1. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales

1. En una reunión hay 12 personas. Si sabemos que el número de mujeres es superior al de hombres, ¿cuántas personas hay de cada sexo? ¿Es única la respuesta?

Si designamos por “x” el número de mujeres e “y” el número de hombres, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=12 \\ x>y \end{array}\right\} \quad x,y\in Nu\{0\}$$

Se trata, pues, de encontrar dos números naturales que verifiquen esas condiciones.

y	1	2	3	4	5
x	11	10	9	8	7

Hay, por tanto, más de una solución. Exactamente cinco soluciones posibles.

2. Encuentra todas las soluciones de estas ecuaciones:

***a)* 3*x* − 2*y* = 8**

***b)* 4*x* − 2*y* + *z* = 4**

a) $3x-2y=8 \Rightarrow 2y=3x-8 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-4$

Entonces, las soluciones son de la forma:

$$x=\lambda, \qquad y=\frac{3}{2}\lambda-4 \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

b) $4x-2y+z=4 \Rightarrow z=-4x+2y+4$

Haciendo, $x=\lambda$ e $y=\mu$, las soluciones son:

$$x=\lambda, \quad y=\mu, \quad z=-4\lambda+2\mu+4 \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

3. Dada la ecuación lineal con dos incógnitas 2*x* − 3*y* = 6, añade una ecuación lineal con dos incógnitas para que el sistema resultante sea:

***a)* Compatible determinado.**

***b)* Compatible indeterminado.**

c) **Incompatible.**

a) Por ejemplo, basta añadir la ecuación $x+2y=3$. Resulta así el siguiente sistema compatible determinado:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y=6 \\ x+2y=3 \end{aligned}\right\} \qquad x=3, \quad y=0$$

b) Basta añadir una ecuación multiplicada por un número real, por ejemplo, $4x-6y=12$. Así el sistema compatible indeterminado es:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y=6 \\ 4x-6y=12 \end{aligned}\right\} \qquad x=\lambda, \quad y=\frac{2}{3}\lambda-2$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

c) Por ejemplo, añadiendo una ecuación en la que multiplicamos por dos números reales distintos los coeficientes y el término independiente. Por ejemplo, $4x-3y=8$. Así, resulta el siguiente sistema incompatible:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y=6 \\ 4x-3y=8 \end{aligned}\right\} \text{ No tiene solución.}$$

4. Escribe en notación matricial estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x=2 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+z=3 \\ x+z=-1 \end{cases}$. ***c)*** $\begin{cases} x+z=1 \\ x-y=3 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Escribe los sistemas que tienen por matrices ampliadas:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{array}\right)$ ***b)*** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right)$ ***c)*** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$

a) $\begin{cases} 2x++y=0 \\ 3x+4y=-5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3y+\ \ z=0 \\ 3x+\qquad 2z=-3 \\ 4x-3y+2z=11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ 3x+2y-\ \ z=1 \end{cases}$

6. **Estudia si estos sistemas de ecuaciones son equivalentes:**

a) $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 2x-\ \ y=1 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

a) $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 2x-\ \ y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 3x+\ \ y=9 \end{cases}$

El sistema *a)* tiene por solución $x = 2$ e $y = 3$, que es la misma que el sistema *b).* Por tanto, ambos sistemas son equivalentes.

2. Resolución mediante la matriz inversa

7. **Utiliza la matriz inversa para resolver estos sistemas:**

a) $\begin{cases} 3x+4y=3 \\ 5x+6y=7 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} x+6y-3z=-1 \\ 4x+2y-4z=12 \\ x+y+5z=15 \end{cases}$ ***d)*** $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+z=2 \\ 4x+y+3z=-1 \end{cases}$

a) La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad |A| = -2 \neq 0$$

Por tanto, existe A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = 5$, $y = -3$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 5 \neq 0 \Rightarrow \exists\ A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 5$, $y = 3$.

c) La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad |A| = -136 \neq \exists A^{-1}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{136}\begin{pmatrix} -14 & 33 & 18 \\ 24 & -8 & 8 \\ -2 & -5 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{136}\begin{pmatrix} -14 & 33 & 18 \\ 24 & -8 & 8 \\ -2 & -5 & 22 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = 5,\ y = 0,\ z = 2$$

d) La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&0&1\\4&1&3\end{pmatrix},\quad |A|=5\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&9&-3\\-2&3&-1\\2&-13&6\end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&9&-3\\-2&3&-1\\2&-13&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\-6\end{pmatrix}$$

Luego, x = 4, y = 1, z = 6 es la solución del sistema.

8. **¿Es posible resolver estos sistemas utilizando la matriz inversa de la matriz de coeficientes? Razona tu respuesta.**

a) $\begin{cases}3x+6y=6\\2x+4y=1\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+3z=2\\x-y=1\\x-2y-3z=0\end{cases}$

a) La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A=\begin{pmatrix}3&6\\2&4\end{pmatrix}\quad |A|=0$$

Como $|A|=0$, entonces no existe A^{-1} y, en consecuencia, no es posible resolver este sistema utilizando la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

b) La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&-1&0\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

$$|A|=3-6+3=0$$

Por tanto, no existe A^{-1} y no es posible resolver este sistema utilizando la matriz inversa.

3. Sistemas de ecuaciones escalonados

9. **Dado el sistema** $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ \quad y + z = -2 \end{cases}$ **añade una ecuación que tenga como única incógnita *z* para que este quede en forma escalonada y tenga por única solución (*x, y, z*) = (1, 0, −2).**

Una posible solución es:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ \quad y + z = -2 \\ \quad\quad z = -2 \end{cases}$$

10. **Resuelve los siguientes sistemas escalonados:**

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ \quad 2y - z = 0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ \quad 2y + 3z = -21 \\ \quad\quad z = 5 \end{cases}$

a) La matriz ampliada del sistema es:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

que está en forma escalonada por filas, y, por tanto, el sistema es escalonado. Como rg(*A*) = 2 y el número de incógnitas *n* = 3, entonces el número de parámetros es 3 -2 = 1.

Por tanto, haciendo, por ejemplo $z = \lambda$, entonces

$$y = \frac{\lambda}{2}$$

Despejando x de la primera ecuación resulta:

$$x = \frac{-3}{4}\lambda + \frac{1}{2}$$

La solución es: $(x, y, z) = \left(\frac{-3}{4}\lambda + \frac{1}{2}, \frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

b) De la tercera ecuación *z* = 5. Sustituyendo este valor en la segunda, resulta *y* = -3.

Finalmente, sustituyendo estos dos valores en la primera ecuación queda *x* = 0.

Por tanto, la solución es: *x* = 0, *y* = -3, *z* = 5.

Es decir, $(x, y, z) = (0, -3, 5)$.

11. Transforma estos sistemas en equivalentes escalonados:

a) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+z=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 2x+y=1 \\ y-z=2 \\ 2y=4 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} 2x+3y-4z=9 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$

a) La matriz ampliada del sistema, es:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Obtengamos una matriz en forma escalonada por filas equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 4F_3-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Por tanto, un sistema equivalente escalonado es:

$$\begin{cases} x+2y-\ z=0 \\ \quad -4y+3z=1 \\ \qquad\quad -z=9 \end{cases}$$

Comprueba que la solución es: $(x,y,z)=(5,-7,-9)$.

b) La matriz ampliada del sistema es:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Luego,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3-2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Un sistema equivalente escalonado es:

$$\begin{cases} 2x+y \qquad =1 \\ \qquad y-\ z=2 \\ \qquad\quad 2z=0 \end{cases}$$

La solución es: $(x,y,z)=\left(-\dfrac{1}{2},2,0\right)$

c) La matriz ampliada del sistema es:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Luego, $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to 2F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \end{array}\right)$

Un sistema equivalente en forma escalonada es:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 9 \\ \quad - \quad y + 8z = -1 \end{cases}$$

La solución es: $(x, y, z) = (-10\lambda, 8\lambda + 1, \lambda) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$

12. **Encuentra una matriz ampliada equivalente en forma escalonada del sistema en notación matricial:** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**.**

El sistema es:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Así, la matriz ampliada es:

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Encontremos, pues, una matriz equivalente.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 4F_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Comprueba que el sistema no tiene solución.

4. Método de eliminación de Gauss

13. **Resuelve por el método de Gauss los sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \\ 5x - 7y + 8z = 9 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 6 \end{cases}$

a) Partimos de la matriz ampliada y realizamos transformaciones hasta obtener una forma escalonada por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & 8 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 8 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 25 & 50 \end{array}\right)$$

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ -7y + 3z = -1 \\ 25z = 50 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 1,\ z = 2$$. Es un sistema compatible determinado.

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -8 & 10 & -18 \end{array}\right)$$

Por tanto, el sistema equivalente escalonado es:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ -8y + 10z = -18 \end{cases}$$

Haciendo $z = \lambda$, entonces en la segunda ecuación resuelta $y = \frac{5}{4}\lambda + \frac{9}{4}$.

De la primera ecuación deducimos que $x = \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}$.

El sistema es compatible indeterminado y tiene por solución:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}, \frac{5}{4}\lambda + \frac{9}{4}, \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

14. Un examen tipo test de 30 preguntas se califica así: cada respuesta correcta suma un punto, cada incorrecta resta medio y las no contestadas ni suman ni restan. Si un estudiante obtiene 17,5 puntos y tiene tantas respuestas erróneas como no contestadas, ¿cuántas respondió correctamente?

Sean x = número de respuestas correctas.

y =0 número de respuestas incorrectas.

z = número de respuestas no contestadas.

De esta manera tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{pmatrix} x+y+z=30 \\ x-0{,}5y \quad =17{,}5 \\ y \quad = z \end{pmatrix}\right. \begin{matrix} \leftarrow \text{Total de preguntas} \\ \leftarrow \text{Puntuación obtenida} \\ \leftarrow \text{Relación entre respuestas erróneas y no contestados} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & -0{,}5 & 0 & 17{,}5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & -1{,}5 & -1 & -12{,}5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1{,}5 & -1 & -12{,}5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 + 1{,}5F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & -12{,}5 \\ 0 & 1 & -2{,}5 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, $\begin{cases} x+y+z=30 \\ y-z=0 \\ -2{,}5z=-12{,}5 \end{cases} \Rightarrow x=20, \quad y=5, \quad z=5$.

Respondió correctamente 20 preguntas.

5. Sistemas de ecuaciones homogéneos

15. Resuelve mediante el método de Gauss los sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 6x-2y+4z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x+3y-z=0 \\ 8x+3y-z=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ ***d)*** $\begin{cases} x-2y-4z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

a) La matriz de coeficientes es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 3F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado equivalente es:

$$x + 2y = 0$$

Haciendo $y = \lambda$, entonces $x = -2\lambda$.

El sistema es comparable indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones (incluida la trivial) y son de la forma:

$$(x,y)=(-2\lambda,\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

b) La matriz de coeficientes y las sucesivas transformaciones hasta obtener una forma escalonada vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 + 6F_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ \quad 5y-z=0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, haciendo $z=\lambda$, tenemos que $y=\frac{1}{5}\lambda$. Y, sustituyendo estos valores en la primera ecuación, resulta $x=-\frac{3}{5}\lambda$.

El sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones (incluida la trivial) y son de la forma:

$$(x,y,z)=\left(-\frac{3}{5}\lambda,\frac{1}{5}\lambda,\lambda\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 8 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to 2F_3 - F_1}]{} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 4x+3y-z=0 \\ \quad -3y+z=0 \\ \qquad 2z=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=0$$

El sistema es compatible determinado, es decir, solo tiene la solución trivial.

$(x,y,z)=(0,0,0)$

d) La matriz inicial y las sucesivas transformadas figuran a continuación.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to 5F_3 - 3F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-2y-4z=0 \\ \quad y+\ z=0 \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$(x,y,z)=(3\lambda-\lambda,\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R}$

16. Resuelve el sistema homogéneo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -\ \ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

El sistema solo tiene la solución trivial.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

17. **Prueba que el sistema homogéneo** $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + ky + z = 0 \end{cases}$ **tiene solución distinta de la trivial para todo** $k \in \mathbb{R}$**.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & k-2 & 2 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x + 2y - \ \ z = 0 \\ (k-2)y + 2z = 0 \end{cases}$$

- Si $k = 2$, entonces $z = 0$. Haciendo $y = \lambda$, tenemos que $x = -2\lambda$. Es decir:

$$(x, y, z) = (-2\lambda, \lambda, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Si $k \neq 2$, entonces haciendo $z = \lambda$, tenemos que

$$y = \frac{-2\lambda}{k-2}. \text{ Y, por tanto, } x = \frac{k+2}{k-2}\lambda.$$

- Luego,

$$(x, y, z) = \left(\frac{k+2}{k-2}\lambda, \frac{-2\lambda}{k-2}, \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Por tanto, $\forall k \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución distinta de la trivial, es decir, infinitas soluciones (incluyendo la trivial).

6. Regla de Cramer

18. **¿Se puede aplicar la regla de Cramer al siguiente sistema?** $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 6x-y=3 \end{cases}$ **En caso afirmativo, aplícala.**

La matriz de coeficientes es:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A|=-20\neq 0$$

Como $|A|\neq 0$ y el número de ecuaciones y de incógnitas coincide, sí es un sistema de Cramer.

Por tanto,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-20}=\frac{-13}{-20}=\frac{13}{20}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{-20}=\frac{-18}{-20}=\frac{9}{10}$$

19. **Resuelve, si es posible, mediante la regla de Cramer:**

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+z=3 \\ x+7y+z=2 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+z=1 \\ 4x-y+5z=5 \end{cases}$

a) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}=6\neq 0\,.$$

Luego, sí es posible aplicar la regla de Cramer. Así:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{6}{6}=A\ , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{0}{6}=0\ , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}}{6}=\frac{6}{6}=1$$

b) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0\,.$$ Por tanto, no se trata de un sistema de Cramer.

7. Teorema de Rouché-Fröbenius

20. Discute si los sistemas cuya matriz ampliada se da son sistemas incompatibles, sistemas compatibles determinados o sistemas compatibles indeterminados. Resuélvelos siempre que sea posible.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$ *b)* $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ *c)* $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

En la forma escalonada por filas, tanto la matriz de coeficientes como la ampliada tienen tres filas no nulas. Por tanto,

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado (solución única).

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 0 \\ \quad -y + z = 0 \\ \quad\quad z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 1,\ z = 1$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

En la forma escalonada por filas, tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada tienen dos filas no nulas. Por tanto,

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) dependiente de 3 -2 = 1 parámetros.

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x + y - \ \ z = 1 \\ \quad -y + 2z = 1 \end{cases}$$

Haciendo $z=\lambda$, entonces $y=2\lambda-1$ y $x=-\lambda+2$. La solución es:

$(x,y,z)=(-\lambda+2,2\lambda-1,\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-3F_1]{F_2\to F_2+4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to 3F_3+2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Como la matriz escalonada por fila tiene dos filas no nulas, entonces $\operatorname{rg}(A)=2<3$ y el sistema homogéneo es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones, incluyendo la trivial.

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ \quad y+\ \ z=0 \end{cases} \qquad (x,y,z)=(-\lambda,-\lambda,\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

21. **Se da un sistema incompatible con tres ecuaciones y dos incógnitas:**

a) **¿Se puede suprimir una ecuación para que el sistema resulte compatible determinado?**

b) **Pon ejemplos.**

c) **¿Se puede suprimir una ecuación y lograr que así también resulte incompatible? Da algún ejemplo.**

a) Sí es posible. Por ejemplo, el sistema

$\begin{cases} 3x-\ \ y=3 \\ x+2y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$ es compatible determinante con solución $(x,y)=(1,0)$

b) Sí es posible. Por ejemplo, partiendo del mismo sistema incompatible del apartado anterior, podemos obtener el sistema

$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$ que es incompatible.

8. Sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro

22. **Discute los sistemas para los diferentes valores de *a*.**

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+ay=1 \\ x+az=1 \\ y+z=a \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x+3y-2z=-3 \\ 3x-y+z=2 \\ ax+2y-z=-1 \end{cases}$

a) Las matrices de coeficientes y ampliadas son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2a \end{array}\right) \quad ; \quad |A| = 2a - 4.$$

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

- Si $a \neq 2$, entonces $|A| \neq 0$, y el rango de la matriz de coeficientes y ampliada coinciden entre sí y con el número de incógnitas. Es decir,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$$

El sistema es compatible determinado.

- Si $a = 2$, entonces $|A| = 0$ y veamos cuáles son los rangos de A y A^*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$

b) Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \quad ; \quad |A| = -2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

- Si $a \neq 0$, entones $|A| \neq 0$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. Por tanto, el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 0$, entonces $|A| = 0$, entonces $|A| = 0$ y veamos cuáles son los rangos de A y A^*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ a & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad ; \quad |A| = a - 4.$$

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad a - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4.$$

- Si $a \neq 4$, entonces $|A| \neq 0$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 4$, entonces $|A| = 0$. Veamos cuáles son los rangos de A y A^*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

La 3ª fila es la suma de las otras dos. Por tanto, como por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

23. **¿Para qué valores del parámetro *k* tienen solución distinta de la trivial estos sistemas? Resuélvelo en esos casos.**

a) $\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 3x - y + z = 2 \\ ax + 2y - z = -1 \end{cases}$

a) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2$$

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -1 \text{ y } k = 2$$

Por tanto,

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, entonces rg(*A*) = 3 y el sistema es compatible determinado que tienen la solución trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- Si *k* = -1

  Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

  Entonces, $rg(A) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones dependiente de 3 – 2 = 1 parámetros.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

  Haciendo $z = \lambda$, entonces $x = \lambda,\ y = 0$. Es decir, $(x, y, z) = (\lambda, 0, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

- Si *k* = 2. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.

  Luego, $rg(A) = 2 < 3$ y el sistema tiene infinitas soluciones dependiente de 3 -2 = 1 parámetro, es decir, es un sistema compatible indeterminado (con solución distinta de la trivial).

Un sistema equivalente al dado está formado por las dos primeras ecuaciones que dan el menor no nulo. Así:

$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-\ \ y+z=0 \end{cases}$ Haciendo $x = t$, entonces $y = 3t$, $z = -5t$

Es decir, $(x,y,z)=(t,-2t,-5t),\quad t\in\mathbb{R}$

b) El sistema tiene 2 ecuaciones y 3 incógnitas. La matriz de coeficientes es:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\to F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & k-2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(M)=2<3,\ \forall k\in\mathbb{R}$, puesto que tiene dos filas no nulas en la matriz equivalente. Por tanto, siempre es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependiendo de 3 – 2 = 1 parámetro.

$$\begin{cases} x+2y-\ z=0 \\ (k-2)+2z=0 \end{cases}$$

- Si $k\neq 2,\quad z=\lambda,\quad y=\dfrac{-2}{k-2}\lambda,\quad x=\dfrac{k+2}{k-2}\lambda$

  Esto es:

$$(x,y,z)=\left(\frac{k+2}{k-2}\lambda,\frac{-2}{k-2}\lambda,\lambda\right),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

- Si $k = 2$, entonces $z = 0$, $y = t$, $x = -2t$.

  Es decir:

$$(x,y,z)=(-2t,t,0),\ t\in\mathbb{R}$$

c) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & -k & 0 \end{vmatrix}=-4k^2-4k-4$$

$|A|=0\Rightarrow -4k^2-4k-4=0\Rightarrow k^2+k+1=0$

No se anula para ningún valor de k. Luego, $|A|\neq 0,\ \forall k\in\mathbb{R}$ y, por tanto, el sistema siempre es compatible determinado y tiene la solución trivial $(x,y,z)=(0,0,0),\ \forall k\in\mathbb{R}$.

$$\text{rg}(A)=3,\ \forall k\in\mathbb{R}$$

24. Discute los siguientes sistemas en función de los valores del parámetro *k*.

$$a)\begin{cases} x+ky+z=1 \\ kx+y+(k-1)z=k \\ x+y+z=k+1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+kz=1 \\ x+(k+1)y+z=k^2-4 \end{cases}$$

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & k-1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \end{array}\right) \quad ; \quad |A| = -k+1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k+1=0 \Rightarrow k=1$$

- Si $k \neq 1$, entonces $|A| \neq 0$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, luego, el sistema es compatible determinado.
- Si k = 1, veamos cuáles son los rangos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$ y, por tanto, el sistema es incompatible.

b) Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array}\right); \quad |A| = -k^2+4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2+4=0 \Rightarrow k=-2 \text{ y } k=2$$

- Si $k \neq -2$ y $k \neq 2$, entonces $|A| \neq 0$ y, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- Si k = -2 o k = 2, veamos cuáles son los rangos de A y A^*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 & k^2-4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 2F_3 - (k+2)F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2+4 & k^2-k-6 \end{array}\right)$$

$$-k^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad k=-2 \text{ y } k=2$$

$$k^2-k-6=0 \quad \Rightarrow \quad k=-2 \text{ y } k=3$$

En consecuencia,

Si k =2, entonces rg(A) = rg(A^*) = 2 < 3 y el sistema es compatible indeterminado.

Por otro lado, si $k = 2$ entonces rg(A) = 2 y rg(A^*) = 3, luego el sistema es incompatible.

25. Resuelve los sistemas que aparecen en la actividad 24 siguiendo estas pautas:

a) **Para $k = 3$ en el caso del sistema *a)*.**

b) **Para $k = -2$ en el caso del sistema de la opción *b)*.**

Para $k = 3$ el sistema del apartado *a)* es:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

Como $k = 3 \neq 1$, hemos visto que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo aplicaremos el método de Gauss. Así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 4F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ -8y-z=0 \\ z=12 \end{cases} \Rightarrow \quad z=12,\ y=\frac{-3}{2},\ x=\frac{-13}{2}$$

Es decir, la solución es: $(x,y,z)=\left(\frac{-13}{2},\frac{-3}{2},12\right)$

Por otro lado, para $k = -2$ el sistema del apartado *b)* es:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Hemos visto en la actividad 24 que para $k = -2$ teníamos que rg(A) = rg(A^*) = 2 < 3 y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado dependiente de 3 – 2 = 1 parámetros.

Como la primera y tercera ecuación son iguales, entonces un sistema equivalente al propuesto es:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2z=1 \end{cases}$$

Haciendo $z = 1$, entonces $x = \lambda + 1/2,\quad y = 2\lambda + 1/2$

La solución es: $(x,y,z)=\left(\lambda+1/2, 2\lambda+1/2, \lambda\right)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

9. Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones

26. Concierto. Una empresa va a organizar un concierto en una sala multiusos con 2000 asientos disponibles. Desea dividir la sala en tres secciones cuyos precios sean de 30,50 y 80 €. Si la empresa desea ingresar en total 92 000 € por la venta de localidades y que el número de butacas más baratas vendidas sea igual a la suma del resto, ¿cuántas butacas de cada tipo debe poner a la venta?

Designamos por *x, y, z,* el número de localidades vendidas cuyo precio son, respectivamente, 30, 50 y 80 €.

Con los datos del enunciado obtenemos el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+z=2000 & \leftarrow \text{Total de butacas} \\ 30x+50y+80z=92000 & \leftarrow \text{Ingresos por venta} \\ x=y+z & \leftarrow \text{Relación entre tipos de butacas} \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de *x* de la tercera ecuación en la primera, resulta:

$$y+z+y+z=2000 \Rightarrow y+z=1000$$

Despejando y, queda: $y = 1000-z$

Luego, $x = 1000$ e $y = 1000 - z$. Sustituyendo en la segunda ecuación estos dos valores, resulta: $z = 600$. Por tanto, deberá poner a la venta 1000 butacas de 30 €, 400 butacas a 50 € y 600 butacas de 80 €. Es decir:

$$x=1000, \quad y=400, \quad z=600$$

27. Investigación de mercado. En un estudio de mercado, 500 participantes han probado tres cafés diferentes, *A, B* y *C,* y han escogido el que más les ha gustado. Se sabe que el producto *B* lo han elegido el doble de personas que el producto *A,* y que el producto *B*, 32 personas más que los productos *A* y *C* juntos. Calcula cuántas personas han escogido cada producto

Consideremos las variables x, y, z que representan el número de participantes que escogen los productos A, B y C, respectivamente.

Entonces,

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ y=2x \\ y=x+z+32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=500 \\ -2x+y \quad = \quad 0 \\ -x+y-z= \quad 32 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 32 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3+F_1]{F_2 \to F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 3 & 2 & 1000 \\ 0 & 2 & 0 & 532 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 3F_3-2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 3 & 2 & 1000 \\ 0 & 0 & -4 & -404 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z= \ \ 500 \\ 3y+2z=1000 \\ -4z=-404 \end{cases}$$

Que tiene por solución: x = 133, y =266, z = 101. Por tanto, 133 participantes en el estudio han elegido el café A, 266 el B y 101 el C.

28. **Rosa y Jacinto desean adornar su casa y para ello deciden adquirir tres tipos de plantas, de 7, 10 y 13 €, respectivamente. Si estiman que podrán colocar 15 macetas y se quieren gastar 150 €, ¿qué opciones tienen para hacerlo?**

Sean x, y, z el número de plantas que compran a 7, 10 y 13 €, respectivamente. $(x, y, z \geq 0,\ x, 1, z \in Z)$. De este manera tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+\quad y+\quad z=15 & \leftarrow \text{Total de macetas} \\ 7x+10y+13z=150 & \leftarrow \text{Gastos totales} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 10 & 13 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2-7F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 6 & 45 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\ \ z=15 \\ y+2z=15 \end{array}\right\}$$

Haciendo $z=\lambda$, entonces $y=-2\lambda+15$. Sustituyendo esto valores en la primera ecuación resulta $x=\lambda$.

Luego,

$$(x,y,z)=(\lambda,-2\lambda+15,\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es compatible indeterminado y, por tanto, tiene más de una solución (no infinitas), porque los valores que pueden formarse han de ser mayores o iguales que cero y enteros.

Luego,

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x, y, z \in Z\,.$$

Por tanto,

$$\lambda \geq 0 \;\; y \;\; -2\lambda + 15 \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq 7{,}5$$

Es decir: $0 \leq \lambda \leq 7, \quad \lambda \in Z$

Todos las posibles operaciones de compra de Rosa y Jacinto se dan en la siguiente tabla:

λ	x	y	z
0	0	15	0
1	1	13	1
2	2	11	2
3	3	9	3
4	4	7	4
5	5	5	5
6	6	3	6
7	7	1	7

29. Fondos de inversión. Una entidad financiera dispone de dos fondos de inversión para sus clientes:

- **Un fondo *A* cuya rentabilidad es del 3 % anual.**
- **Un fondo *B*, de mayor riesgo, que ofrece una rentabilidad del 5 % anual.**

Los clientes pueden repartir sus inversiones entre los dos fondos para lograr una rentabilidad total comprendida entre el 3 y el 5 %. Sin embargo, cuanto mayor sea la rentabilidad, mayor será el riesgo. ¿Cómo debe realizar la selección cada cliente reflejado en la tabla para lograr el rendimiento indicado?

	Cliente 1	**Cliente 2**	**Cliente 3**	**Cliente *k***
Inversión total (€)	10 000	50 000	30 000	k_1
Rentabilidad anual (€)	300	2250	1200	k_2

Si designamos por *x* e *y* las cantidades invertidas en € en los fondos *A* y *B*, respectivamente, entonces tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + \qquad\quad = K_1 & \leftarrow \text{ Inversión total del cliente } k \\ 0{,}03x + 0{,}05y = k_2 & \leftarrow \text{ Rentabilidad anual del cliente } k \end{cases}$$

Este sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x + \ \ y = k_1 \\ 3x + 5y = 100k_2 \end{cases}$$

O en notación matricial,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 100k_2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de *A* es:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ 100k_2 \end{pmatrix}$$

Es la solución de inversión para un cliente *k*.

Por tanto,

- Cliente 1 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10\ 000 \\ 30\ 000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\ 000 \\ 0 \end{pmatrix}$

  El cliente 1 debe invertir los 10 000 € en el fondo *A*.

- Cliente 2 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50\ 000 \\ 225\ 000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\ 500 \\ 37\ 500 \end{pmatrix}$

  El cliente 2 deberá invertir 12 500 € en el fondo *A* y 36 500 € en el fondo *B*.

- Cliente 3 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30\ 000 \\ 120\ 000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\ 000 \\ 15\ 000 \end{pmatrix}$

  El cliente 3 invertirá 15 000 € tanto en el fondo *A* como en el fondo *B*.

Actividades

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales

30. Halla todas las soluciones de las ecuaciones:

a) **$2x + 6y = 6$**

b) **$2x - y + 2z = 4$**

a) La ecuación $2x+6y=6$ tiene dos incógnitas. Haciendo, por ejemplo, $y=\lambda$, entonces

$$2x+6\lambda=6 \quad\Rightarrow\quad 2x=6-6\lambda \quad\Rightarrow\quad x=-3\lambda+3$$

La solución tiene la forma: $(x,y)=(-3\lambda+3,\lambda)$

$$\lambda\in\mathbb{R}$$

b) La ecuación $2x-y+2z=4$ tiene tres incógnitas. Así, haciendo, por ejemplo, $z=\lambda$ e $y=\mu$, entonces

$$2x-\mu+2\lambda=4 \quad\Rightarrow\quad 2x=4-2\lambda+\mu \quad\Rightarrow\quad x=-\lambda+\frac{1}{2}\mu+2$$

Por tanto, la solución es:

$$(x,y,z)=\left(-\lambda+\frac{1}{2}\mu+2,\mu,\lambda\right),$$

$$\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

31. **Sea $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&-1&-1\\2&0&-1\end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ la matriz de términos independientes. Escribe las tres ecuaciones que forman el sistema.**

$$AX=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\3&-1&-1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+y-z=1\\3x-y-z=1\\2x-z=1\end{cases}, \quad \text{siendo } X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

32. **Escribe los siguientes sistemas en notación matricial:**

a) $\begin{cases}2x+y=0\\-x+y=2\end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases}2x+y-3z=1\\x-4y+2z=2\end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases}x+y=2\\y+z=3\\x-y-z=5\end{cases}$

a) $\begin{cases}2x+y=0\\-x+y=2\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

b) $\begin{cases}2x+y-3z=1\\x-4y+2z=2\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}2&1&-3\\1&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} x+y \quad\quad = 2 \\ \quad\; y+z=3 \\ x-y-z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Resolución de sistemas mediante la matriz inversa

33. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) AX + B = C

b) XA + B = C

a) $AX+B=C \Rightarrow AX=C-B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(C-B) \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}(C-B) \Rightarrow X=A^{-1}(C-B)$

Calculemos, pues, la matriz inversa de A.

$$|A| = 10,\ \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$$

b) $XA+B=C \Rightarrow XA=C-B \Rightarrow (XA)A^{-1}=(C-B)A^{-1} \Rightarrow X(AA^{-1})=(C-B)A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow XI=(C-B)A^{-1} \Rightarrow X=(C-B)A^{-1}$

Por tanto,

$$x = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 13 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$$

34. Resuelve la ecuación matricial *AX* + *B* = *C* para:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AX+B=C \Rightarrow AX=C-B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(C-B) \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}(C-B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow IX=A^{-1}(C-B) \Rightarrow X=A^{-1}(C-B)$$

Calculemos la matriz inversa de A.

$$|A| = -6$$
$$A_{11} = 0,\quad A_{12} = 0,\quad A_{13} = -2,\quad A_{21} = 0,\quad A_{22} = -6$$
$$A_{23} = 2,\quad A_{31} = -3,\quad A_{32} = 3,\quad A_{33} = -1$$

Luego,

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix},\quad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$x = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 21 & 24 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$$

35. **Una ecuación matricial $AX = B$, donde A es una matriz cuadrada de orden 3, tiene por solución $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$. ¿Cuál será la nueva solución si se intercambian la primera y la tercera columna de la matriz A?**

La nueva solución será $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, es decir, se intercambian los valores de x y z.

36. **Utiliza la matriz inversa de la matriz de coeficientes para resolver este sistema:** $\begin{cases} x + z = 2 \\ x - y = -3 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$

La matriz de coeficientes del sistema es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad |M| = -1 - 1 + 3 = 1 \neq 0$$

Por tanto, sí existe M^{-1}.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$MX = B \Rightarrow X = M^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es:

$x = 2,\quad y = 5,\quad z = 0$

37. Utiliza la matriz inversa de la matriz de coeficientes para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes de términos independientes son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

AX = B, luego X = A^{-1}B

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

La solución es x = 5, y = -3, z = - 7.

38. **Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+3y+4z=2 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$$

a) Exprésalo en notación matricial.

b) Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

c) Utiliza la matriz inversa para resolver el sistema.

d) ¿Cómo varía la solución si los términos independientes cambian a 1, –4 y –3 respectivamente?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Si A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Si AX = B, entonces X = A^{-1}B. Así pues:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

luego x = 0 , y = 2, z = -1.

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$

luego x = -1 , y = 2, z = -2.

Sistemas escalonados

39. Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} x+y \quad\;\; = 2 \\ \quad y+z = 3 \\ \quad\;\; 2z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y+z = 3 \\ \quad 2y+z = 1 \end{cases}$

a) De la tercera ecuación, obtenemos:

$$2z = 4 \Rightarrow z = 2$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación resulta:

$$y - 2 = 3 \Rightarrow y = 1$$

Finalmente, sustituyendo estos dos valores en la primera ecuación, tenemos:

$$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$$

La solución del sistema es: $x = 1,\ y = 1,\ z = 2$

b) $\begin{cases} x+2y+z = 3 \\ \quad 2y+z = 1 \end{cases}$

Como hay dos ecuaciones y tres incógnitas el sistema es compatible indeterminado con 3-2 = 1 parámetro. Así, haciendo $z = \lambda$, en la segunda ecuación obtenemos $y = \frac{-\lambda+1}{2}$. Y, sustituyendo, estos dos valores en la primera ecuación tenemos:

$$x - \lambda + 1 + \lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

La solución de este sistema es:

$$x = 2, \quad y = \frac{-\lambda+1}{2}, \quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

40. Cada una de las siguientes matrices ampliadas corresponde a matrices equivalentes en la forma escalonada por filas. Halla, en cada caso, la solución del sistema correspondiente.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ *b)* $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *c)* $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

a) Se trata de un sistema compatible determinado que tiene por solución:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{5}{8}, \quad z = \frac{1}{2}$$

b) Es un sistema incompatible.

c) Es un sistema compatible determinado que tiene por solución:

$$x = -1, \qquad y = 2$$

Método de eliminación de Gauss

41. Aplica el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + 5y - 3z = 4 \\ -2x + 3y + 4z = 7 \\ 6x - 4z = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ 3x + y - z = 7 \end{cases}$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & |7 \\ 6 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3\to F3-6F1]{F2\to F2+2F1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 13 & -2| & 15 \\ 0 & -30 & 14 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3\to 13F3+30F2]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 13 & -2\,| & 15 \\ 0 & 0 & 122 & 151 \end{pmatrix}$$

$$z = \frac{151}{122}, y = \frac{82}{61}, z = \frac{121}{122}$$

Es un sistema compatible determinado.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & |1 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3\to F3-3F1]{F2\to F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3| & 1 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3\to 2F3-5F2]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3| & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$z = 9, y = 7, z = 3$$

Es un sistema compatible determinado.

42. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss:

a) $\begin{cases} 4x-8y+7z=2 \\ 4x-8y+7z=2 \\ 2x-4y+3z=-5 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y-4z=6 \\ 3x+6y-9z=15 \\ 2x+4y-6z=10 \end{cases}$

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 & 2 \\ 4 & -8 & 7| & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3\to 2F3-F1]{F2\to F2-F1} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0\,| & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{pmatrix}$$

$$z = 12$$

$4x - 8y + 7z = 2$, luego $y = \frac{1}{2}x + \frac{41}{4}$.

Haciendo: $x = \lambda$, $y = \frac{1}{2}\lambda + \frac{41}{4}$. z = 12, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es un sistema compatible indeterminado.

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & -9| & 15 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3\to F3-F1]{F2\to 2F2-3F1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -6| & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3\to 3F3-F2]{} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -6| & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$3y - 6z = 12$, luego $y = 4 + 2z$; x = -3 – z

Haciendo: $z = \lambda, y = 4 + 2\lambda$. x = -3 – λ, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es un sistema compatible indeterminado.

43. La suma de tres números es 17. Y, además, la suma de dos veces el primero, 3 veces el segundo y 4 veces el tercero es 46. Sabiendo que el primero es la mitad del tercero, encuentra los tres números.

Sean x, y, z el primer, segundo y tercer número, respectivamente. Del enunciado deducimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=17 \\ 2x+3y+4z=55 \\ x=\frac{1}{2}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=17 \\ 10x+3y=55 \end{cases} \xrightarrow[E2\to 3E2-10E1]{} \begin{cases} 3x+y=17 \\ -y=-5 \end{cases} \Rightarrow y=5, x=4$$

La solución es x = 4, y = 5, z = 8.

44. Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$

a) **Añade una tercera ecuación con dos incógnitas de manera que el sistema resultante sea incompatible.**

b) **¿Es posible añadir una tercera ecuación con dos incógnitas de modo que el sistema resultante sea compatible indeterminado?**

El sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$ es compatible determinado con solución $x = 2$, $y = 2$.

a) Basta añadir una ecuación que no verifique la solución anterior. Por ejemplo:

$$+2x + 3y = 1$$

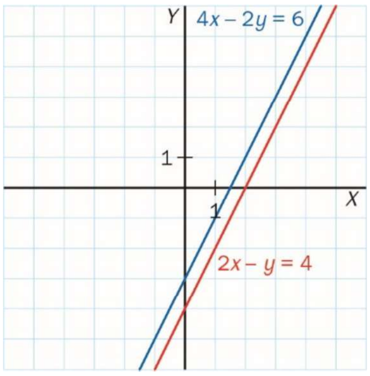
b) No es posible puesto que el sistema dado es compatible determinado.

45. Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y realiza su representación gráfica.

a) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 6x+2y-z=4 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$

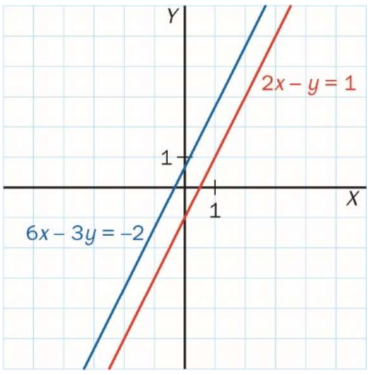
a) $\begin{cases} 3x-\ \ y=\ \ 8 \\ \ \ x+4y=-6 \end{cases}$ Es un sistema compatible determinado con solución $x = 2$, $y = -2$.

Gráficamente representan a dos rectas con el plano que se cortan en el punto (2,-2).



b) $\begin{cases} 2x - \ \ y = \ \ 1 \\ 6x - 3y = -2 \end{cases}$ Es un sistema incompatible.

Representan gráficamente a dos rectas en el plano que son paralelas.



46. **Aplica el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x + z - y = 13 \\ y + z - x = 7 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$

a) La matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 36 \\ 1 & -1 & 1 & 13 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 36 \\ 0 & -2 & 2 & -23 \\ 0 & 2 & 0 & 43 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 36 \\ 0 & -2 & 2 & -23 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x + y - z = 36 \\ -2y + 2z = -23 \\ 2z = 20 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{49}{2}, \quad y = \frac{43}{2}, \quad z = 10$$

b) La matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to 2F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 27 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 5F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 27 \\ 0 & 0 & 29 & 145 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -y + 6z = 27 \\ 29z = 145 \end{cases}$$

Y tiene por solución: $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$.

47. **Dado el sistema: $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$, ¿es posible añadir una ecuación de tal forma que el sistema resultante sea compatible indeterminado?**

El sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ tiene por matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 0 = -2 \end{cases} \text{ que es incompatible.}$$

Por tanto, no es posible añadir una ecuación el sistema resultante compatible indeterminado.

48. **Halla tres enteros positivos que cumplan estas condiciones:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 9} \\ \boldsymbol{x + 5y + 10z = 44} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 35 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z=\ \ 9 \\ 4y+9z=35 \end{array}\right\}$$

Haciendo, $z=\lambda$, entonces $y=\dfrac{-9\lambda+35}{4}$ y $x=\dfrac{5\lambda+1}{4}$.

Luego,

$$(x,y,z)=\left(\frac{5\lambda+1}{4},\frac{-9\lambda+35}{4},\lambda\right),\lambda\in\mathbb{R}$$

Pero la solución tiene que ser números enteros positivos, entonces:

$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ y, además, $x,y,z\in Z$.

Así:

$$\begin{cases} \dfrac{5\lambda+1}{4}\geq 0\Rightarrow 5\lambda+1\geq 0\Rightarrow \lambda\geq -\frac{1}{5} \\ \dfrac{-9\lambda+35}{4}\geq 0\Rightarrow -9\lambda+35\geq 0\Rightarrow \lambda\leq \frac{35}{9} \\ \lambda\geq 0 \end{cases}$$

Luego, $0\leq\lambda\leq\frac{35}{9}$ y $\lambda\in Z$.

Es decir, $\lambda=0,\ \lambda=1,\ \lambda=2$ o $\lambda=3$.

- Si $\lambda=0$, entonces $x=\frac{1}{4},\ldots\leftarrow$ no sirve.
- Si $\lambda=1$, entonces $x=\frac{3}{2},\ldots\leftarrow$ no sirve.
- Si $\lambda=2$, entonces $x=\frac{11}{4},\ldots\leftarrow$ no sirve.
- Si $\lambda=3$, entonces $x=4,\ y=2,\ z=3\leftarrow$ sí es solución.

Por tanto, los tres números buscados son:

$$x = 4,\ y = 2,\ z = 3.$$

49. Comprueba que este sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas es compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de dos parámetros. ¿Qué ocurriría si en la segunda ecuación el término independiente fuera 0?

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, el sistema equivalente escalonado obtenido en la ecuación siguiente:

$$x + y + z = 1$$

Haciendo, por ejemplo, $x = \lambda$ e $y = \mu$, entonces

$$z = 1 - \lambda - \mu.$$

La solución es:

$$(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

El sistema, efectivamente, es compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de 3 – 1 = 2 parámetros.

Por otra parte, si el término independiente de la segunda ecuación fuera 0, entonces la matriz ampliada del sistema sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente es:

$\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 0 = -2 \end{cases}$ que es incompatible.

Sistemas homogéneos

50. Resuelve estos sistemas de ecuaciones homogéneos:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$ ***d)*** $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to 3F_3 - 5F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x+2y+\quad z=0 \\ \quad -3y-\ 3z=0 \\ \qquad\quad 16z=0 \end{cases}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 5F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x-y+\ z=0 \\ \quad y \qquad =0 \\ \qquad -3z=0 \end{cases}$$

Solo tienen la solución trivial: (*x*,*y*,*z*) = (0,0,0)

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x-\ y-\ z=0 \\ \quad 5y+3z=0 \end{cases}$$

Si hacemos $z=\lambda$, entonces $y=\frac{-3}{5}\lambda$ y $x=\frac{2}{5}\lambda$.

El sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$(x,y,z)=\left(\frac{2}{5}\lambda,\frac{-3}{5}\lambda,\lambda\right),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & 5 \end{pmatrix}$

El sistema equivalente es:

$\begin{cases} x+\ 2y-\ z=0 \\ \ -11y+5z=0 \end{cases}$ Haciendo $z=\lambda$, entonces $y=\frac{5}{11}\lambda$ y $x=\frac{6}{11}\lambda$. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma: $(x,y,z)=\left(\frac{6}{11}\lambda,\frac{5}{11}\lambda,\lambda\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}$

51. Resuelve estos sistemas lineales homogéneos:

a) $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 6x+4y=0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -3x+6y-3z=0 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} 3x+2y-\;\;z=0 \\ \qquad\quad 2z=0 \end{cases}$$

$z = 0$. Haciendo $x=\lambda$, entonces $y=\frac{-3}{2}\lambda$.

El sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones de la forma:

$$(x,y,z)=\left(\lambda,\frac{-3}{2}\lambda,0\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema dado es equivalente a la ecuación:

$$x-2y+z=0$$

Si $x=\lambda$, $y=\mu$, entonces $z=-\lambda+2\mu$.

El sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de 3 − 1 = 2 parámetro y de la forma siguiente:

$$(x,y,z)=(\lambda,\mu,-\lambda+2\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

52. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo expresado en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*.

b) Para *m* = 1 resuelve el sistema y da, si es posible, una solución distinta de la solución trivial

a) Como se trata de un sistema homogéneo, estudiaremos el rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 \\ m & 0 & m \end{vmatrix} = -m^2 + m + m - m^2 = -2m^2 + 2m$$

$$m^2 + m + m - m^2 = 2m(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$$

Por tanto:

Si $m \neq 0 \; y \; m \neq 1, rg(A) = 3$, luego es un SCD, es decir, el sistema solo tiene la solución trivial (x, y, z) = (0, 0, 0).

Si m = 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Luego rg(A) = 2 < 3, es decir, tenemos un SCI, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Si m = 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; por\ ejemplo \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq$$

Luego rg(A) = 2 < 3, es decir, tenemos un SCI, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para m = 1, como hemos considerado un determinante que involucra a las dos primeras ecuaciones, entonces el sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Haciendo z = λ, entonces x = -λ, y = 0. La solución es (x, y, z) = $(-\lambda, \; 0, \; \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Una solución distinta de la trivial es, por ejemplo, (x, y, z) = (-1, 0, 1), obtenida para λ = 1.

Regla de Cramer

53. Resuelve, mediante la regla de Cramer, los sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y - z = -8 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 4y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$

a) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Por otro lado, el sistema tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas. En consecuencia, sí podemos aplicar la regla de Cramer. Así:so

