2 Determinantes

1. Los determinantes

1. Halla el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ ***c)*** $\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ ***d)*** $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-(-1)\cdot 3 = 13$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6\cdot 3-4\cdot 5 = -2$

c) $\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-2)-(-6)\cdot 3 = 26$

d) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 0-2\cdot 9 = -18$

2. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ ***c)*** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1+2\cdot 5\cdot(-4)+3\cdot 2\cdot 3-3\cdot 2(-4)-2\cdot 2\cdot 1-1\cdot 5\cdot 3 =$
$= 2-40+18+24-4-15 = -15$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 12+24+30+20+8-54 = 40$

c) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 36+6+8-30 = 20$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$ ***b)*** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ***c)*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & x \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} x & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & x & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x-4-x^2 = 0 \Rightarrow x^2-4x+4 = 0 \Rightarrow x = 2$ (doble).

b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (doble).

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & x \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9 + x - 2x + 3 - x^2 - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3$ y $x = 2$.

4. **¿Qué relación ha de existir entre *a* y *b* para que se cumpla: $\begin{vmatrix} b & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$?**

$$\begin{vmatrix} b & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 3 + b \Rightarrow 2a + b = 3$$

5. **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula el valor de *a* para que el valor del determinante de A^2 sea 4.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A^2| = a^2$

Si $|A^2| = 4$, entonces $a^2 = 4$ y $a = \pm 2$

6. **Dadas las matrices:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$,

calcula los valores de *a* y *b* para que $|MA| = 3$ y $|M + B| = 3$.

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ a+2b & 2a+5b \end{pmatrix}$$

$$M + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a+1 & b+1 \end{pmatrix}$$

$|MA| = 6a + 15b - 7a - 14b = -a + b$

$|M + B| = 2b + 2 - a - 1 = -a + 2b + 1$

Por tanto,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } |MA| = 3, \text{ entonces} & a - b = -3 \\ \text{Si } |M + B| = 3, \text{ entonces} & -a + 2b = 2 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene por solución: *a* = -4 y *b* = -1.

2. Propiedades de los determinantes

7. **Sean *A* y *B* dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = 5$ y $|B| = -2$. Calcula:**

a) $|AB|$ ***b)*** $|3A|$ ***c)*** $|AB^t|$ ***d)*** $|B^3|$ ***e)*** $|(2A)B|$ ***f)*** $|-2A^t|$

a) $|AB| = |A| \cdot |B| = 5 \cdot (-2) = -10$

b) $|3A| = 3^3 \cdot |A| = 27 \cdot 5 = 135$

A es una matriz de orden 3.

c) $|AB^t| = |A|.|B^t| = |A|.|B| = 5 \cdot (-2) = -10$

$|B^t| = |B|$

d) $|B^3| = |B| \cdot |B| \cdot |B| = (|B|)^3 = (-2)^3 = -8$

e) $|(2A)B| = |2A| \cdot |B| = 2^3 \cdot |A| \cdot |B| = 8 \cdot 5 \cdot (-2) = -80$

f) $|-2A^t| = (-2)^3 \cdot |A^t| = (-2)^3 \cdot |A| = -8 \cdot 5 = -40$

8. **Si** $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$**, halla el valor de:** $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **y** $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 0 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 0 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

Propiedad 8

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 0 = 3$$

Propiedad 8 $F_3 = 2F_2 - F_1$

9. **Si** $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 3$**, halla: *a)*** $\begin{vmatrix} a & 2d+a & 3g \\ b & 2e+b & 3h \\ c & 2f+c & 3i \end{vmatrix}$ **y *b)*** $\begin{vmatrix} a+b & b & 2c \\ d+e & e & 2f \\ g+h & h & 2i \end{vmatrix}$.

a) $$\begin{vmatrix} a & 2d+a & 3g \\ b & 2e+b & 3h \\ c & 2f+c & 3i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2d & 3g \\ b & 2e & 3h \\ c & 2f & 3i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & 3g \\ b & b & 3h \\ c & c & 3i \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 0 = 18$$

Propiedad 12 Propiedad 8 y propiedad 3 ($c_1 = c_2$)

b) $\begin{vmatrix} a+b & b & 2c \\ d+e & e & 2f \\ g+h & h & 2i \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 12}}{=} \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & 2c \\ e & e & 2f \\ h & h & 2i \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 8 y Propiedad 3 } (c_1 = c_2)}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 \underset{\text{Propiedad 5}}{=} 2 \cdot 3 = 6$

10. Si $a = -2$, calcula el valor de: $\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 12}}{=} \begin{vmatrix} a & a & a-c \\ 2a & 3a & 4a-2c \\ 3a & 6a & 10a-3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & a-c \\ 2a & 2b & 4a-2c \\ 3a & 3b & 10a-3c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 12}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a \\ 2a & 3a & 4a \\ 3a & 6a & 10a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & -c \\ 2a & 3a & -26 \\ 3a & 6a & -3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & a \\ 2a & 2b & 4a \\ 3a & 3b & 10a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -c \\ 2a & 2b & -2c \\ 3a & 3b & -3c \end{vmatrix} =$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} - a^2c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} - a^2b \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} - abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedades 3 y 9}}{=}$$

$$= (-2)^3 \cdot 1 - 0 + 0 - 0 = -8$$

3. Desarrollo de un determinante por sus adjuntos

11. Calcula la matriz adjunta de estas matrices:

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ *b)* $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ *c)* $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $A_{11} = 5,\quad A_{12} = -3,\quad A_{21} = -(-1) = 1$
  $A_{22} = 2$

  Por tanto,

  $\text{Adj}\,(M) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $N=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & -3\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $A_{11}=\begin{vmatrix}4 & -3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=20-3=17$

$A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-6,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-8$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-(-5+3)=2,\quad A_{2}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=10-6=4$

$A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}=3-12=-9$

$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-(-6)=6;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix}=8$

Luego,

$$\text{Adj}(N)=\begin{pmatrix}17 & -6 & -8\\ 2 & 4 & 0\\ -9 & -4 & 8\end{pmatrix}$$

- $P=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4$

$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-(6-1)=-5$

$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=2$

$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=+,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-(4+2)=-6$

$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-6$

Por tanto,

$$\text{Adj}(P)=\begin{pmatrix}2 & -4 & -2\\ -5 & 4 & 2\\ 6 & -6 & -6\end{pmatrix}$$

12. Evalúa estos determinantes desarrollando por adjuntos:

a) $\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 5\end{vmatrix}$ ***c)*** $\begin{vmatrix}0 & 2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 3 & 4\\ 3 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

a) Desarrollaremos por la segunda fila que tiene dos ceros. Así:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=8-2=6$$

b) Desarrollaremos por la primera columna que tiene dos ceros. Así:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(10+1) = -11$$

c) Tanto la tercera columna como la cuarta fila tienen el mismo número de ceros. Elegimos, por ejemplo, la cuarta fila para desarrollar el determinante. Así:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{44} = 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(15 - 9 - 18 + 4) + (10 + 4 - 12) = 24 + 2 = 26$$

4. Cálculo de determinantes de orden *n*

13. Halla, «haciendo ceros», el valor de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d-1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$

a) Podemos anular el elemento a_{22} y, posteriormente, desarrollar por la segunda columna. Así:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_2' = F_2 + F_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{12} = (-1)(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 94$$

b)

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d-1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - F_1 \\ F_4' = F_4 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} a & b-1 & c & d-1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Desarrollamos por la 3ª fila}}{=}$$

$$= 2 \cdot A_{32} = 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} a & c & d-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(a+c)$$

14. **Calcula mediante la reducción por filas a la forma triangular:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ +1 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 13 & 3 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$f_1 \leftrightarrow f_4$

$f'_2 = f_2 - 2f_4$
$f'_2 = f_2 - 2f_1$
$f'_3 = f_3 - 4f_1$
$f'_4 = f_4 - 3f_1$

$f'_3 = f_3 - 7f_2$
$f'_4 = f_4 - 5f_2$

$f'_4 = 6f_4 - 4f_3$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0$$

b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$f_1 \leftrightarrow f_4$

$f'_2 = f_2 + 2f_1$
$f'_3 = f_3 - 2f_1$
$f'_4 = f_4 - 3f_1$

$f'_3 = 5f_3 + 4f_2$

$f_3 \leftrightarrow f_4$

$$= \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 25 = 5$$

$f'_4 = f_4 - 14f_3$

5. Rango de una matriz

15. Halla el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -2 & 1\\ -1 & 5 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 0 & 5 & -3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 2\\ -1 & 2 & -4 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

- Como A es una matriz cuadrada calcularemos su determinante:

  $|A| = 6+2-3 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=3$

- $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -2 & 1\\ -1 & 5 & 1 & 4\end{pmatrix}$

  B es una matriz de orden 3×4 y su rango será menor o igual que 3.
  Comenzamos con un menor de orden uno, por ejemplo,
  $b_{11}=1$. Así, $|1|\neq 0$ y $\text{rg}(B)\geq 1$.
  Incorporando el elemento b_{11} ampliamos a un menor de orden dos no nulo. Por ejemplo:

  $$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -1-2=-3\neq 0 \text{ y } \text{rg}(B)\geq 2$$

  De forma análoga, ampliamos a un menor de orden tres no nulo (si existe) que contenga al menor de orden dos anterior.

  $$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 5 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 5 & 4\end{vmatrix}=0$$

  Como los dos posibles menores de orden tres son nulos, entonces rg(*B*) = 2.

- $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 0 & 5 & -3\end{pmatrix}$

  C es una matriz de orden $4x3$ y su rango será menor o igual que 3.
  Consideremos, por ejemplo, un elemento no nulo como C_{11} = 1. A continuación, incorporando a dicho elemento, ampliamos a un menor de orden dos no nulo. Por ejemplo:

  $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 1-6=-5\neq 0$ y, por tanto, $\text{rg}(C)\geq 2$.

  Ahora, ampliamos a un menor de orden tres no nulo (si existe) que contenga al menor de ordena dos utilizado anteriormente. Así:

  $$\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -3\end{vmatrix}=0$$

  Como los dos posibles menores de orden tres son nulos, entonces $\text{rg}(C)=2$.

- La matriz D es cuadrada de orden 4 y, por tanto, calcularemos su determinante "haciendo ceros".

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 + F_1 \\ F_3' = F_3 - 2F_1 \\ F_4' = F_4 - 2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

Conclusión: $R(D)=4$

16. Estudia, según los valores de *a*, el rango de:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Busquemos el mayor menor no nulo en el que no intervenga el parámetro a.
Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Incorporando este menor e orden dos calculemos los dos menores de orden tres. Así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a - 12$$

$a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow a = 2$ y $a = -6$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2a + 2a = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Por tanto, si $a \neq 2$ y $a \neq -6$, entonces rg(M) = 3.
Pero, si a = 2 o a = -6, entonces rg(M) =2.

6. Matriz inversa

17. ¿Para qué valores de *a* no es invertible $M = \begin{pmatrix} a-1 & 4 \\ 2 & a+1 \end{pmatrix}$?

La matriz M es invertible si $|M| \neq 0$. Es decir:

$|M| = (a-1)(a+1) - 8 = a^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm 3$

Por tanto, M no es invertible si a = -3 o a = 3.

18. Halla los valores de *k* para los que $A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k & k & 0 \\ 2 & k^2 & k \end{pmatrix}$ **es invertible.**

La matriz A es invertible si $|A| \neq 0$.

$|A| = k^3 + k^4 - 2k^2 = k^2(k^2+k-2) = 0 \Rightarrow k=0$, $k=-2$ y $k=1$

A es invertible si $k \neq -2, 0, 1$.

19. Demuestra que, si una matriz *A* es ortogonal, entonces $|A| = \pm 1$ **.**

Una matriz *A* es ortogonal si su inversa A^{-1} coincide con su traspuesta A^t. Es decir:

$A^{-1} = A^t$

Ahora bien, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ y $|A^t| = |A|$.

Luego,

$$\frac{1}{|A|} = |A| \Rightarrow (|A|)^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

20. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) **La matriz inversa de *A*.**

b) **La matriz *X* que verifica *AX* = *B*.**

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $|A| = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(\mathrm{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Por tanto,

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

Luego,

$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$

21. Halla los valores de *k* para los cuales $M=\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **posee inversa. Calcula** M^{-1} **para *k* = 0.**

La matriz *M* posee inversa si $|M| \neq 0$.

$|M| = -1 + k(k-2) - 4(k-1) - 2(k-2) + 2 + k(k-1) = 2k^2 - 9k + 9$

$|M| = 0 \Rightarrow 2k^2 - 9k + 9 = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ y } k = 3/2$

Por tanto, M tiene inversa si $k \neq 3$ y $k \neq 3/2$

Por otro lado, para $k = 0$ entonces:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculemos sus adjuntos:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4$

$M_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad M_{25} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

La matriz adjunta es: $\mathrm{Adj}(M) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \left(\mathrm{adj}(M)\right)^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Halla, si existe, la inversa de la matriz diagonal: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$|D| = -8 \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$

$A_{11} = -4, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = 8$

$A_{23} = 0, \quad A_{31} = 0, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = -2$

$\mathrm{adj}(D) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \left(\mathrm{adj}(D)\right)^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$D^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

23. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$.

a) **Determina el rango de *A* según los diferentes valores de *k*.**

b) **Para *k* = 1, calcula, si existe, la inversa de la matriz *A*.**

a) La matriz A es cuadrada de orden tres. Calculemos el valor de su determinante.

$$|A| = k(k+2)^2 - k(k+2) = k(k+2)(k+1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k(k+2)(k+1) = 0 \Rightarrow k = 0,\ k = -2,\ k = -1$$

- Si $k \neq 0,\ k \neq 2$ y $k \neq 1$, entonces rg(A) = 3.
- Si k = 0, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

  Luego, rg(A) = 2.
- Si k = -2, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y, por ejemplo, $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

  Luego, rg(A) = 2.
- Si k = -1, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y, por ejemplo, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

  Luego, rg(A) = 2.

En resumen:

Si $k \neq 0, -2, -1$, entonces rg(A) =3.

Si k = 0 o k = - 2 o k = -1, entonces rg(A) = 2.

b) Para k = 1,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$|A| = 6 \neq 0$ y, por tanto, $\exists A^{-1}$.

Calculemos los adjuntos de A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9,\quad A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3,\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

La matriz adjunta es:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\mathrm{adj}(A)\right)^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Actividades

Introducción a los determinantes

24. Calcula los determinantes de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2-(-1)\cdot 3 = 4+3 = 7$
- $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 4 = 0$
- $|C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = 0\cdot 1\cdot +1\cdot 3\cdot 2+0\cdot 2\cdot 4-0\cdot 1\cdot 2-3\cdot 4\cdot 0-1\cdot 2\cdot 1 = \\ = 0+6+0-0-0-2 = 4 \end{array}$
- $|D| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = (-1)\cdot 1\cdot(-1)+3\cdot 1\cdot 2+2\cdot 0\cdot 1-2\cdot 1\cdot 2-1\cdot 1\cdot(-1)-(-1)\cdot 3\cdot 0 = \\ = 1+6+0-4+1-0 = 4 \end{array}$

25. Resuelve las ecuaciones: $\begin{vmatrix} 2x-3 & x \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ **y** $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$**.**

- $\begin{vmatrix} 2x-3 & x \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x-6-x^2+x = 0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ y $x=3$
- $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2-4x-4=0 \Rightarrow x = \dfrac{4\pm\sqrt{32}}{2} = \dfrac{4\pm 4\sqrt{2}}{2} = 2\pm 2\sqrt{2}$

26. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**, resuelve las siguientes ecuaciones: *a)*** $|A-xI| = 0$ **y *b)*** $|B-xI| = 0$ **.**

a) $|A-xI| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x)-8 =$

$= x^2-4x-5=0 \Rightarrow x=-1,\ x=5$

b) $|B-xI| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^2(1-x)+1+x-(1-x) =$

$= -x^3 + x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2-x-2) = 0 \Rightarrow x=-1,\ x=0,\ x=2$

27. **Sea la matriz** $A = \begin{pmatrix} 9e^x & e^x \\ e^x & e^{3x} \end{pmatrix}$.

a) **Halla el determinante de** ***A.***

b) **Encuentra el valor de** ***x*** **para el cual** $|A| = 0$ **.**

a) $|A| = \begin{vmatrix} 9e^x & e^x \\ e^x & e^{3x} \end{vmatrix} = 9e^x \cdot e^{3x} - e^x \cdot e^x = 9e^{4x} - e^{2x}$

b) $|A| = 0 \Rightarrow 9e^{4x} - e^{2x} = e^{2x}(9e^{2x}-1) = 0$

Como $e^{2x} \neq 0,\ \forall x$. Entonces:

$9e^{2x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{9} \Rightarrow 2x = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \Rightarrow 2x = \ln 1 - \ln 9 \Rightarrow 2x = -\ln 9 \Rightarrow 2x = -\ln 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = -2\ln 3 \Rightarrow x = -\ln 3$

28. **Halla todas las matrices cuadradas** ***M*** **de orden 2 que verifican** $|M+I| = |M| + |I|$ **.**

Entonces

- $|M+I| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = (a+1)(d+1) - bc = ad + d + a + 1 - bc$
- $|M| + |I| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = ad - bc + 1$

Si $|M+I| = |M| + |I| \Rightarrow ad + d + a + 1 - bc = ad - bc + 1 \Rightarrow d + a = 0 \Rightarrow d = -a$

Por tanto, las matrices que verifican la condición del enunciado son de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

29. **Encuentra una matriz** ***X*** **de orden 2 tal que** $X^2 = I$ **y** $|X| = 1$ **.**

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

- Si $x^2 = i \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc+d^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} b = 0 \\ a+d = 0 \\ c = 0 \\ a+d = 0 \end{matrix}$

- Si $|X| = 1 \Rightarrow ad - bc = 1$

Entonces:

- Si $b = 0$ y $c = 0$, entonces $a = -1$ y $d = -1$ o $a = 1$ y $d = 1$.

  Luego, $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

- Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces $a = -1$ y $d = -1$ o $a = 1$ y $d = 1$.

  Luego, $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$.

- Si $c = 0$ y $b \neq 0$, entonces $a = -1$ y $d = -1$ o $a = 1$ y $d = 1$.

  Luego, $X = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

$$b, c \in \mathbb{R}$$

Propiedades de los determinantes

30. Determina los valores de *a* que anulan este determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3a+1} & \mathbf{6a+2} & \mathbf{3a+1} \\ \mathbf{a} & \mathbf{2a+1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{2a} & \mathbf{a+1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3a+1 & 6a+2 & 3a+1 \\ a & 2a+1 & a \\ a & 2a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a+1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3a+1$$

$C_2 - 2C_1$

$C_3 - C_1$

Si $3a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

31. Utiliza las propiedades para calcular estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & -b & c+a \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a+1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{b+1} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & -b & c+a \end{vmatrix} = 0$

$F_1 = F_2 + F_3$

(Propiedad 10)

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = ab$

(Propiedad 11)

32. **Si** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$**, calcula:**

a) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ***c)*** $\begin{vmatrix} g & 2h & i \\ d & 2e & f \\ a & 2b & c \end{vmatrix}$ ***d)*** $\begin{vmatrix} -2a & -6b & -2c \\ g & 3h & i \\ d & 3e & f \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$

b) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$

c) $\begin{vmatrix} g & 2h & i \\ d & 2e & f \\ a & 2b & c \end{vmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} -\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} \underset{C_2' = -2C_2}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = -4$

d) $\begin{vmatrix} -2a & -6b & -2c \\ g & 3h & i \\ d & 3e & f \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1' = -2F_1 \\ C_2' = 3C_2}}{=} -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} 6\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 = 12$

33. **Si *A* y *B* son dos matrices de orden 3 tales que** $|A| = 2$ **y** $|B| = 6$ **, encuentra el valor de:**

a) $|AB|$ ***b)*** $|2B|$ ***c)*** $|3AB|$ ***d)*** $|A^tB|$

a) $|AB| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 6 = 12$

b) $|2B| = 2^3 \cdot |B| = 8 \cdot 6 = 48$

c) $|3AB| = 3^3 \cdot |A| \cdot |B| = 27 \cdot 2 \cdot 6 = 324$

d) $|A^t B| = |A^t| \cdot |B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 6 = 12$

34. **Una matriz cuadrada es idempotente si A^2 = A. ¿Qué valores puede tomar $|A|$? Encuentra una matriz de orden 2 que sea idempotente.**

$A^2 = A \cdot A \Rightarrow |A^2| = |A| \cdot |A|$.

Si A es idempotente, entonces $A^2 = A$ y

$$|A^2| = |A| \cdot |A| = |A| \Rightarrow (|A|)^2 = |A|$$

Luego,

$$|A| = 0 \text{ o } |A| = 1.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz idempotente de orden 2.

Entonces, $A^2 = A$. Por tanto,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = a \\ b(a+d) = b \\ c(a+d) = c \\ bc+d^2 = d \end{cases} \rightarrow a+d=1$$

Si hacemos a = 2, entonces d = -1.
Luego, bc = -2
Y, por ejemplo, b = 1 y c = -2.
Por ejemplo, una matriz idempotente de orden 2 es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

35. **Demuestra que:** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{c^2} \end{vmatrix} = \mathbf{(b-a)(c-a)(c-b)}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

Desarrollando por la 1ª fila.

$$= (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) = (b-a)(c+a)(c-a) - (c-a)(b+a)(b-a) =$$
$$= (b-a)(c-a)\left[(c+a)-(b+a)\right] = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Cálculo de determinantes

36. Demuestra que el desarrollo por adjuntos del determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ por la primera fila es el mismo que por la primera columna, y que ambos coinciden con el resultado de la regla de Sarrus.

- Desarrollando por la primera fila resulta:

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) -$$

$$-a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- Desarrollando por la primera columna queda:

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) -$$

$$-a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{33}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} +$$

$$+a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.$$

Efectivamente ambos resultados coinciden con la regla de Sarrus.

37. Aplicando las propiedades, halla el valor del determinante: $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & w \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & w \end{vmatrix} \underset{\substack{F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - F_1 \\ F'_4 = F_4 - F_1 \\ \text{(Propiedad 11)}}}{=} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ o & y-x & y-x & y-x \\ 0 & y-x & z-x & z-x \\ 0 & y-x & z-x & w-z \end{vmatrix} \underset{\substack{F'_3 = F_3 - F_2 \\ F'_4 = F_4 - F_2 \\ \text{(Propiedad 11)}}}{=} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x \\ 0 & 0 & z-y & z-y \\ 0 & 0 & z-y & w-y \end{vmatrix} \underset{F_4 = F_3}{=}$$

$$\underset{\text{Desarrollando 1ª columna}}{=} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & y-x & y-x & y-x \\ 0 & 0 & z-y & z-y \\ 0 & 0 & 0 & w-z \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y-x & y-x & y-x \\ 0 & z-y & z-y \\ 0 & 0 & w-z \end{vmatrix} \underset{\text{Idem}}{=} x(y-x) \begin{vmatrix} z-y & z-y \\ 0 & w-t \end{vmatrix} \underset{\text{Idem}}{=} x(y-x)(z-y)(w-z)$$

38. **Encuentra el valor de los siguientes determinantes mediante reducción por filas hasta obtener la forma escalonada:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 + 2F_1 \\ F_3' = F_3 - 3F_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_3' = 4F_3 + 3F_2}{=} -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 26 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\cdot 104 = -26$$

b) $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{F_2' = 2F_2 - F_1}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{F_3' = F_3 - 2F_2}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = +\frac{1}{2}\cdot 20 = 10$$

c) $$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 + 2F_1 \\ F_3' = F_3 + F_1 \\ F_4' = F_4 + 3F_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 15 & 6 & 6 \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 15 & 6 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3' = F_3 - 7F_2 \\ F_4' = F_4 - 15F_2}}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & -23 \\ 0 & 0 & -24 & -54 \end{vmatrix} \underset{F_3 = 3F_2}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 96$$

39. **Demuestra que este determinante es múltiplo de 3:** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 9 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 9 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 8 (columna 3ª)}}{=} 3\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

40. Calcula los siguientes determinantes desarrollando por la fila o columna que parezca más conveniente:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ***c)*** $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ ***e)*** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5(18+2) = 100$

Desarrollando por la 3ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (1+8) - (4-3) = 8$

Desarrollando por la 2ª fila.

c) $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b & 0 \\ a & b \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & a \end{vmatrix} = ab^2 + ba^2 = ab(a+b)$

Desarrollando por la 1ª fila.

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Propiedad 10 ($C_3 = C_1 + C_2$)

Desarrollando por la 2ª columna.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(3+10-18+3-10-18) = -60$

Desarrollando por la 2ª columna.

41. Calcula el valor de estos determinantes reduciendo por filas a su forma escalonada:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$ ***c)*** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_4}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 3\cdot 4 = -24$$

b) $$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} \underset{aF_2 - CF_1}{=} \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & ad-bc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} \underset{aF_4 - CF_3}{=} \frac{1}{a^2}\cdot\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & ad-bc & c & d \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & ad+bc \end{vmatrix} =$$

$$= (ad - bc)(ad + bc)$$

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \underset{2F_2 - F_1}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \underset{2F_4 - 5F_3}{=} \frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -49$$

Rango de una matriz

42. Calcula el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Como la matriz es cuadrada calculemos el valor de su determinante, por ejemplo, reduciendo a la forma escalonada por filas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 + F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3' = F_3 - 2F_2 \\ F_4' = F_4 - F_2}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Propiedad 3} \\ (F_3 = F_4)}}{=} 0$$

Luego, el rango de A no es 4.
Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 2 + 1 = -1 \neq 0.$$

Por tanto, rg(A) = 3

43. Halla el rango de la matriz *M* según los distintos valores del parámetro *a*.

$$M=\begin{pmatrix} 5 & -4 & a+4 & -3 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz *M* no es cuadrada.

$$|5| = 5 \neq 0 \Rightarrow rg(\mathrm{M}) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5-4 = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(\mathrm{M}) \geq 2$$

Calculemos, pues, el valor de los dos determinantes de orden 3 que llevan incorporados al menor de orden 2 hallado y distinto de cero. Así:

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & a+4 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a+4)\cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (a+4)(a-2); \textit{se anula para } a=-4 \quad a=2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15a+8+6-3a+10+24 = 12a+48; \textit{se anula para } a=-4$$

Por tanto, $rg(\mathrm{M}) = 3,\ \forall a \neq -4$

$rg(M) = 2, si\ a=-4$

44. Calcula, según los valores de *a*, el rango de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz *A* no es cuadrada

$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rg(\mathrm{A}) \geq 2$

Ahora, calculemos los dos determinantes de orden 3 que tienen incorporado al menor de orden 2 hallado anteriormente. Así:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2+4a-12$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2a+2a = 0$

$a^2+4a-12 = 0 \Rightarrow a=-6$ y $a=2$.

Por tanto,

- Si $a \neq -6$ y $a \neq 2$, entonces rg(*A*)=3
- Si *a* = -6 o *a* = 2, entonces rg(*A*) = 2.

45. **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determina, según los valores de λ, el rango de la matriz $AA^t - \lambda I$, donde I es la matriz unidad de orden 2.**

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$T = AA^t - \lambda T = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Como T es cuadrada calcularemos el valor de su determinante. Así:

$$|T| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 6\lambda$$

$$\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \ \lambda = 6$$

Luego,

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6 \Rightarrow \text{rg}(T) = 2$.
- Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 6 \Rightarrow \text{rg}(T) = 1$, porque existe un menor de orden 1 no nulo.

46. **Calcula el rango de la matriz *P* según los distintos valores de *a* y *b*.**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+2 & 2b \\ 0 & 2b & 2b^2+1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+2 & 2b \\ 0 & 2b & 2b^2+1 \end{vmatrix} = (a^2+2)(2b^2+1) - 4b^2 - a^2(2b^2+1) =$$

$$= 2a^2b^2 + a^2 + 4b^2 + 2 - 4b^2 - 2a^2b^2 - a^2 = 2 \neq 0.$$

Por tanto,

$$\text{rg}(P) = 3, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Matriz inversa

47. **Estudia sin calcularla, si existe, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobaremos si cada una de las matrices tiene determinante distinto de cero, lo que garantizará la existencia de la matriz inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 2\\ -10 & 4\end{vmatrix}=20+20=40\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6\neq 0\Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \exists C^{-1}$$

$$|D|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-3+4+1-2=0\Rightarrow \exists D^{-1}$$

48. Halla la matriz *A* que verifica .

$$(I+2A)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Sea $M=I+2A$, entonces $M^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

Como $|M^{1}|=-5-8=-13$, entonces $|M|=\dfrac{1}{|M^{-1}|}=\dfrac{-1}{13}$

Ahora bien,

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot(\mathrm{adj}(M))^{t}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}=-13(\mathrm{adj}(M))^{t}\Rightarrow\left(\mathrm{adj}(M)^{t}=\frac{-1}{13}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\right)\Rightarrow \mathrm{adj}(M)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

Luego,

$$A_{11}=\frac{1}{3},\quad A_{12}=\frac{4}{13},\quad A_{21}=\frac{2}{13}\quad \text{y}\quad A_{22}=\frac{-5}{13}$$

Por tanto,

$$M=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}+5 & -2\\ -4 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -4 & -1\end{pmatrix}=\frac{-1}{13}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$M=I+2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}(M-I)\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{-1}{13}\begin{pmatrix}9 & -1\\ -2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9/13 & 1/13\\ -2/13 & -6/13\end{pmatrix}$$

49. Encuentra dos matrices *A* y *B* de orden 2 que verifiquen: $|A+B|=|A|+|B|$.

En general, $|A+B|\neq|A|+|B|$.

No obstante, sí es posible encontrar dos matrices que verifiquen la igualdad. Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

$|A|=0$, $|B|=0$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A + B| = 0$

Luego, $|A + B| = |A| + |B|$.

50. Calcula, si existen, las inversas de las siguientes matrices diagonales y extrae conclusiones:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $|A| = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

  $A_{11} = 2, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = 1.$

  $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\text{adj}(A))^t = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $|B| = -6 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$

  $\left.\begin{matrix} A_{11} = -6, & A_{12} = 0, & A_{13} = 0 \\ A_{21} = -0, & A_{22} = -2, & A_{23} = 0 \\ A_{31} = -6, & A_{32} = 0, & A_{33} = 3 \end{matrix}\right\} \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

  $\text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $|C| = 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$.

51. Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula *MN* y comprueba que la matriz resultante no es invertible.

b) Halla los valores de *t* para los cuales *NM* es invertible.

a) $MN = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -t+2 & t^2 & 2t-2 \end{pmatrix}$

$|MN| = t(-t+2) - t^2 + t(2t-2) = 0$

Por tanto, $\nexists (MN)^{-1}$.

b) $NM = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2t & 2-t \\ 1-t & 0 \end{pmatrix}$

$$|NM| = -(2-t)(1-t).$$

$$|NM| = 0 \Rightarrow -(2-t)(1-t) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ y } t = 2.$$

En consecuencia, NM es invertible cuando $t \neq 1$ y $t \neq 2$.

52. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **Encuentra los valores de *k* para los que la matriz *A* es invertible.**

b) **Halla, si existe, la matriz inversa de *A* para *k* = 2.**

a) $|A| = (k-1)(k-2) + 2 + 2(k-2)k^2 - k$

$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - k = k(k-1) = 0 \Rightarrow k = 0,\ k = 1$

La matriz A es invertible cuando $k \neq 0$ y $k \neq 1$.

b) Para $k = 2$, sí existe la matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |A| = 2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}(A))^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

53. Calcula la matriz *X* que verifica *AXA* = *B*, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AXA = B(A^{-1}A)XA = A^{-1}B \Rightarrow IXA = A^{-41}B \Rightarrow XA = A^{-1}B \Rightarrow X(AA^{-1}) = (A^{-1}B)A^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow XI = (A^{-1}B)A^{-1} \Rightarrow X = (A^{-1}B)A^{-1}$$

En primer lugar calcularemos la matriz inversa A^{-1}.

$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad (\text{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot(\text{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

54. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$**:**

a) **Determina el rango de la matriz *A* en función del parámetro *a*.**

b) **Calcula el determinante de la matriz $2A^{-1}$.**

a) Como la matriz *A* es cuadrada calculamos su determinante. Así:

$|A| = (a+1)a - 2a(a-1) + 3a(a+1) - 2(a-1) = 2a^2 + 4a + 2.$

$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 4a + 2 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1.$

Por tanto,

Si $a \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

Si $a = -1$, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ y rg(A) = 2.

b) $|2A^{-1}| = 2^3 \cdot |A^{-1}| = 8\cdot\frac{1}{|A|} = \frac{8}{2a^2+4a+2} = \frac{4}{(a+1)^2}$

$a \neq -1$

55. **Sea A una matriz cuadrada de orden 2 tal que $2A^2 = A$. ¿Se puede asegurar que A es invertible? ¿Qué valores puede tomar $|A|$?**

Si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces

$$|2A^2| = 2^2|A^2| = 4|A|^2$$

Luego,

$|2A^2| = |A| \Rightarrow 4|A|^2 = |A| \Rightarrow 4|A|^2 - |A| = 0 \Rightarrow |A|(4|A| - 1) = 0 \Rightarrow$

$|A| = 0$ o $4|A| - 1 = 0$, es decir, $|A| = 1/4$.

Por tanto, los posible valores de $|A|$ son 0 o $1/4$.

Si $|A| = 0$, entonces $\nexists A^{-1}$.

Si $|A| = 1/4$, entonces $\exists A^{-1}$.

En consecuencia, no se puede asegurar que la matriz A sea invertible.

56. **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:**

a) **Calcular $(AB)^{-1}$ y $(B^t)^{-1}$.**

b) **Resolver la ecuación $B^tX + A^tB = A^t$.**

a) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$|AB| = -4 + 5 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists (AB)^{-1}$

$\text{adj}(AB) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad (\text{adj}(AB))^t = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Luego,

$$(B^t)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Date cuenta de que $A = A^t$. Así:

$B^tX + A^tB = A^t \Rightarrow B^tX = A - AB \Rightarrow (B^t)^{-1}B^tX = (B^t)^{-1}(A - AB) \Rightarrow IX(B^t)^{-1}(A - AB) \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = (B^t)^{-1}(A - AB)$$

$$A - AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -17 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$$

57. **Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}$, donde x e y son números reales.**

a) **Comprueba que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de x e y.**

b) **Para $x = 1$ e $y = -1$, calcula la matriz inversa M^{-1}.**

a) $|M| = x^2 + y^2 + 1 > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Por tanto, siempre existe M^{-1}.

b) Para $x = 1$ e $y = -1$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$|M| = 3$

$\text{adj}(M) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\text{adj}(M))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Luego,

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot (adj(M))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

58. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, si $m \in \mathbb{R}$. Encuentra los valores de *m* para los cuales *AB* es invertible.

En primer lugar calculamos *AB*.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 3+2m \\ 1-m & 1 \end{pmatrix}$$

$|AB| = 1 - 2m - (3+2m)(1-m) = 2m^2 + 3m - 2$

$2m^2 + 3m - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -2 \text{ y } m = 1/2$

Por tanto, la matriz *AB* es invertible si $|AB| \neq 0$, es decir, si $m \neq -2$ y $m \neq 1/2$.

59. Halla los valores de *k* para los cuales $A = \begin{pmatrix} k & k-1 & 8 \\ k & 3 & k \\ 0 & 1 & 1-k \end{pmatrix}$ es invertible.

La matriz A es invertible si, y solo si, $|A| \neq 0$.

$|A| = k(k^2 - 6k + 12)$

$|A| = 0 \Rightarrow k(k^2 - 6k + 12) = 0 \Rightarrow k = 0$

En consecuencia, la matriz A es invertible si $k \neq 0$.

60. Sean las matrices: $A = (-1 \quad 0 \quad 1)$, $B = (3 \quad 0 \quad 1)$, $C = (4 \quad -2 \quad 0)$ y $M = \begin{pmatrix} k & k+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

***a)* Calcula los valores de *k* para que la inversa de *M* sea $\frac{1}{4}M$**

***b)* Halla la matriz *X* que verifica: $B^tAX + C^t = X$.**

a) $|M| = k - k - 4 = -4 \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$.

Por tanto, $\exists M^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{R}$.

$$\text{adj}(M)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -k-4 & k \end{pmatrix}, \left(\text{adj}(M)\right)^t=\begin{pmatrix} 1 & -k-4 \\ -1 & k \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot\left(\text{adj}(M)\right)^t=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -k-4 \\ -1 & k \end{pmatrix}$$

Si se tiene que cumplir que $M^{-1}=\frac{1}{4}M$. Entonces:

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -k-4 \\ -1 & k \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} k & k+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k=-1$$

b) $B^tA=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot X+\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}=X$$

La matriz A tiene que tener de dimensión 3×1. Sea $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, entonces,

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -3a+3c \\ 0 \\ -a+c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -3a+3c+4 \\ -2 \\ -a+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -3a+3c+4=a \\ -2=b \\ -a+c=c \end{array}\right\}\Rightarrow a=0, b=-2, c=-\tfrac{4}{3}$$

Luego,

$$X=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -\tfrac{4}{3} \end{pmatrix}$$

61. Encuentra la matriz A que verifica: $(5A^t)^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Sea $M=5A^t$, entonces $M^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left|M^{-1}\right|=-6+5=-1\Rightarrow|M|=\frac{1}{\left|M^{-1}\right|}=-1.$$

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\left(\text{adj}(M)\right)^t\Rightarrow M^{-1}=-\left(\text{adj}(M)\right)^t\Rightarrow\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow\text{adj}(M)=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Así,

$$M_{11}=3,\quad M_{12}=-5,\quad M_{21}=1,\quad M_{22}=-2$$

Luego,

$$M=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 5A^t \Rightarrow A^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

62. Halla la matriz X que verifica $A^tX = BC$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = (1 \;\; 1 \;\; 2)$$

$$A^tX = BC \Rightarrow (A^t)^{-1}A^tX = (A^t)^{-1}BC \Rightarrow IX = (A^t)^{-1}BC \Rightarrow X = (A^t)^{-1}BC$$

Calculemos, pues, la matriz inversa de A^t.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |A^t| = 1$$

$$A_{11} = 1,\; A_{12} = -1,\; A_{13} = -1,\; A_{21} = 0,\; A_{22} = 1,\; A_{23} = 0$$
$$A_{31} = 0,\; A_{32} = 0,\; A_{33} = 1.$$

$$\text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\text{adj}(A^t)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $BC = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, entonces

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

63. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) **Calcula para qué valor o valores de x M admite inversa.**

b) **En caso de existir, calcula la inversa de M para $x = -3$.**

a) $|M| = 6 - x^2 - 1 = -x^2 + 5$

$|M| = 0 \Rightarrow -x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Por tanto, la matriz M tiene inversa si $x \neq \pm\sqrt{5}$.

b) Para $x=-3$, $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -3 & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $|M|=-9+5=-4$.

Luego sí tiene inversa.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -6 & 0\end{vmatrix}=6,\quad A_{13}=-\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -6 & -1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3,\quad A_{22}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ -6 & 0\end{vmatrix}=-18,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -6 & -1\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{31}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=10,\quad A_{33}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 0\end{vmatrix}=3$$

$$\text{adj}(M)=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 3\\ 3 & -18 & -5\\ -1 & 10 & 3\end{pmatrix},\quad (adj(M))^t=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 6 & -18 & 10\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$M^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ -6 & 18 & -10\\ -3 & 5 & -3\end{pmatrix}$$

64. Encuentra, si existe, la matriz *X* que verifique *ABX* − 2*C* = *CX* si *A, B* y *C* son las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$ABX-2C=CX\Rightarrow ABX-CX=2C\Rightarrow (AB-C)X=2C$

Si hacemos $T=(AB-C)$, entonces:

$$TX=2C\Rightarrow (T^{-1}T)X=T^{-1}\cdot 2C\Rightarrow IX=2T^{-1}C\Rightarrow X=2T^{-1}C$$

En primer lugar entendemos $T=(AB-C)$.

$$T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -1 & 3\\ 8 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 3\\ 9 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$|T|-4+3=-1\neq 0\Rightarrow \exists T^{-1}$$

$T^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -15\\ -1 & 2 & -12\end{pmatrix}$. Luego,

$$X=2\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -15\\ -1 & 2 & -12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ -40 & 38 & -24\\ -30 & 30 & -20\end{pmatrix}$$

65. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & x & 3\\ 4 & 1 & -x\end{pmatrix}$, **donde *x* es un número real. Halla:**

a) **Los valores de *x* para los que la matriz *A* posee inversa.**

b) **La inversa de *A* para *x* = 2.**

c) **Con *x* = 5, el valor de $b\in\mathbb{R}$ para que la matriz *bA* tenga determinante igual a 1.**

a) $|A|=-x^2+4x-3$

$|A|=0\Rightarrow -x^2+4x-3=0\Rightarrow x=1$ y $x=3$

La matriz *A* posee inversa si $x\neq 1$ y $x\neq 3$

b) Para *x* = 2, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y $|A|=1$.

La matriz inversa es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

c) Si *x* = 5, entonces $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 3\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix}$

$$|bA|=b^3\cdot|A|=b^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 3\\ 4 & 1 & -5\end{vmatrix}=b^3\cdot(-8)=-8b^3$$

Si $|bA|=1\Rightarrow -8b^3=1\Rightarrow b^3=-\dfrac{1}{8}\Rightarrow b=-\dfrac{1}{2}$

66. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$**:**

a) **Halla los valores de λ que verifican la ecuación** $|A-\lambda I|=0$.

b) **Sea** $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. **Comprueba que** $|P^{-1}AP|$ **es igual al producto de los valores de λ obtenidos en el apartado *a).***

a) $\left|\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(3-\lambda)=0\Rightarrow\lambda=3$ y $\lambda=4$.

b) Sea $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, entonces $|P|=1\neq 0$ y, por tanto, existe P^{-1}.

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\left|P^{-1}AP\right|=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=12.$$

Efectivamente, $\left|P^{-1}AP\right|=12=3\cdot 4$

67. Dada la matriz $Q=\begin{pmatrix}0,28 & 0,96\\ 0,96 & -0,28\end{pmatrix}$, prueba que su inversa es ella misma.

$$|Q|=-1\neq 0\Rightarrow \exists Q^{-1}$$

$$adj(Q)=\begin{pmatrix}-0,28 & -0,96\\ -0,96 & 0,28\end{pmatrix},\quad \left(adj(A)\right)^t=\begin{pmatrix}-0,28 & -0,96\\ -0,96 & 0,28\end{pmatrix}$$

Luego,

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}0,28 & 0,96\\ 0,96 & 0,28\end{pmatrix}$$

Por tanto, $Q=Q^{-1}$

68. Analiza si las siguientes matrices son ortogonales:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Una matriz es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta.

- $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

  Luego, $A^t=A^{-1}$ y A es ortogonal.

- $B=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $B^t=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

  Como $B^t=B^{-1}$, entonces B es ortogonal.

69. Dada $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y la matriz identidad I de orden 3:

***a)* Halla el rango de las matrices $A-I$, A^2-I y A^3-I.**

***b)* Si existe, calcula la matriz inversa de A^6.**

a) • $A-I=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$|A-I|=1-1=0$ y, por ejemplo, $\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

• $A^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A^2-1=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$|A^2-I|=0,$ no hay ningún menor de orden 2 no nulo y, $|3|=3\neq 0$. Por tanto, $\text{rg}(A^2-I)=1$

• $A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$A^3-I=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$; $|A^3-I|=7-7=0$ y $\begin{vmatrix}7&0\\0&-1\end{vmatrix}=-7\neq 0$

Por tanto, $\text{rg}(A^3-I)=2$.

b) $A^6=A^3\cdot A^3=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$|A^6|=64\neq 0\Rightarrow \exists (A^6)^{-1}$

La matriz inversa de A^6 es:

$$(A^6)^{-1}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&64&0\\0&0&64\end{pmatrix}$$

70. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$:

a) **¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t?**

b) **Estudia, según los valores λ, el rango de la matriz $A-\lambda I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.**

a) $|A|=-1\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$ y $A^t=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$

Como $A^{-1}=A^t$, se trata de una matriz ortogonal.

b) $A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&-1\\-1&-\lambda&0\\0&-1&-\lambda\end{pmatrix}$

$|A-\lambda I|=-\lambda^3-1$; $|A-\lambda I|=0\Rightarrow-\lambda^3-1=0\Rightarrow\lambda=-1$

Por tanto,

Si $\lambda\neq-1$, entonces $\text{rg}(A-\lambda I)=3$.

Si $\lambda=-1$, por ejemplo, $\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1\neq0$ y $\text{rg}(A-\lambda I)=2$

Miscelánea

71. Si A y B son dos matrices de orden 3 tales que $|A|=1$ y $|B|=5$, encuentra el valor de:

a) $|AB|$ ***b)*** $|5A|$ ***c)*** $|A^tB|$ ***d)*** $|B^{-1}|$ ***e)*** $|B^4|$ ***f)*** $|B^{-1}AB|$

a) $|AB|=|A|\cdot|B|=1\cdot5=5$

b) $|5A|=5^3\cdot|A|=125\cdot1=125$

c) $|A^tB|=|A^t|\cdot|B|=|A|\cdot|B|=1\cdot5=5$

d) $|B^{-1}|=\dfrac{1}{|B|}=\dfrac{1}{5}$

e) $|B^4|=(|B|)^4=5^4=625$

f) $|B^{-1}AB|=|B^{-1}|\cdot|A|\cdot|B|=\dfrac{1}{|B|}\cdot|A|\cdot|B|=1$

72. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2a&a&a&a\\a&2a&a&a\\a&a&2a&a\\a&a&a&2a\end{pmatrix}$.

a) **Calcula el valor de su determinante en función de *a*.**

b) **Halla, si existe, su inversa para *a* = 1.**

a) $|A|=\begin{vmatrix}2a&a&a&a\\a&2a&a&a\\a&a&2a&a\\a&a&a&2a\end{vmatrix}\underset{\substack{F_2'=2F_2-F_1\\F_3'=2F_3-F_1\\F_4'=2F_4-F_1}}{=}\frac{1}{8}\begin{vmatrix}2a&a&a&a\\0&3a&a&a\\0&a&3a&a\\0&a&a&3a\end{vmatrix}\underset{\substack{F_3'=3F_3-F_2\\F_4'=3F_4-F_2}}{=}\frac{1}{72}\begin{vmatrix}2a&a&a&a\\0&3a&a&a\\0&0&8a&2a\\0&0&2a&8a\end{vmatrix}=$

$$\underset{F_4' = 4F_4 - F_3}{=} \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ 0 & 3a & a & a \\ 0 & 0 & 8a & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 30a \end{vmatrix} = 5a^4$$

b) Para $a = 1$, tenemos que $|A| = 5 \neq 0$ y, por tanto, $\exists A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

73. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

***a)* Halla, si existe, la inversa de *A*.**

***b)* Encuentra los valores de *m* tales que ($A - mI$) tiene inversa.**

***c)* Calcula el rango de ($A - 2I$).**

a) $|A| = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$A_{11} = 6,\quad A_{12} = 0,\quad A_{13} = -2,\quad A_{21} = 1,\quad A_{22} = 2,\quad A_{23} = -1$

$A_{31} = 4,\quad A_{32} = 0,\quad A_{33} = 0$

Luego,

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } (adj(A))^t = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $|A - mI| = \begin{vmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{vmatrix} = -m(2-m)(3-m) + 2(2-m) = -(m-2)^2(m-1)$.

Luego, $\exists (A - mI)^{-1} \Leftrightarrow |A - mI| \neq 0 \Leftrightarrow -(m-2)^2(m-1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ y $m \neq 2$.

c) $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A - 2I) = 2$

74. **Sea la matriz** $A=\begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **Calcula, según los valores de *a*, el rango de *A*.**

b) **Para *a* = 0, halla, si existe, la inversa de *A*.**

c) **Para *a* = 0, encuentra la matriz *X* que verifica $AXA^{-1} - A = 2I$.**

a) $|A| = -a(a-2) - a^2 - 2(a-1)(a-2) = -4a^2 + 8a - 4$

$|A| = 0 \Rightarrow -4a^2 + 8a - 4 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Si $a \neq 1$, entonces $\text{rg}(A) = 3$

Si $a = 1$,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Luego, $\text{rg}(A) = 2$

b) Para $a = 0$, $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A| = -4 \neq 0$

Luego, sí existe A^{-1}.

$A_{11} = 0,\quad A_{12} = 2,\quad A_{13} = 0,\quad A_{21} = 4,\quad A_{22} = 0,\quad A_{23} = 0$

$A_{31} = 2,\quad A_{32} = -1,\quad A_{33} = -2.$

$$\text{adj}(A)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $AXA^{-1} - A = 2I \Rightarrow AXA^{-1} = A + 2I \Rightarrow (A^{-1}A)XA^{-1} = A^{-1}(A+2I) \Rightarrow IXA^{-1} = A^{-1}(A+2I) \Rightarrow$

$\Rightarrow XA^{-1} = A^{-1}(A+2I) \Rightarrow X(A^{-1}A) = A^{-1}(A+2I)A \Rightarrow XI = A^{-1}(A+2I)A \Rightarrow X = A^{-1}(A+2I)A \Rightarrow$

$\Rightarrow X = (A^{-1}A + 2A^{-1}I)A \Rightarrow X = (I + 2A^{-1})A \Rightarrow X = IA + 2A^{-1}A = A + 2I$

Por tanto,

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

75. **Encuentra, si existe, una matriz *M* de orden 2 que cumpla las siguientes condiciones:**

a) **Coincide con su traspuesta.**

b) **Verifica la ecuación matricial *PMQ* = 3*P*, donde** $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $Q=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) **Su determinante vale 9.**

Sea $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz buscada.

a) $M = M^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow b = c$

b) $PMQ = 3P \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & -a+d \\ -a-b & a-d \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ -a+d=3 \\ -a-b=-3 \\ a-d=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3-a \\ d=3+a \end{cases}$$

c) $|M| = 9 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 3-a \\ 3-a & 3+a \end{vmatrix} = 3a + a^2 - (3-a)^2 = 9a - 9 = 9 \Rightarrow a = 2$

Por tanto, la matriz M que verifica estas tres condiciones:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

EBAU

76. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$**:**

a) **Calcula el determinante de *A*.**

b) **¿Para qué valor de *a* tiene inversa la matriz *A*?**

c) **Si *A* es la matriz de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas, resuélvelo en el caso en el que *a* = 0.**

La Rioja

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^2(a+1)$

b) la matriz A tiene inversa si, y solo si, $|A| \neq 0$.

$$-a^2(a+1) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 0 \text{ y } a \neq -1$$

c) El contenido de este apartado es de la Unidad 3. No obstante lo resolveremos aquí.
Para $a = 0$, el sistema homogéneo es:

y $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} z=-y \\ x=y \end{matrix}$ y sustituyendo en la primera ecuación resulta:

$$x + y - 2y = 0$$

El sistema no tiene solo la solución trivial. Por ejemplo, haciendo $y = \lambda$, entonces $z = -\lambda$ y $x = \lambda$
.
Luego,

$$(x, y, z) = (\lambda, \lambda, -\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Es una expresión de las infinitas soluciones del sistema.

77. **Sean A y B las siguientes matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) **Halla la matriz inversa de $A-B$.**

b) **Obtén la matriz X tal que $X(A-B)=2A-3B$.**

País Vasco

a) $A-B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$|A-B|=1\neq 0\Rightarrow \exists(A-B)^{-1}$

Calculemos los adjuntos y la matriz adjunta.

$A_{11}=1,\quad A_{12}=-1,\quad A_{21}=-1,\quad A_{22}=2$

$$\text{adj}(A-B)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Luego, $(A-B)^{-1}=\dfrac{1}{|A-B|}\cdot\left(\text{adj}(A-B)\right)^{t}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

b) $X(A-B)=2A-3B\Rightarrow \left(X\cdot(A-B)\right)(A-B)^{-1}=(2A-3B)(A-B)^{-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow X\left[(A-B)\cdot(A-B)^{-1}\right]=(2A-3B)(A-B)^{1}\Rightarrow XI=(2A-3B)(A-B)^{-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow X=(2A-3B)\cdot(A-B)^{-1}$

Calculamos, previamente, $2A-3B$. Así:

$2A-3B=2\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -6\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

Por tanto,

$X=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

78. **Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$.**

a) **Determina para qué valor del parámetro x no existe $(AB)^{-1}$.**

b) **Halla la matriz inversa de AB para $x=1$.**

Extremadura

a) $AB=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-1 & 3\\ -x & 1\end{pmatrix}$

Existe $(AB)^{-1}$ si, y solo si, $(AB)\neq 0$. Así:

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 5x-1$$

$$|AB| \neq 0 \Rightarrow 5x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{5}.$$

Por tanto, existe la matriz inversa $(AB)^{-1}$ SI $x \neq \frac{1}{5}$.

b) Para $x = 1$, - $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|AB| = 4$.

Los adjuntos y la matriz adjunta son:

$A_{11} = 1,\quad A_{12} = 1,\quad A_{21} = -3,\quad A_{22} = 1$

$$\text{adj}(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \cdot (\text{adj}(AB))^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

79. **Sea la expresión matricial $B^t - AX = B$, en la que A y B son:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) **Despeja la matriz *X* de la ecuación.**

b) **Halla la matriz *X*.**

Navarra

a) $B^t - AX = B \Rightarrow AX = B^t - B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(B^t - B) \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}(B^t - B) \Rightarrow$
$IX = A^{-1}(B^t - B) \Rightarrow X = A^{-1}(B^t - B)$.

b) $B^t - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Calculemos ahora la matriz inversa de *A*.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

Veamos cuáles son los adjuntos.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

La matriz adjunta es:

$$\text{adj}(A)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Luego, la matriz inversa de A es:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{adj}(A))^t=\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X=A^{-1}(B^t-B)=\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -3 & 0 & 3\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9 & -12\\ 3 & 0 & -3\\ -3 & 0 & 9\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

80. Sean $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}7 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 4\\ 8 & 4 & 6\end{pmatrix}$, se pide:

***a)* Calcular A^{-1}.**

***b)* Halla una matriz *X* de orden 3 que verifica $AX=B$.**

Comunidad Valenciana

a) La matriz A^{-1} existe si, y solo si, $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & 1 & 3\end{vmatrix}=19\neq 0.\Rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos los adjuntos de la matriz A.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-19 \qquad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=8 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-19 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-7$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -2\end{vmatrix}=19 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5$$

Luego, la matriz adjunta es:

$$\text{adj}(A)=\begin{pmatrix}5 & -19 & -2\\ 8 & -19 & -7\\ -3 & 19 & 5\end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\text{adj}(A)\right)^t=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}5 & 8 & -3\\ -19 & -19 & 19\\ -2 & -7 & 5\end{pmatrix}$$

b) $AX=B\Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B\Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B\Rightarrow IX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$

Luego,

$$X = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

81. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **Calcula $(AB)^2$.**

b) **Encuentra, si existe, una matriz *X* tal que $2A + 3X = 4C$.**

c) **Calcula, si existe, la matriz inversa de *D*.**

Aragón

a) $$(AB)^2 = \left[\begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right]^2 = \left[\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -41 & -115 \\ -170 & 350 \end{pmatrix}$$

b) $2A + 3X = 4C \Rightarrow 3X = 4C - 2A \Rightarrow X = \frac{1}{3}(4C - 2A)$

Luego,

$$X = \frac{1}{3}\left[4\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 10 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Existe D^{-1} si, y solo si, $|D| \neq 0$.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$$

Calculemos, pues, los adjuntos de la matriz *D*.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

La matriz adjunta es:

$$\operatorname{adj}(D) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 8 \\ 1 & -6 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz inversa D^{-1} es:

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}\left(\operatorname{adj}(D)\right)^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 6 & 6 & 4\\ -8 & -4 & -4\end{pmatrix}$$

82. **Se considera la matriz** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$**.**

a) **Razona si la matriz *A* es simétrica.**

b) **Calcula A^{-1}.**

c) **Resuelve la ecuación $2XA-A^2-3I_3=O$.**

Andalucía

a) Una matriz A es simétrica si coincide con su respuesta A^t. Es decir, si $A=A^t$.

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Como $A\neq A^t$, entonces A no es simétrica.

b) $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$.

Calculemos sus adjuntos y la matriz adjunta.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2 \qquad A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=2 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Luego,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj(A)\right)^t=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

c) $2XA-A^2-3I_3=0\Rightarrow 2XA=A^2+3I_3\Rightarrow (2XA)A^{-1}=(A^2+3I_3)A^{-1}\Rightarrow 2X(AA^{-1})=(A^2+3I_3)A^{-1}\Rightarrow$

$2XI=(A^2+3I_3)A^{-1}\Rightarrow X=\frac{1}{2}(A^2+3I_3)A^{-1}$

En primer lugar, calculamos A^2 y $3I_3$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3I_3 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ -6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

83. Sean *A, B* y *C* tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son: $|A| = 3$, $|B| = -2$ y $|C| = 6$. Calcula:

a) **$|A^t B^{-1}|$.**

b) **$|D|$, siendo *D* la matriz resultado de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de *C*.**

c) **$|B^2 E|$, siendo *E* la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de *A*.**

Cantabria

a) Teniendo en cuenta que $|AB| = |A| \cdot |B|$, $|A| = |A^t|$ y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, entonces:

$$|A^t B^{-1}| = |A^t| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 3 \cdot \frac{1}{-2} = \frac{-3}{2}$$

b) Si se multiplica una columna por número real, entonces el valor del determinante queda multiplicado por dicho número real. Así:

$$|D| = 2|C| = 2 \cdot 6 = 12$$

c) Por un lado, $|A^2| = |A|^2$. Y, por otro, si se intercambian entre sí dos filas de una matriz el valor de su determinante cambia de signo, Luego,

$$|B^2 E| = |B^2| \cdot |E| = (|B|)^2 \cdot (-|A|) = (-2)^2 \cdot (-3) = -12$$

84. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **Calcula el determinante de la matriz $ACC^t A^{-1}$.**

b) **Halla la matriz *M* = *AB*. ¿Existe M^{-1}?**

Comunidad de Madrid

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 42 + 32 + 10 - 56 - 60 - 4 = -36 \neq 0$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

a) $|ACC^tA^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C^t| \cdot |A^{-1}| = \cancel{|A|} \cdot |C| \cdot |C| \cdot \frac{1}{\cancel{|A|}} = |C|^2 = 4$

Recuerda que $|C^t| = |C|$ y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

b) $M = AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$

La matriz M no es cuadrada y, por tanto, no existe M^{-1}.

85. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

***a)* Calcula el valor del parámetro *a* para que se cumpla *AB* = *BA*.**

***b)* Para *a* = 2, encuentra una matriz *X* tal que *AXA* = *B*.**

Cataluña

a) $AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -a+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{r} 2a = 2a \\ -a + 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

b) Para $a = 2$,

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad |A| = 4 \neq 0$

Por tanto, sí existe A^{-1}.

Luego,

$AXA = B \Rightarrow A^{-1}(AXA)A^{-1} = A^{-1}BA^{-1} \Rightarrow (A^{-1}A)X(AA^{-1}) = A^{-1}BA^{-1} \Rightarrow IXI = A^{-1}BA^{-1} \Rightarrow$

$$X = A^{-1}BA^{-1}$$

Calculemos, pues, la matriz inversa A^{-1}. Así:

$A_{11} = 2, \qquad A_{12} = 0, \qquad A_{21} = -1, \qquad A_2 = 2$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}(A))^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

86. Se considera la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$**.**

a) **Resuelve la ecuación .**

b) **Si *x* = 0, ¿tiene inversa la matriz *A*? ¿Por qué?**

c) **Si *x* = 2, ¿tiene inversa la matriz *A*? ¿Por qué? En caso afirmativo, resuelve la ecuación *AZ* = *I*, donde *I* es la matriz identidad de orden 3.**

Islas Baleares

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4x^2 - 8x$

$|A| = 0 \Rightarrow -4x^2 - 8x = -4x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad$ y $\quad x = -2$

b) Si $x = 0$, entonces $|A| = 0$ y, por tanto, no existe A^{-1}.

c) Si $x = 2$, entonces $|A| = -32 \neq 0$ y, por tanto, sí existe A^{-1}.

$AZ = I \Rightarrow A^{-1}(AZ) = A^{-1}I \Rightarrow (A^{-1}A)Z = A^{-1} \Rightarrow IZ = A^{-1} \Rightarrow Z = A^{-1}$

Calculemos, pues, la matriz inversa A^{-1}.
Los adjuntos son:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{13} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -24$$

$$A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

La matriz adjunta es:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 4 & -8 & -4 \\ 32 & -24 & -8 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$Z = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{adj}(a)\right)^t = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -8 \\ -2 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

87. **Sean las matrices:** $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$.

a) **Calcula la matriz** B^tAB**.**

b) **Halla la inversa de la matriz** $A-I$**, donde** I **es la matriz identidad de orden 2.**

c) **Despeja la matriz** X **de la ecuación matricial** $AX-B=X$ **, y calcúlala.**

Galicia

a) $B^t=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$B^tAB=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&5&3\\5&2&1\\3&1&1\end{pmatrix}$$

b) Sea $M=A-I$

$$M=A-I=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=*1\neq 0\Rightarrow-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$|M|=|A-I|=-1\neq 0\Rightarrow\exists M^{-1}=(A-I)^{-1}$$

Los adjuntos y la matriz adjunta de M son:

$A_{11}=1,\quad A_{12}=-1,\quad A_{21}=-1,\quad A_{22}=0$

$$\operatorname{adj}(M)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Luego,

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot\left(\operatorname{adj}(M)\right)^t=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

c) $AX-B=X\Rightarrow AX-X=B\Rightarrow(A-I)X=B\Rightarrow(A-I)^{-1}\left((A-I)X\right)=(A-I)^{-1}B\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[(A-I)^{-1}(A-I)\right]X=(A-I)^{-1}B\Rightarrow IX=(A-I)^{-1}B\Rightarrow X=(A-I)^{-1}B$

Por tanto,

$$X=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

