqrt{x}$.



d) El primer trozo, definido para x ≤ -1, se trata de la recta y = -x - 1, de pendiente m = -1 y puntos de corte con los ejes en (-1, 0) y (0, -1).

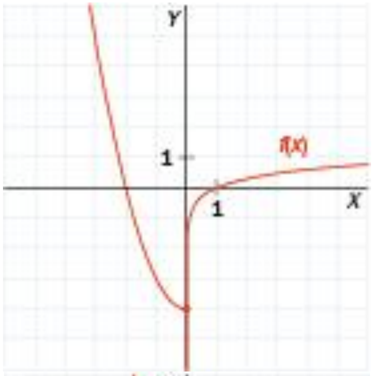
El segundo trozo, definido para -1 < x ≤ 1, consiste en la parábola abierta hacia abajo y = 1 – x2, con (0,1) como ordenada en el origen y vértice, y puntos de corte con el eje OX en (-1, 0) y (1, 0), aunque el primero no llega a alcanzarlo por no estar definida en x = -1.



El tercer trozo, definido para x > 1, es la recta y = x - 1, de pendiente m = 1, que pasa, por ejemplo, por el punto (3, 2), y que cortaría al eje OX en (1, 0) si estuviera definida en x = 1.

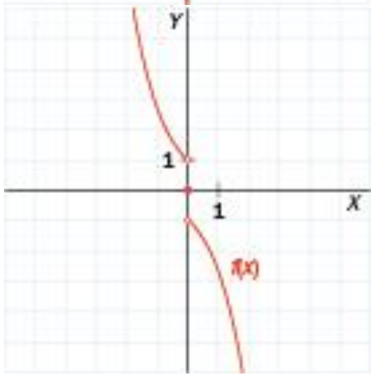
e) El primer trozo, definido para x ≤ 0, se trata de una rama de la parábola abierta hacia arriba y = x2 – 4, con (-2, 0) y (0, -4) como puntos de corte con los ejes (este úl timo es el vértice).

El segundo trozo, definido para x > 0 es la función logarítmica creciente y = log x. que corta al eje OX en (1, 0) y pasa por el punto (e, 1).



f) El primer trozo, definido para x < 0, consiste en la función exponencial decreciente y = e-x, que pasa por (-1, e) y que, de estar definida en x = 0, cortaría al eje OY en (0, 1).

El segundo trozo, definido para x = 0, es la función constante y = 0, de la cual solo puede tomare el punto (0, 0).



El tercer y último trozo, definido para x > 0, se trata de la función exponencial decreciente y = -ex, que pasa por (1, -e) y que cortaría al eje OY en (0, -1) si estuviera definida en x = 0.

53. Expresa estas funciones como funciones definidas a trozos y representa su gráfica:

a) $f(x)=|2x+1|-|2x-1|$

b) $f(x)=|x^2+x-6|$

c) $f(x)=4|x|-x^2$

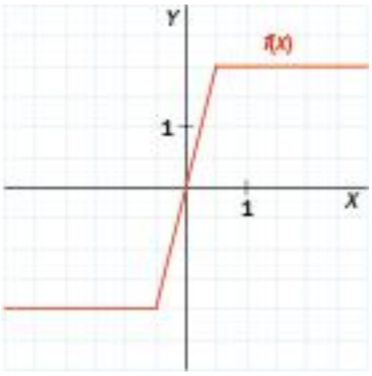
d) $f(x)=\sqrt{|x-2|}$

e) $f(x)=e^{|1-x|}$

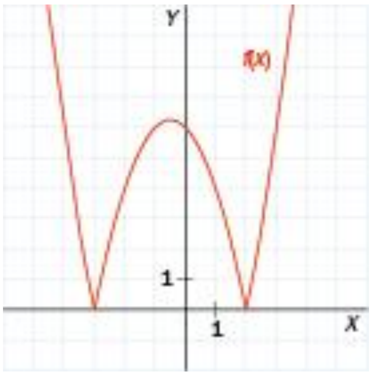
f) $f(x)=\log|x+3|$

a) El argumento del primer valor absoluto se anula en x = -1/2 y es negativo antes de dicho valor; el del segundo, se anula en x = 1/2 y es negativo antes de dicho valor; por tanto, esta función puede expresarse como:

$$f(x)=|2x+1|-|2x-1|=\begin{cases} -(2x+1)+(2x-1)=-2 & \text{si } x<-\frac{1}{2} \\ (2x+1)+(2x-1)=4x & \text{si } -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2} \\ (2x+1)-(2x-1)=2 & \text{si } x\ge\frac{1}{2} \end{cases}$$

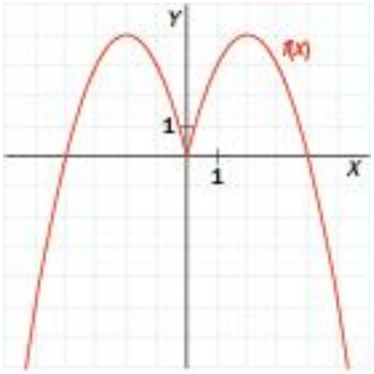


b) El argumento del valor absoluto es una parábola abierta hacia arriba que puede expresarse como $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$; se anula, por tanto, en x = -3 y en x = 2, siendo negativa en el intervalo (-3, 2). Así pues, esta función se expresa de la siguiente manera:



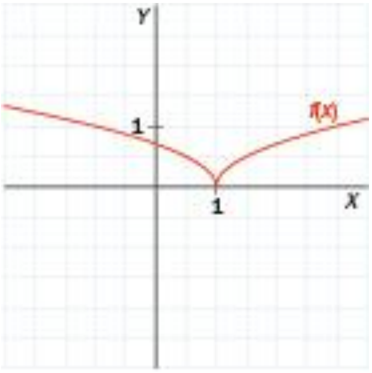
$$f(x)=|x^2+x-6|=\begin{cases} x^2+x-6 & \text{si } x<-3 \\ -x^2-x+6 & \text{si } -3\le x<2 \\ x^2+x-6 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

c) Según indica el valor absoluto, la función resulta ser:



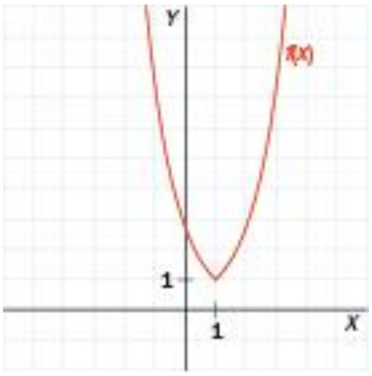
$$f(x)=4|x|-x^2=\begin{cases} -4x-x^2 & \text{si } x<0 \\ 4x-x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

d) Como el argumento del valor absoluto se anula en x = 2 y es negativo antes de dicho valor, esta función con raíz se expresa como:



$$f(x)=\sqrt{|x-2|}=\begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

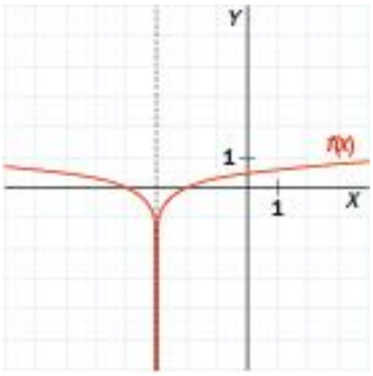
e) El argumento del valor absoluto se anula en x = 1, y es negativo después de dicho valor. En consecuencia, la función exponencial se expresa como:



$$f(x)=e^{|1-x|}=\begin{cases} e^{1-x} & \text{si } x\le 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

f) El argumento del valor absoluto se anula en x = -3, siendo negativo antes de dicho valor. Por tanto, esta función logarítmica puede expresarse como:

$$f(x)=\log|x+3|=\begin{cases}\log(-x-3) & \text{si } x<-3\\ \log(x+3) & \text{si } x>-3\end{cases}$$



54. La función signo, $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$, hace corresponder cada número real x con su signo: positivo (+1), negativo (-1) o nulo (0) en el caso del número cero.

a) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función signo?

b) Escribe esta función como una función definida a trozos y dibuja su gráfica. ¿Posee alguna simetría?

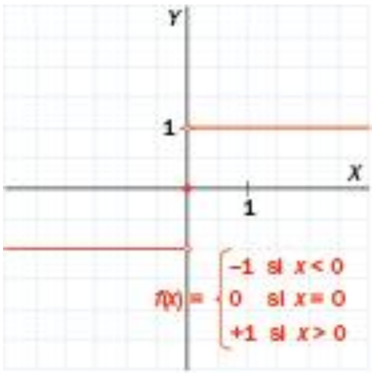
c) Busca una forma de expresar la función signo a partir de la función valor absoluto.

a) Dado que todo número real tiene asociado su correspondiente signo, $D(f)=\mathbb{R}$; el recorrido, en cambio, se restringe a tres valores posibles (-1, 0 y +1), por lo que $R(f)=\{-1,0,+1\}$.

b) Según la definición de la función signo, esta puede ser expresada como:

$$f(x)=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ +1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

La función posee simetría con respecto al origen de coordenadas, O, es decir, es una funció n impar, pues $f(-x)=\mathrm{sgn}(-x)=-\mathrm{sgn}(x)=-f(x)$.



c) Es posible construir la función signo valiéndonos de la función valor absoluto de la manera siguiente:

$$f(x)=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

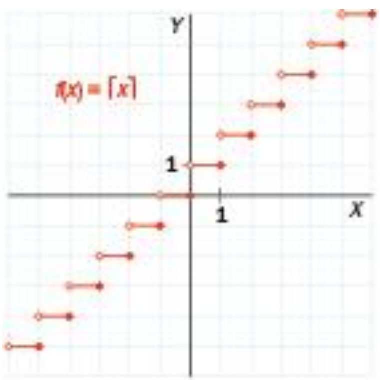
55. Las funciones parte entera asignan a cada número real x el número entero más próximo, lo cual puede realizarse de varias formas:

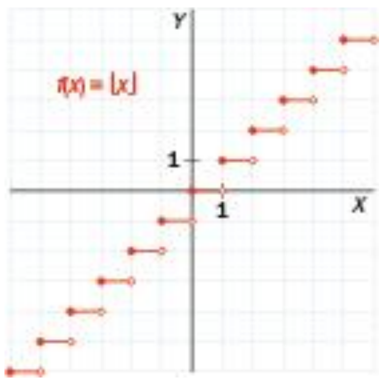
- La función techo, $f(x)=\lceil x \rceil$, lo hace por exceso, tomando el menor número entero mayor o igual que x.
- La función suelo, $f(x)=\lfloor x \rfloor$, lo hace por defecto, tomando el mayor número entero menor o igual que x.
- La función parte entera por truncamiento, $f(x)=[x]$, elimina del número x su parte decimal.
- La función redondeo, $f(x)=\text{redond}(x)$, asigna al número x el entero más próximo que se obtiene por redondeo.

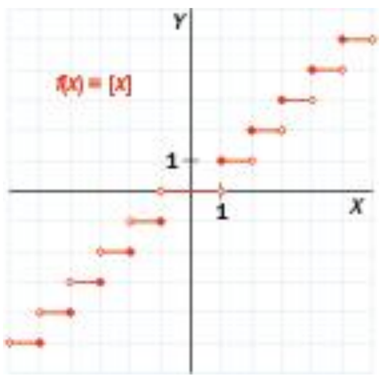
a) ¿Qué dominio y qué recorrido tienen todas estas funciones?

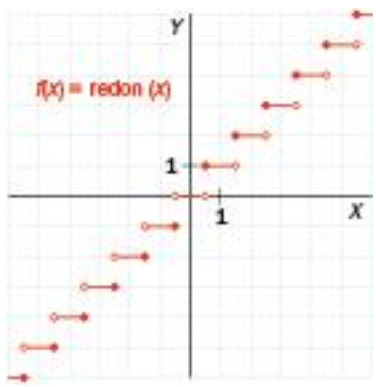
b) Escríbelas como funciones definidas a trozos y representa sus gráficas. ¿Cuál de estas funciones coincide con la definida en el epígrafe 13 de la unidad?

c) Observa las gráficas obtenidas para las funciones techo y suelo: ¿podrías expresar la función $f(x)=[x]$ a partir de estas? Razona tu respuesta.









a) A todo número real se le puede asignar, de alguna de las cuatro maneras que se han descrito, su correspondiente parte entera, por lo que el dominio de todas estas funciones consiste en el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. En cambio, por la mis ma definición de parte entera, el recorrido de estas funciones es el conjunto de los número enteros, $\mathbb{Z}$.

b) Según la definición de cada una de ellas, podemos representar gráficamente y expresar estas cuatro funciones parte entera de la siguiente manera:

$$\text{Techo}: \quad f(x)=\lceil x \rceil=\begin{cases} \quad\ldots \\ -2 \text{ si } -3<x\leq -2 \\ -1 \text{ si } -2<x\leq -1 \\ \ \ 0 \text{ si } -1<x\leq \ \ 0 \\ \ \ 1 \text{ si } \ \ \ 0<x\leq \ \ 1 \\ \ \ 2 \text{ si } \ \ \ 1<x\leq \ \ 2 \\ \quad\ldots \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\lceil x \rceil=n \text{ si } x\in(n-1,n], \text{ con } n\in\mathbb{Z}$$

$$\text{Suelo}: \quad f(x)=\lfloor x \rfloor=\begin{cases} \quad\ldots \\ -2 \text{ si } -2\leq x<-1 \\ -1 \text{ si } -1\leq x< \ \ 0 \\ \ \ 0 \text{ si } \ \ \ 0\leq x< \ \ 1 \\ \ \ 1 \text{ si } \ \ \ 1\leq x< \ \ 2 \\ \ \ 2 \text{ si } \ \ \ 2\leq x< \ \ 3 \\ \quad\ldots \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\lfloor x \rfloor=n \text{ si } x\in[n,n+1), \text{ con } n\in\mathbb{Z}$$

$$\textbf{Truncamiento}: \quad f(x)=[x]=\begin{cases} \quad\ldots \\ -2 \text{ si } -3<x\leq -2 \\ -1 \text{ si } -2<x\leq -1 \\ \ \ 0 \text{ si } -1<x< \ \ 1 \\ \ \ 1 \text{ si } \ \ \ 1\leq x< \ \ 2 \\ \ \ 2 \text{ si } \ \ \ 2\leq x< \ \ 3 \\ \quad\ldots \end{cases}$$

$$\textbf{Redondeo}: \quad f(x)=\text{redond}(x)=\begin{cases} \quad\ldots \\ -2 \text{ si } -2{,}5<x\leq -1{,}5 \\ -1 \text{ si } -1{,}5<x\leq -0{,}5 \\ \ \ 0 \text{ si } -0{,}5<x< \ \ 0{,}5 \\ \ \ 1 \text{ si } \ \ \ 0{,}5\leq x< \ \ 1{,}5 \\ \ \ 2 \text{ si } \ \ \ 1{,}5\leq x< \ \ 2{,}5 \\ \quad\ldots \end{cases}$$

De estas cuatro funciones parte entera, la que se corresponde con la definida como función parte entera, $f(x)=\text{E}(x)$, en el epígrafe 13 de la unidad, es la función suelo: $f(x)=\lfloor x \rfloor$.

c) En efecto, a partir de las funciones techo y suelo es posible construir la función parte entera por truncamiento, ya que esta se corresponde con la función techo para $x \le -1$ y con la función suelo para $x \ge 1$, asignando el valor cero si $-1 < x < 1$; es decir:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} \lceil x \rceil & \text{si} \quad x \le -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \lfloor x \rfloor & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Operaciones y transformaciones

56. Considera las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \qquad g(x) = \frac{x-1}{2x}$$

Realiza las operaciones que se piden a continuación y halla los dominios de las funciones que resultan de ellas:

a) $f+g$ **b)** $g-f$ **c)** $f \cdot g$ **d)** f/g **e)** g/f **f)** $f \circ g$ **g)** $g \circ f$

Los dominios de estas dos funciones racionales son: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Las funciones que resultan de las operaciones pedidas y sus correspondientes dominios son:

a) $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{2x} = \frac{2x + (x+1)(x-1)}{2x(x+1)} = \frac{x^2+2x-1}{2x^2+2x}$$

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

b) $$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{2x} = \frac{2x - (x+1)(x-1)}{2x(x+1)} = \frac{-x^2+2x+1}{2x^2+2x}$$

$$D(f-g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

c) $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x-1}{2x} = \frac{x-1}{2x(x+1)} = \frac{x-1}{2x^2+2x}$$

$$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

d) $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x-1}{2x}} = \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x^2-1}$$

$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$, , pues $g(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

e) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\frac{x-1}{2x}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{(x+1)(x-1)}{2x}=\frac{x^2-1}{2x}$

$D\left(\frac{g}{f}\right)=D(f)\cap D(g)-\{x|\,f(x)=0\}=\mathbb{R}-\{-1,0\}$, pues $f(x)\neq 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

f) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\frac{1}{g(x)+1}=\frac{1}{\frac{x-1}{2x}+1}=\frac{1}{\frac{3x-1}{2x}}=\frac{2x}{3x-1}$

$D(f\circ g)=\{x\in D(g)\,|\,g(x)\in D(f)\}=D(g)-\{x\,|\,g(x)=-1\}=\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{3}\right\}$,

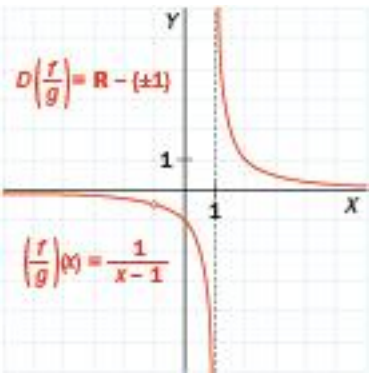
pues $g(x)=-1\Rightarrow x=\frac{1}{3}$.

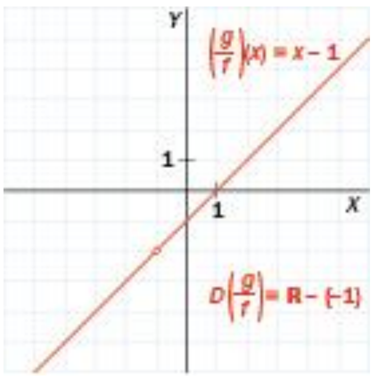
g) $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\frac{f(x)-1}{2f(x)}=\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{-x}{x+1}}{\frac{2}{x+1}}=-\frac{x}{2}$

$D(g\circ f)=\{x\in D(f)\,|\,f(x)\in D(g)\}=D(f)-\{x\,|\,f(x)=0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$,

pues $f(x)\neq 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

57. Con las funciones $f(x)=x+1$ y $g(x)=x^2-1$ define las funciones f/g y g/f. Obtén sus respectivos dominios y represéntalas gráficamente.





Estas dos funciones polinómicas tienen como dominio toda la recta real: $D(f)=\mathbb{R}$ y $D(g)=\mathbb{R}$

Las funciones que se obtienen de las operaciones pedidas y sus dominios correspondientes son:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{1}{x-1}$$

$D\left(\frac{f}{g}\right)=D(f)\cap D(g)-\{x|\,g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{\pm1\}$, pues $g(x)=0\Rightarrow x=\pm1$.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}=x-1$$

$D\left(\frac{g}{f}\right)=D(f)\cap D(g)-\{x|\,f(x)=0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$, pues $f(x)=0\Rightarrow x=-1$.

58. Dadas las funciones $f(x)=3-2x$ y $g(x)=\sqrt{5-x}$, comprueba que $f\circ g\neq g\circ f$. ¿Cuál es el dominio de las funciones obtenidas?

Los dominios de estas dos funciones son: $D(f)=\mathbb{R}$ y $D(g)=(-\infty,5]$.

Las funciones resultado de las operaciones de composición que se piden y sus respectivos dominios son:

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=3-2g(x)=3-2\sqrt{5-x}$$

$$D(f\circ g)=\{x\in D(g)\,|\,g(x)\in D(f)\}=\{x\in(-\infty,5]\,|\,g(x)\in\mathbb{R}\}=(-\infty,5].$$

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\sqrt{5-f(x)}=\sqrt{5-(3-2x)}=\sqrt{2(x+1)}$$

$$D(g\circ f)=\{x\in D(f)\,|\,f(x)\in D(g)\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\leq5\}=[-1,\infty).$$

Como $(f\circ g)(x)=3-2\sqrt{5-x}$ y $(g\circ f)(x)=\sqrt{2(x+1)}$, tenemos, en efecto, que $f\circ g\neq g\circ f$.

59. Con las funciones $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\frac{1}{1-x^2}$, define $f\circ g$ y $g\circ f$. ¿Qué dominio poseen las funciones resultantes?

Estas dos funciones tienen como dominios: $D(f)=[-1,\infty)$ y $D(g)=\mathbb{R}-\{\pm1\}$.

Como resultado de las operaciones de composición obtenemos las siguientes funciones:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x)+1} = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}+1} = \sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}$$

$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid g(x) \geq -1\}$.

Como $g(x) \geq -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-x^2} \geq -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-x^2} + 1 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2-x^2}{1-x^2} \geq 0$, tenemos que

$$D(f \circ g) = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup (-1,1) \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right)$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{1-[f(x)]^2} = \frac{1}{1-\left[\sqrt{x+1}\right]^2} = \frac{1}{1-\left[\sqrt{x+1}\right]^2} = -\frac{1}{x}$$

$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \{x \in [-1,\infty) \mid f(x) \neq \pm 1\} = [-1,\infty) - \{0\} = [-1,0) \cup (0,\infty)$, pues $f(x) = \pm 1 \Rightarrow x = 0$.

60. Sean $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = 5$, halla $f \circ g$ y $g \circ f$.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2[g(x)]^2 - 3g(x) + 1 = 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 1 = 36$. Observa que, como $g(x) = 5$ es una función constante, calcular $f[g(x)]$ es, sencillamente, evaluar la función $f(x)$ en $x = 5$, es decir: $f[g(x)] = f(5) = 36$.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 5$. Ahora, en cambio, se obtiene la propia función $g(x) = 5$, pues aunque la compongamos con cualquier otra función, esta se mantiene constante, al no depender de la variable x.

61. Dadas las funciones $f(x) = 4x + 5$, $g(x) = \sqrt{2x}$ y $h(x) = e^{-x^2}$, realiza la operación $h \circ g \circ f = h[g[f(x)]]$.

Como $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{2f(x)} = \sqrt{2(4x+5)} = \sqrt{8x+10}$, tenemos que:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h\left[g\left[f(x)\right]\right] = e^{-[g[f(x)]]^2} = e^{-\left(\sqrt{8x+10}\right)^2} = e^{-(8x+10)}$$

62. A partir de:

$$f(x)=5-x \qquad g(x)=\sqrt{x-2} \qquad h(x)=\frac{1}{x+3}$$

construye las siguientes funciones:

a) $(2h-f)\cdot g$ **b)** $f-\left(g^2/h\right)$

c) $g^2+f\cdot h$ **d)** f/g

e) $h\cdot(f\circ g)$ **f)** $(f/h)\circ g$

a)

$$(2h-f)\cdot g=\left[2h(x)-f(x)\right]g(x)=\left[2\cdot\frac{1}{x+3}-(5-x)\right]\cdot\sqrt{x-2}=\frac{2-(x+3)(5-x)}{x+3}\sqrt{x-2}=\frac{\left(x^2-2x-13\right)\sqrt{x-2}}{x+3}$$

b) $$f-\left(g^2/h\right)=f(x)-\frac{\left[g(x)\right]^2}{h(x)}=5-x-\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{\frac{1}{x+3}}=5-x-(x+3)(x-2)=-x^2-2x+11$$

c)

$$g^2+f\cdot h=\left[g(x)\right]^2+f(x)\cdot h(x)=\left(\sqrt{x-2}\right)^2+(5-x)\cdot\frac{1}{x+3}=x-2+\frac{5-x}{x+3}=\frac{(x-2)(x+3)+5-x}{x+3}=\frac{x^2-1}{x+3}$$

d) $$f/g=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{5-x}{\sqrt{x-2}}=\frac{(5-x)\sqrt{x-2}}{x-2}$$

e) $$h\cdot(f\circ g)=h(x)\cdot f\left[g(x)\right]=\frac{1}{x+3}\cdot\left[5-\sqrt{x-2}\right]=\frac{5-\sqrt{x-2}}{x+3}$$

f) $$f/h=\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{5-x}{\frac{1}{x+3}}=(5-x)(x+3)=-x^2+2x+15\Rightarrow$$

$$(f/h)\circ g=-\left[g(x)\right]^2+2\left[g(x)\right]+15=-\left(\sqrt{x-2}\right)^2+2\sqrt{x-2}+15=-(x-2)+2\sqrt{x-2}+15=17-x+2\sqrt{x-2}$$

63. Halla, cuando sea posible, las inversas de estas funciones y comprueba que $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=x$:

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{3}$ **b)** $f(x)=-3x^2+4$

c) $f(x)=\sqrt{1-2x}+3$ **d)** $f(x)=\sqrt[3]{2x-5}$

e) $f(x)=5e^{\frac{x-3}{2}}+4$ **f)** $f(x)=\dfrac{4}{3}\log(5-2x)$

g) $f(x)=-3\,\text{sen}\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right)$ **h)** $f(x)=\dfrac{1}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$

a) $$f(x)=\frac{2x-1}{3}\xrightarrow[2^{\text{o}}\text{ Renombramos } x\leftrightarrow y:\ \ y=\frac{3x+1}{2}]{1^{\text{o}}\text{ Despejamos } x:\ \ y=\frac{2x-1}{3}\Rightarrow x=\frac{3y+1}{2}} f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{2}$$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{3\left(\frac{2x-1}{3}\right)+1}{2}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\frac{2\left(\frac{3x+1}{2}\right)-1}{3}=x$$

b) Si $x\geq 0$, es posible definir la inversa de esta función:

$$\underset{(\text{con } x\geq 0)}{f(x)=-3x^2+4}\xrightarrow[2^{\text{o}}\text{ Renombramos } x\leftrightarrow y:\ \ y=\sqrt{\frac{4-x}{3}}]{1^{\text{o}}\text{ Despejamos } x:\ \ y=-3x^2+4\Rightarrow x=\sqrt{\frac{4-y}{3}}} f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{4-x}{3}}$$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\sqrt{\frac{4-\left(-3x^2+4\right)}{3}}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=-3\left(\sqrt{\frac{4-x}{3}}\right)^2+4=x$$

c) $$f(x)=\sqrt{1-2x}+3\xrightarrow[2^{\text{o}}\text{ Renombramos } x\leftrightarrow y:\ \ y=\frac{1-(x-3)^2}{2}]{1^{\text{o}}\text{ Despejamos } x:\ \ y=\sqrt{1-2x}+3\Rightarrow x=\frac{1-(y-3)^2}{2}} f^{-1}(x)=\frac{1-(x-3)^2}{2}$$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{1-\left[\left(\sqrt{1-2x}+3\right)-3\right]^2}{2}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\sqrt{1-2\left(\frac{1-(x-3)^2}{2}\right)}+3=x$$

d) $$f(x)=\sqrt[3]{2x-5}\xrightarrow[2^{\text{o}}\text{ Renombramos } x\leftrightarrow y:\ \ y=\frac{x^3+5}{2}]{1^{\text{o}}\text{ Despejamos } x:\ \ y=\sqrt[3]{2x-5}\Rightarrow x=\frac{y^3+5}{2}} f^{-1}(x)=\frac{x^3+5}{2}$$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{\left(\sqrt[3]{2x-5}\right)^3+5}{2}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\sqrt[3]{2\left(\frac{x^3+5}{2}\right)-5}=x$$

e) $f(x)=5e^{\frac{x-3}{2}}+4 \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=3+2\log\left(\frac{x-4}{5}\right)]{\text{1º Despejamos } x:\ y=5e^{\frac{x-3}{2}}+4\Rightarrow x=3+2\log\left(\frac{y-4}{5}\right)} f^{-1}(x)=3+2\log\left(\frac{x-4}{5}\right)$

$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=3+2\log\left[\frac{\left(5e^{\frac{x-3}{2}}+4\right)-4}{5}\right]=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=5e^{\frac{\left[3+2\log\left(\frac{x-4}{5}\right)\right]-3}{2}}+4=x$

f) $f(x)=\frac{4}{3}\log(5-2x) \xrightarrow[\text{2º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\frac{5-e^{\frac{3}{4}x}}{2}]{\text{1º Despejamos } x:\ y=\frac{4}{3}\log(5-2x)\Rightarrow x=\frac{5-e^{\frac{3}{4}y}}{2}} f^{-1}(x)=\frac{5-e^{\frac{3}{4}x}}{2}$

$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{5-e^{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\log(5-2x)\right]}}{2}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\frac{4}{3}\log\left[5-2\left(\frac{5-e^{\frac{3}{4}x}}{2}\right)\right]=x$

g) $f(x)=-3\,\text{sen}\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\pi+2\,\text{arcsen}\left(-\frac{x}{3}\right)]{\text{1.º Despejamos } x:\ y=-3\,\text{sen}\left(\frac{x-\pi}{2}\right)\Rightarrow x=\pi+2\,\text{arcsen}\left(-\frac{y}{3}\right)} f^{-1}(x)=\pi+2\,\text{arcsen}\left(-\frac{x}{3}\right)$

$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\pi+2\,\text{arcsen}\left[-\frac{\left(-3\,\text{sen}\left(\frac{x-\pi}{2}\right)\right)}{3}\right]=x$

$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=-3\,\text{sen}\left[\frac{\left(\pi+2\,\text{arcsen}\left(-\frac{x}{3}\right)\right)-\pi}{2}\right]=x$

h) $f(x)=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right) \xrightarrow[\text{2.º Renombramos } x\leftrightarrow y:\ y=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arcos}(4x)\right)]{\text{1.º Despejamos } x:\ y=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\Rightarrow x=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arcos}(4y)\right)} f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arcos}(4x)\right)$

$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{2}-\text{arcos}\left(4\left(\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\right)\right)\right]=x$

$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f(x)=\frac{1}{4}\cos\left[\frac{\pi}{2}-3\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arcos}(4x)\right)\right)\right]=x$

64. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales a partir de la función de proporcionalidad inversa de la cual pueden obtenerse por desplazamientos:

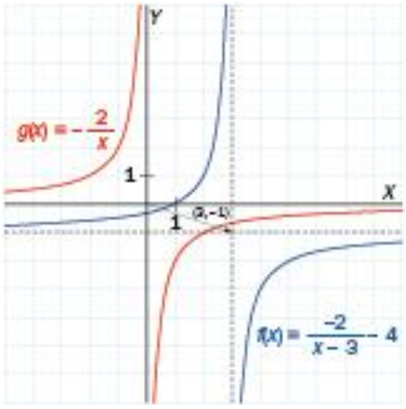
a) $f(x)=\frac{-2}{x-3}-4$ **b)** $f(x)=\frac{3x+4}{x-1}$

c) $f(x)=5+\frac{3}{x+2}$ **d)** $f(x)=\frac{2x+1}{x+3}$

Todas estas funciones son hipérbolas equiláteras cuyos ejes están centrados en un punto distinto del origen:

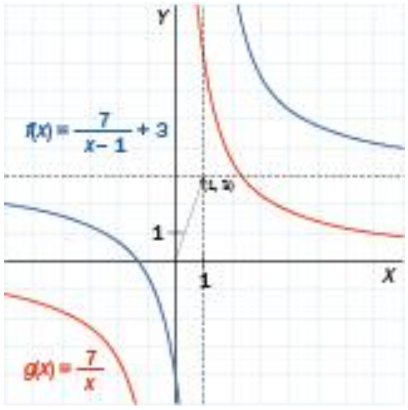
a) Si $g(x) = -\dfrac{2}{x}$, entonces:

$$f(x) = \frac{-2}{x-3} - 4 = g(\overbrace{x-3}^{\substack{\text{tres unidades}\\ \text{hacia la derecha}}})\overbrace{-4}^{\substack{\text{cuatro unidades}\\ \text{hacia abajo}}}$$



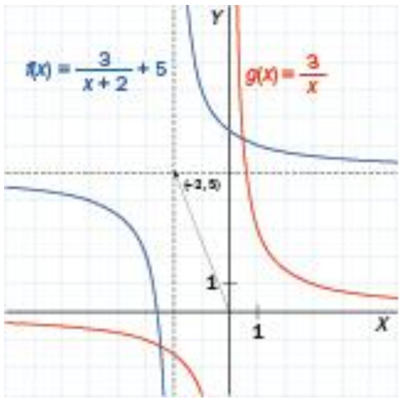
b) Como $f(x) = \dfrac{3x+4}{x-1} = \dfrac{7}{x-1} + 3$, entonces:

$$f(x) = g(\overbrace{x-1}^{\substack{\text{una unidad}\\ \text{hacia la derecha}}})\overbrace{+3}^{\substack{\text{tres unidades}\\ \text{hacia arriba}}} \quad \text{con } g(x) = \frac{7}{x}$$



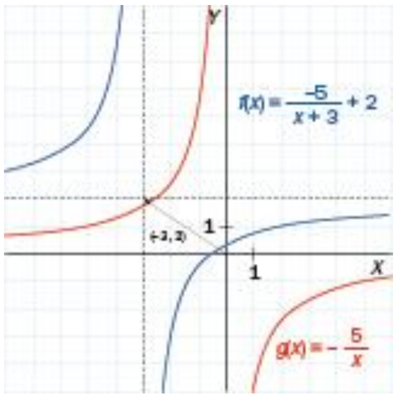
c) Si $g(x) = \dfrac{3}{x}$, entonces:

$$f(x) = \frac{3}{x+2} + 5 = g(\overbrace{x+2}^{\substack{\text{dos unidades}\\ \text{hacia la izquierda}}})\overbrace{+5}^{\substack{\text{cinco unidades}\\ \text{hacia arriba}}}$$



d) Como $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{-5}{x+3} + 2$, entonces:

$$f(x) = g(\overbrace{x+3}^{\substack{\text{tres unidades}\\ \text{hacia la izquierda}}})\overbrace{+2}^{\substack{\text{dos unidades}\\ \text{hacia arriba}}} \quad \text{con } g(x) = -\frac{5}{x}$$



65. Mediante transformaciones, representa las funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 1$ a partir de $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$ a partir de $g(x) = \sqrt{x}$

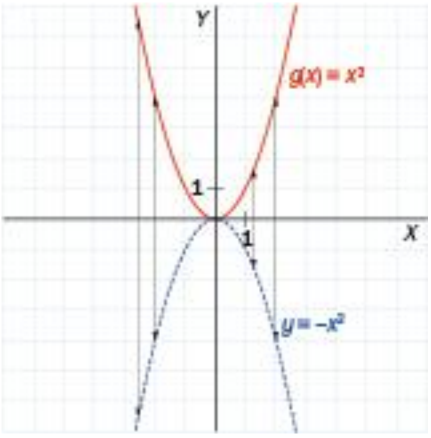
c) $f(x) = e^{-x} - 1$ a partir de $g(x) = e^x$

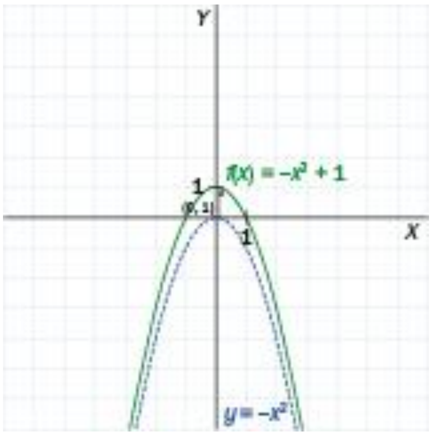
d) $f(x) = \frac{1}{2}\log(x-1)$ a partir de $g(x) = \log x$

e) $f(x) = 2\cos(x+\pi)$ a partir de $g(x) = \cos x$

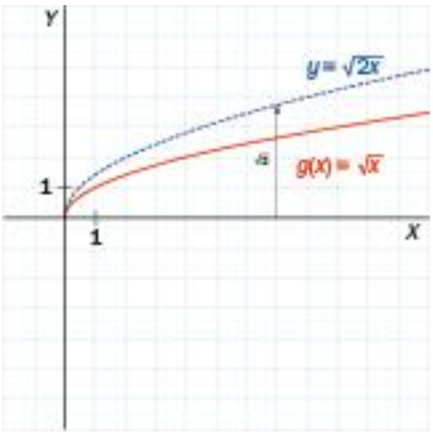
a)

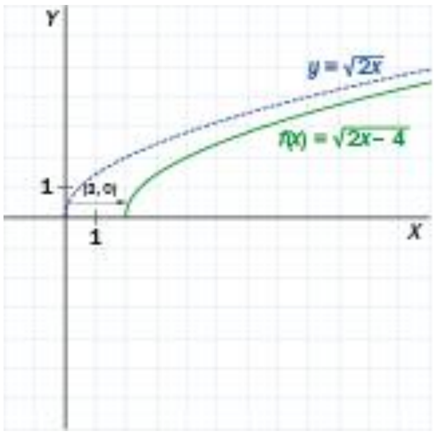
$$\overbrace{x^2}^{g(x)} \xrightarrow[\text{respecto al eje } OX]{\text{simetría con}} -x^2 \xrightarrow[\text{una unidad hacia arriba}]{\text{traslación vertical de}} \overbrace{-x^2+1}^{f(x)=-g(x)+1}$$



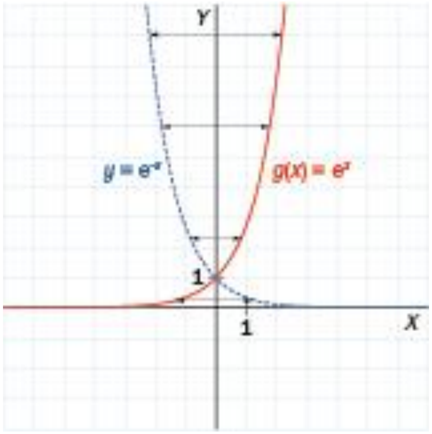


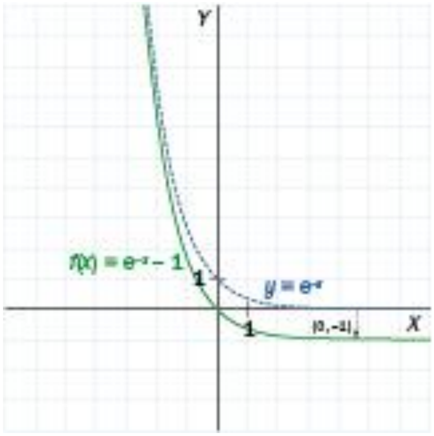
b) $$\overbrace{\sqrt{x}}^{g(x)} \xrightarrow[\text{en un factor dos}]{\text{contracción horizontal}} \sqrt{2x} \xrightarrow[\text{dos unidades hacia la derecha}]{\text{traslación horizontal de}} \overbrace{\sqrt{2(x-2)}}^{f(x)=g[2(x-2)]} = \sqrt{2x-4}$$



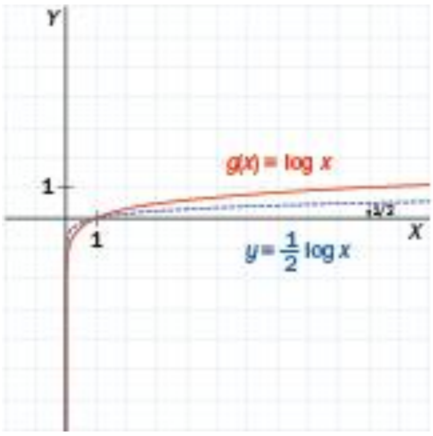


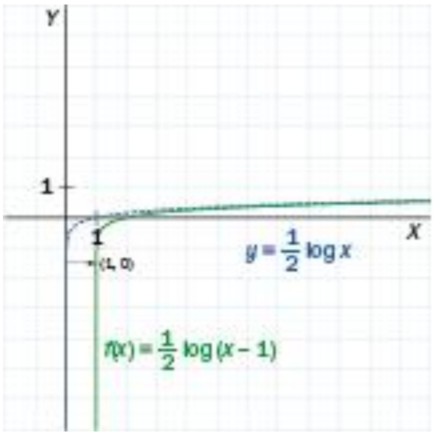
c) $\overbrace{e^{x}}^{g(x)} \xrightarrow[\text{respecto al eje } OY]{\text{simetría con}} e^{-x} \xrightarrow[\text{una unidad hacia abajo}]{\text{traslación vertical de}} \overbrace{e^{-x}-1}^{f(x)=g(-x)-1}$



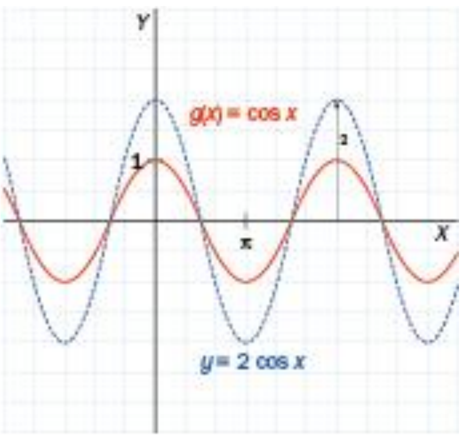


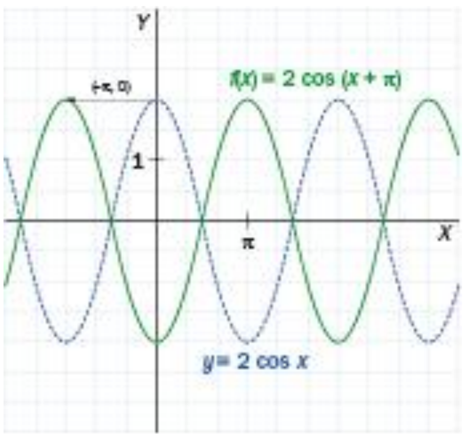
d) $\overbrace{\log x}^{g(x)} \xrightarrow[\text{en un factor dos}]{\text{contracción vertical}} \frac{1}{2}\log x \xrightarrow[\text{una unidad hacia la derecha}]{\text{traslación horizontal de}} \overbrace{\frac{1}{2}\log(x-1)}^{f(x)=\frac{1}{2}g(x-1)}$





e) $\overbrace{\cos x}^{g(x)} \xrightarrow[\text{en un factor dos}]{\text{dilatación vertical}} 2\cos x \xrightarrow[\pi \text{ unidades hacia la izquierda}]{\text{traslación horizontal de}} \overbrace{2\cos(x+\pi)}^{f(x)=2g(x+\pi)}$





Aplicaciones

66. Oferta y demanda de un producto. Un modelo de mercado determina que la cantidad, en miles de unidades, ofertada, O, y demandada, D, de cierto producto dependen del precio de venta, p, en euros, según:

$$O(p) = 3p + 100 \qquad D(p) = 200 - 2p$$

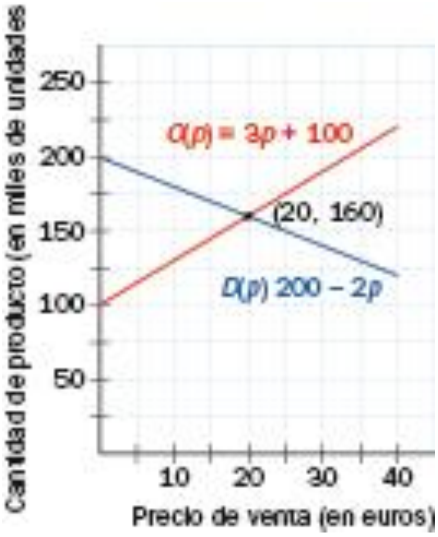
a) Representa estas funciones y halla el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda; es decir, el precio de venta para el cual ambas cantidades se igualan.

b) Estudia si habrá escasez o exceso de producto para un precio de venta de 15 euros. ¿Y para 25 euros?

a) En primer lugar, hemos de advertir que, dado el contexto del problema, tanto las cantidades ofertada y demandada como el precio de venta toman valores positivos, así que realizaremos la representación gráfica de estas funciones teniendo esto en cuenta.

La función oferta, $O(p) = 3p + 100$, es una función afín, ya que no pasa por el origen de coordenadas. Se trata de una función creciente, pues su pendiente, m = 3, es positiva; ello significa, en este caso, que la cantidad ofertada, O, aumenta en tres mil unidades por cada euro que se incrementa el precio de venta. Tiene como ordenada en el origen n = 100, es decir, corta al eje OY en el punto (0, 100), y pasa, por ejemplo, por el punto (50, 250).

La función demanda, $D(p) = 200 - 2p$, es, asimismo, otra función afín, aunque ahora decreciente, ya que su pendiente, m = -2, es negativa: la cantidad demandada, D, disminuye ahora en dos mil unidades por cada euro que aumenta el precio de venta. Tiene como ordenada en el origen n = 200, o sea, corta al eje OY en el punto (0, 200), y su punto de corte con el eje OX es (100, 0).



El punto de equilibrio entre la oferta y la demanda se obtiene al igualar ambas cantidades:

$$O(p) = D(p) \Rightarrow 3p + 100 = 200 - 2p \Rightarrow p = 20$$

Es decir, que para un precio de venta de 20 euros, la oferta y la demanda están equilibradas, ascendiendo estas a 160 000 unidades.

b) Como puedes ver en la gráfica, el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda, (20, 160), es el único punto en que ambas funciones se intersectan e igualan. Por lo tanto, para cualquier otro precio la cantidad ofertada y demandada diferirán entre sí, dándose escasez (si la demanda supera a la oferta) o exceso (si la oferta supera a la demanda) de producto. En concreto, para un precio de venta de 15 euros, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} O(15) = 145 \text{ mil unidades} \\ D(15) = 170 \text{ mil unidades} \end{array}\right\} \Rightarrow D(15) > O(15)$$

por lo cual hay una escasez de producto, al demandarse más cantidad de la que se oferta; mientras que para un precio de venta de 25 euros, ocurre que:

$$\left.\begin{array}{l} O(25) = 175 \text{ mil unidades} \\ D(25) = 150 \text{ mil unidades} \end{array}\right\} \Rightarrow O(25) > D(25)$$

dándose ahora un exceso de producto, pues se oferta más cantidad de producto de la que se demanda.

67. Beneficio por ventas de un producto. El beneficio, B, en euros, obtenido por cierta empresa a través de la venta de uno de sus productos es:

$$B(q) = -20q^2 + 10\,000q - 800\,000$$

donde q es la cantidad vendida, en miles de unidades.

a) Representa B(q) para una venta comprendida entre 0 y 500 mil unidades. ¿En qué intervalo de venta la empresa tiene pérdidas?

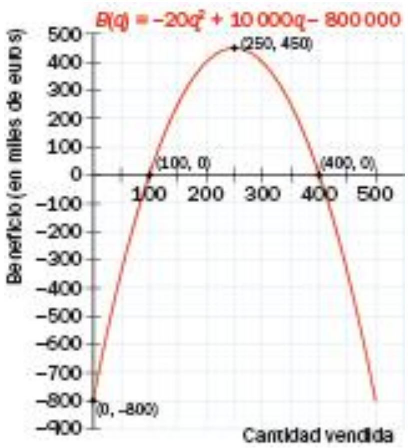
b) Halla la cantidad para la que se obtiene máximo beneficio y a cuánto asciende; determina, asimismo, los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) La función B(q) es una parábola abierta hacia abajo. Corta al eje OY en el punto (0, -800 000), por lo que si no se vende nada la empresa acusará unas pérdidas de 800 000 euros. Sus puntos de corte con el eje OX son tales que en ellos el beneficio es nulo:

$$B(q) = -20q^2 + 10\,000q - 800\,000 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 100 \text{ mil unidades} \Rightarrow (100, 0) \\ q_1 = 400 \text{ mil unidades} \Rightarrow (400, 0) \end{cases}$$

Finalmente, su vértice se halla en:

$$q_V = -\frac{b}{2a} = 250 \text{ mil unidades} \Rightarrow (250, 450\,000)$$



Con esta información podemos representar la función beneficio, B(q), para una venta comprendida entre 0 y 500 mil unidades:

Como puede apreciarse en la gráfica, los beneficios son negativos entre 0 y 100 mil unidades, así como entre 400 mil y 500 mil unidades, por lo que para dichos intervalos de venta la empresa sufrirá pérdidas.

b) Dado que la función beneficio es una parábola abierta hacia abajo, su vértice representa el máximo absoluto de la misma; por tanto, el máximo beneficio se obtiene para una venta de 250 mil unidades, y este asciende a 450 000 euros. Asimismo, el beneficio crece para una venta comprendida entre 0 y 250 mil unidades, y decrece entre 250 mil y 500 mil unidades.

68. Evolución de la población de una especie. Para la recuperación una especie en peligro de extinción, se introducen en una reserva natural cinco parejas de la misma. Estudios previos indican que su población, P, evolucionará con el tiempo, t, medido en años, según la función:

$$P(t)=\frac{400t^2}{2t^2+100}+10$$

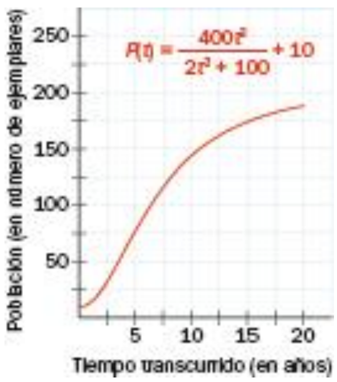
a) Representa gráficamente la evolución de la población durante los primeros veinte años.

b) ¿Cuánto tiempo será necesario para que la especie alcance, al menos, 100 ejemplares?

a) Antes que nada, notemos que, por el contexto del problema, tanto el tiempo transcurrido como el número de ejemplares son cantidades positivas, así que tendremos esto en cuenta al realizar la representación gráfica de la población.

La función P(t) es una función racional cuya ordenada en el origen es P(t = 0) = 10 individuos; esto es, el número inicial de ejemplares asciende a diez, como ya sabíamos, ya que para la recuperación de la especie se han introducido al comienzo cinco parejas de la misma. Carece de puntos de corte con el eje OX, ya que $P(t)\neq 0$ para cualquier valor de tiempo transcurrido, lo cual nos asegura que la población de dicha especia no desaparecerá. Además, a medida que el pasa el tiempo la función P(t) aumenta a partir de su valor inicial, P(0) = 10, pues a dicho valor la función añade la contribución, siempre positiva, $\frac{400t^2}{2t^2+100}$. A partir de estas consideraciones y de una pequeña tabla de valores podemos representar de manera aproximada la evolución de la población durante los primeros veinte años:

Tiempo transcurrido, *t* (en años)	0	5	10	15	20
Población, *P* (en número de ejemplares)	10	77	143	174	188



b) Para que la población alcance 100 ejemplares, ha de transcurrir un tiempo tal que:

$$P(t)=\frac{400t^2}{2t^2+100}+10=100$$

de donde obtenemos que:

$$220t^2-9000=0 \Rightarrow t \simeq 6,4 \text{ años}$$

Así pues, en algo menos de seis años y medio la población de la especie alcanzará los 100 ejemplares.

Un mundo matemático

1. Observa las gráficas y contesta a las siguientes cuestiones:

a) Define a qué corresponde el valor de x para una determinada altura h.

El diseño de Torre Espacio evoluciona a partir de una planta cuadrada, en su base, hacia otra formada por la intersección de dos cuartos de círculo, en su corona. Para ello, fue necesario adoptar un orden geométrico que pudiera facilitar la evolución deseada desde un cuadrado a un cuarto de círculo. El valor de x en la figura, que como está señalado vale

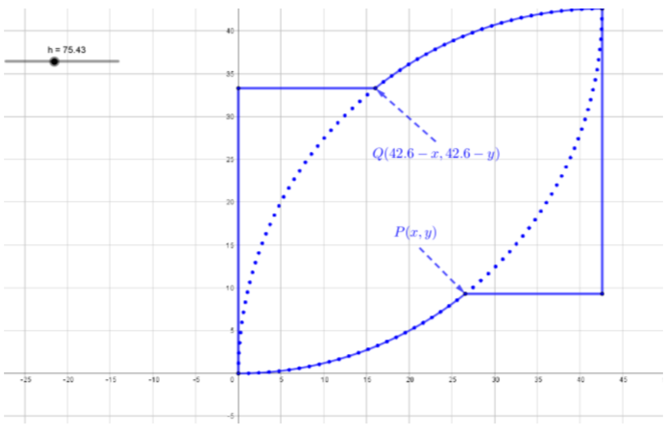
$$x = 42{,}6 \cdot sen\left(\frac{h}{176} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

Indica, en función de la altura de cada planta, y respecto de unos ejes de coordenadas que tienen su origen en un vértice del cuadrado de cada planta y los ejes paralelos a los lados del cuadrado, la abscisa del punto donde debe terminar el arco de circunferencia de cada planta en la fachada sur-este. Dicha abscisa varía desde 0, en la planta 0 hasta 42,6 m, en la última planta, donde toda la fachada es un cuarto de circunferencia. En las gráficas que se adjuntan se han tenido en cuenta 57 puntos, los correspondientes a las 57 plantas del edificio. La altura para cada planta se ha calculado dividiendo 176 m, que es la altura total, entre 56 y multiplicando por el número de planta. Como se puede apreciar, el arco correspondiente a un cuadrante se ha dividido igualmente en 56 partes, asignando un valor del arco a cada planta del edificio. El aspecto que presenta la curva obtenida por los puntos de intersección de los arcos con los lados del cuadrado en cada planta a lo largo de toda la altura del edificio es el de una función trigonométrica.

b) Define a qué corresponde el valor de y para una determinada altura, h.

Con respecto a y, representa la ordenada del punto donde debe terminar el arco de circunferencia de cada planta en la fachada sur-este. Igual que x, y varía desde 0, en la planta baja, que por tanto es un cuadrado, hasta 42,6 m, en la última planta del edificio. En la fachada norte-oeste, las coordenadas del punto donde termina cada arco en la planta correspondiente son $(42{,}6 - x, 42{,}6 - y)$.

En la figura está representada la sección de la planta 24. En la fachada sur ya más de la mitad es un arco de circunferencia, igual que en la fachada norte. Las fachadas este y oeste tienen todavía más de la mitad de su longitud lados rectilíneos.

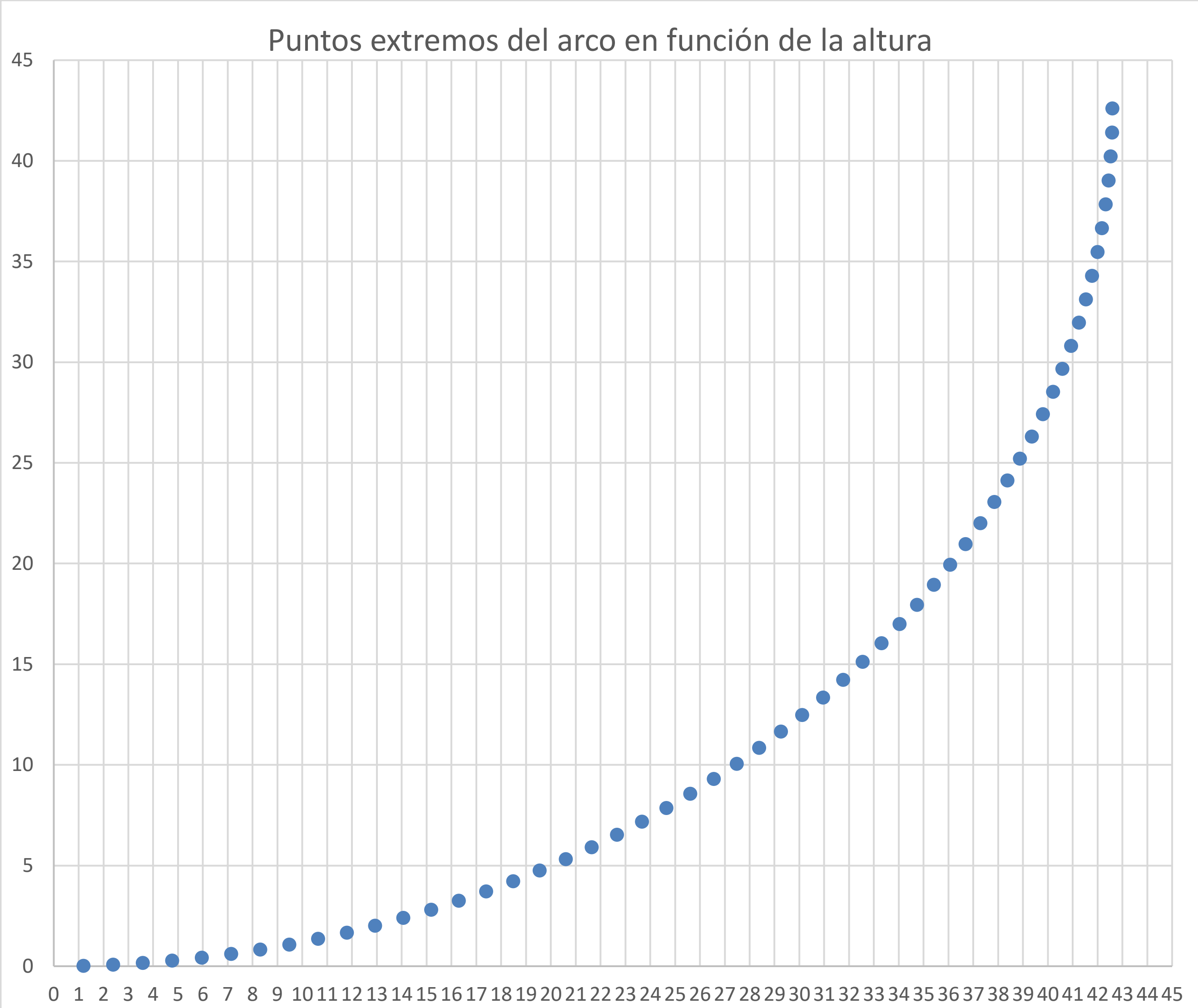


2. Haz una tabla en Excel o en la hoja de cálculo de Geogebra, que permita obtener los valores de x e y en función de la altura de cada piso, suponiendo que de piso a piso hay una diferencia de altura constante y que la torre tiene 56 plantas y una altura total de 176 m. Representa gráficamente los puntos obtenidos.

A continuación, se copia la tabla de Excel con el gráfico correspondiente:

Planta	Altura	Valor de x	Valor de y
0	0	0	0
1	3,142857143	1,194770517	0,016757716
2	6,285714286	2,388601052	0,06701768
3	9,428571429	3,580552362	0,150740351
4	12,57142857	4,769686682	0,267859859
5	15,71428571	5,955068464	0,418284061
6	18,85714286	7,135765113	0,601894611
7	22	8,310847718	0,818547055
8	25,14285714	9,479391787	1,068070941
9	28,28571429	10,64047797	1,350269958
10	31,42857143	11,79319279	1,664922085
11	34,57142857	12,93662934	2,011779772
12	37,71428571	14,06988804	2,390570129
13	40,85714286	15,19207729	2,800995143
14	44	16,30231422	3,242731915
15	47,14285714	17,39972535	3,715432908
16	50,28571429	18,48344729	4,218726227
17	53,42857143	19,55262743	4,752215907
18	56,57142857	20,60642459	5,315482227
19	59,71428571	21,64400971	5,908082037
20	62,85714286	22,66456646	6,529549113
21	66	23,66729193	7,179394516
22	69,14285714	24,65139722	7,857106982
23	72,28571429	25,61610809	8,562153324
24	75,42857143	26,56066556	9,293978847
25	78,57142857	27,4843265	10,05200779
26	81,71428571	28,38636422	10,83564378
27	84,85714286	29,26606905	11,64427028
28	88	30,12274888	12,47725112
29	91,14285714	30,95572972	13,33393095
30	94,28571429	31,76435622	14,21363578
31	97,42857143	32,54799221	15,1156735
32	100,5714286	33,30602115	16,03933444
33	103,7142857	34,03784668	16,98389191
34	106,8571429	34,74289302	17,94860278
35	110	35,42060548	18,93270807

36	113,1428571	36,07045089	19,93543354
37	116,2857143	36,69191796	20,95599029
38	119,4285714	37,28451777	21,99357541
39	122,5714286	37,84778409	23,04737257
40	125,7142857	38,38127377	24,11655271
41	128,8571429	38,88456709	25,20027465
42	132	39,35726808	26,29768578
43	135,1428571	39,79900486	27,40792271
44	138,2857143	40,20942987	28,53011196
45	141,4285714	40,58822023	29,66337066
46	144,5714286	40,93507791	30,80680721
47	147,7142857	41,24973004	31,95952203
48	150,8571429	41,53192906	33,12060821
49	154	41,78145295	34,28915228
50	157,1428571	41,99810539	35,46423489
51	160,2857143	42,18171594	36,64493154
52	163,4285714	42,33214014	37,83031332
53	166,5714286	42,44925965	39,01944764
54	169,7142857	42,53298232	40,21139895
55	172,8571429	42,58324228	41,40522948
56	176	42,6	42,6


Puntos extremos del arco en función de la altura
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45

