$$\begin{cases} 30A+10B+20C=400 \leftarrow \text{Unidades de calcio} \\ 10A+10B+20C=180 \leftarrow \text{Unidades de hierro} \\ 10A+30B+20C=240 \leftarrow \text{Unidades de vitamina A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+B+2C=40 \\ A+B+2C=18 \\ A+3B+2C=24 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 40 \\ 1 & 1 & 2 & 18 \\ 1 & 3 & 2 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 3F_3 - F_1]{F_2 \to 3F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 4 & 32 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 4F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -12 & -24 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 3A+2B+\ \ C=40 \\ \quad 2B+\ 4C=14 \\ \qquad 12C=24 \end{cases}$$

que tiene por solución: $A = 11$, $B = 3$, $C = 2$.

Se deberán utilizar 11 unidades de A, 3 de B y 2 de C.

84. Máquina de aparcamiento. En una máquina para pagar de un aparcamiento solo se admiten monedas de 50 céntimos, 1 € y 2 €. Si en un momento dado hay 68 monedas por un valor de 74 €, ¿cuántas monedas hay de cada tipo?

Consideramos:

x = «monedas de 50 céntimos»

y = «monedas de 1 euro»

z = «monedas de 2 euros»

Con la información del enunciado deducimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=68 \\ 0{,}5x+y+2z=74 \\ x \geq 0;\, y \geq 0;\, z \geq 0;\, x,y,z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{cases} x+y+z=68 \\ 5x+10y+20z=740 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=68-\lambda \\ x+2y=148-4\lambda \end{cases} \xrightarrow[E2=E2-E1]{} \begin{cases} x+y=68-\lambda \\ y=80-3\lambda \end{cases}$$

Si y = 80 - 3λ, entonces $x = 68 - \lambda - 80 + 3\lambda = 2\lambda - 12$.

Solución: $x = 2\lambda - 12, y = -3\lambda + 80, z = \lambda$.

Como $2\lambda - 12 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 6$ y $-3\lambda + 80 \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{80}{3} \Rightarrow \lambda \leq 26$,

Luego: $6 \leq \lambda \leq 26, \lambda \in \mathbb{R}$.

Hay, por tanto, 21 soluciones posibles:

λ	x	y	z
6	0	62	6
7	2	59	7
8	4	56	8
9	6	53	9
10	8	50	10
11	10	47	11
12	12	44	12
13	14	41	13
14	16	38	14
15	18	35	15
16	20	32	16
17	22	29	17
18	24	26	18
19	26	23	19
20	28	20	20
21	30	17	21
22	32	14	22
23	34	11	23
24	36	8	24
25	38	5	25
26	40	2	26

85. **Camiones cisterna.** **Una empresa distribuidora de combustible desea comprar 20 camiones cisterna con el fin de cubrir las necesidades de transportar un total de 730 000 l. Los hay de tres tipos, con capacidades respectivas de 30 000, 35 000 y 40 000 l. ¿Cuántos camiones de cada tipo debe comprar para cubrir las necesidades?**

Sean x, y, z el número de camiones con capacidades respectivas: 30 000, 35 000 y 40 000 L. Entonces:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \rightarrow \textit{total de camiones} \\ 30\,000x + 35\,000y + 40\,000z = 730\,000 \rightarrow \textit{total capacidad} \\ x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Luego, haciendo x = λ:

$$\begin{cases} \lambda + y + z = 20 \\ 6\lambda + 7y + 8z = 146 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema, vemos que hay 8 posibles soluciones:

λ	x	y	z
0	0	14	6
1	1	12	7
2	2	10	8
3	3	8	9
4	4	6	10
5	5	4	11
6	6	2	12
7	7	0	13

86. **Tienda de barrio.** **En una tienda de barrio una persona compró 2 refrescos, 5 botellas de agua y 3 bolsas de patatas fritas, por lo que pagó 18,5 €. Si la bolsa de patatas fritas cuesta cuatro veces lo que un refresco, y la botella de agua 10 céntimos menos que un refresco, ¿cuál es el precio de cada uno de estos tres productos?**

Sean x, y, z los precios respectivos del refresco, la botella de agua y la bolsa de patatas fritas. Entonces:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 18{,}5 \\ z = 4x \\ y = x - 0{,}10 \end{cases}$$

Luego:

2x + 5(x – 0,10) + 12x = 18,5, luego 19x = 19, así que x = 1. Por consiguiente, y = 0,90 y z = 4.

87. Jardín monotemático en un parque. En un parque se ha diseñado un jardín monotemático en el que se han construido triángulos, rectángulos y pentágonos, de tal forma que son independientes y no tienen lados en común. Además, se han plantado árboles, 3 madroños dentro de cada rectángulo y 4 cítricos en cada pentágono. Encuentra cuántos triángulos, rectángulos y pentágonos se han construido en este jardín, si en total hay 35 figuras geométricas, 135 lados de las figuras y 80 árboles.

Sean x, y, z los triángulos rectángulos y pentágonos que se han construido respectivamente:

$$\begin{cases} x+y+z=35 \rightarrow total\ de\ figuras\ geométricas \\ 3x+4y+5z=135 \rightarrow total\ de\ lados \\ 3x+4z=80 \rightarrow total\ de\ ángulos \\ x\geq 0; y\geq 0; z\geq 0; x,y,z\ \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Resolviéndolo por el método de Gauss tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 3 & 4 & 5 & 135 \\ 0 & 3 & 4 & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[F2\to F2-3F1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & 2 & 30 \\ 0 & 3 & 4 & 80 \end{array}\right) \xrightarrow[F3\to F3-3F2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

Resulta el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=35 \\ x+2z=30 \\ -2z=-10 \end{cases}$$

Solución: z = 5, y = 20, x = 10.

88. Campamento deportivo. El pasado verano, una familia con tres hijos se gastó 1500 € en equipación para un campamento deportivo. En concreto se gastó en el mayor 100 € más que cuatro veces lo que se gastó en el hijo menor. Además, lo gastado entre el hijo mediano y el mayor ascendió a 700 €. Averigua cuánto se gastó esta familia en cada uno de sus hijos.

Sean x, y, z los euros que se gastó esta familia en la equipación para el campamento del hijo menor, mediano y mayor, respectivamente.

$$\begin{cases} x+y+z=1500 \\ x=4z+100 \\ y+z=700 \end{cases} ,x,y,z\ \geq 0$$

Resolviendo resulta:

x = 800, y = 525, z = 175.

Se gastaron 800 € en el hijo menor, 525 € en el mediano y 175 € en el mayor.

89. Préstamo para cursar un máster. Alejandra necesita conseguir 30 000 € para cursar el próximo año un máster muy valorado. Como ningún banco le financia la totalidad del precio, necesita recurrir a tres entidades bancarias, A, B y C, que le ofrecen tipos de interés del 5, 7 y 8 % respectivamente. La cantidad que solicitó entre las entidades A y B fue de cuatro veces la solicitada a la entidad C. Si

al finalizar el año pagó unos intereses de 1880 €, ¿qué cantidad solicitó en cada una de las entidades bancarias?

Consideramos x, y, z las cantidades en euros que solicitó Alejandra a las entidades bancarias A, B y C, respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x+y+z=30\,000 \rightarrow Importe \\ 0{,}05x+0{,}07y+0{,}08z=1880 \rightarrow Intereses \\ x+y=4z \rightarrow Relación \\ x,y,z \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=30\,000 \\ 5x+7y+8z=188\,000 \\ x+y-4z=0 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E2\rightarrow E2-5E1 \\ E3\rightarrow E3-E1}]{} \begin{cases} x+y+z=30\,000 \\ 2y+3z=38\,000 \\ -5z=-30\,000 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases}$$

Solución: x = 14 000, y = 10 000, z = 6000.

Prepárate para la universidad

90. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real *k*:

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{cases}$$

a) **Discute el sistema para los diferentes valores de *k*.**

b) **Resuelve el sistema para el caso *k* = −1.**

Cataluña, 2019

a) La matriz ampliada del sistema es:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{array}\right)=A^*$$

$|A|=k^2-1$; $|A|=0 \Rightarrow k^2-100 \Rightarrow k=-1$ y $k=1$.

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 1$, entonces $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3$ y el sistema es compatible determinado (sol. única).

- Si k = -1, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1 \neq 0$ y $\text{rg}(A)=2$

Además,

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, $rg(A^*) = 2$.

Luego, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de 3 -2 = 1 parámetros.

- Si k = 1,

Además,

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ y $\text{rg}(A^*) = 3$.

Por tanto, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible.

b) Para k = -1, el sistema es compatible indeterminado y, como el menor no nulo comprende a las dos primeras ecuaciones, nos quedaremos solo con ellas. Así,

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + \ \ y + 3z = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ \quad -2y + \ \ z = -1 \end{cases}$$

Si $z = \lambda$, entonces $y = \dfrac{\lambda + 1}{2}$ y $x = \dfrac{-7\lambda - 5}{2}$

La solución es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-7\lambda - 5}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

91. Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real *m*:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)\ y + z = -1 \\ x + (2m-1)\ y + (m+2)\ z = 2 + 2m \end{cases}$$

***a)* Discute el sistema en función del parámetro *m*.**

***b)* Resuélvelo para el caso *m* = 0.**

Comunidad de Madrid, 2018

a) Como el parámetro figura en varias posiciones realizaremos la discusión utilizando los determinantes. El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m-1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} = m^2+1$$

- Si $m \neq -1$ y m = 1, entonces $rg(A) = rg(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- Si m = -1, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 2$

Además,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ y } \text{rg}(A^*) = 3$$

Luego, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible.

Si m = 1, también rg(A) = 2.

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \text{rg}(A) = 2 .$$

Luego, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

b) Para m = 0, el sistema es compatible determinado. Veamos su solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, $\begin{cases} x = 1 \\ -y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ que tiene por solución:

$(x, y, z) = (1, -1, 0)$.

92. **A través de una página de internet se han vendido para hoy tres eventos distintos: 120 entradas para un estreno de cine, 50 para una obra de teatro y 150 para un concierto de música. El valor total de lo recaudado por las entradas de estos tres eventos asciende a 6 460 €. Se sabe que el precio de dos entradas de teatro equivale a cinco de cine, y el precio de dos entradas del concierto, al de tres entradas de teatro.**

Plantea un sistema de ecuaciones que permita averiguar cuál es el precio de la entrada de cada evento.

Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

Castilla-La Mancha, 2017

a) Sean: x = "precio de la entrada de cine"

y = "precio de la entrada de teatro"

z = "precio de la entrada de música"

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

El enunciado da lugar al suficiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 120x + 50y + 150z = 6460 \\ 2y = 5x \\ 2z = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 5y + 15z = 646 \\ -5x + 2y = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 5 & 15 & 646 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to 12F_2 + 5F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 5 & 15 & 646 \\ 0 & 49 & 75 & 3230 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 49F_3 + 3F_2]{}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 5 & 15 & 646 \\ 0 & 49 & 75 & 3230 \\ 0 & 0 & 323 & 9690 \end{array}\right)$$

Sistema que tiene por solución:

$x = 8$, $y = 20$, $z = 30$

Es decir, el precio de la entrada de cine es 8 €, el de teatro 20 € y el de música 30 €.

93. Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

***a)* Estudia la existencia y unicidad de sus soluciones según los valores del parámetro *m*.**

***b)* Resuelve el sistema para el caso *m* = 2.**

Castilla y León, 2019

a) Para hallar el rango de las matrices de coeficientes y ampliada utilizaremos las matrices. Así:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & m & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & m-2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 0$, entonces la matriz de coeficientes tienen tres filas no nulas y, por tanto, $rg(A) = rg(A^*) = 3$. El sistema es compatible determinado (sol. única).

- Si m = 0, entonces la matriz de coeficientes tiene dos filas no nulas y, por tanto, $rg(A)02$. Sin embargo, la matriz ampliada tiene tres filas no nulas y, en consecuencia, $rg(A^*) = 3$.

El sistema es incompatible (carece de solución).

b) Para m = 2, el sistema es compatible determinado. Veamos cuál es su solución:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6 \\ -\quad y - 2z = -3 \\ \qquad 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \tfrac{1}{2},\ y = 2,\ z = \tfrac{1}{2}$$

94. Discute en función del parámetro $\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ ax + y - z = 2 \\ 5x + 3y + z = 2a \end{cases}$ el siguiente sistema de ecuaciones:

Extremadura, 2019

Como el parámetro *a* figura en varias posiciones utilizaremos los determinantes para hallar los rangos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3a^2 - 7a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3a^2 - 7a + 2 = 0 \Rightarrow a = \tfrac{1}{3} \text{ y } a = 2$$

Por tanto:

- Si $a \neq \tfrac{1}{3}$ y $a \neq 2$, entonces $|A| \neq 0$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. El sistema es compatible determinado (sol. única).

- Si $a = \tfrac{1}{3}$, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$ y $\text{rg}(A) = 2$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} 2 & \tfrac{1}{3} & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & \tfrac{2}{3} \end{vmatrix} = \tfrac{4}{9} \neq 0$$ y $\text{rg}(A^*) = 3$

Luego, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ y } \mathrm{rg}(A^*) = 3$$

Luego, $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq \mathrm{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible.

95. **Sea:** $\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$ **, donde α un parámetro real. Obtén:**

a) **Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado.**

b) **La solución del sistema cuando α = −1.**

c) **El valor de α para que el sistema tenga una solución (*x, y, z*) que verifique *x* + *y* + *z* = 0.**

Comunidad Valenciana, 2019

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -i \neq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Por tanto, $rg(A) = rg(A^*) = 3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ y el sistema siempre es compatible determinante.

b) Cuando $\alpha = 1$, el sistema es:

$$\begin{cases} 2x \quad\quad + 3z = -1 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - \quad y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & -15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to 4F_3 - 5F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ \quad 4y - \quad z = -11 \\ \quad\quad\quad z = -5 \end{cases}$ que tiene por solución

$(x, y, z) = (7, -4, -5)$.

c) Podemos añadir la ecuación $x + y + z = 0$ al sistema dado inicialmente. Así:

$$\begin{cases} 2x+3z=\alpha \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-\ \ y+5z=\alpha+1 \\ x+\ \ y+\ \ z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2-2F_1 \\ F_3 - F_3-3F_1 \\ F_4 \to F_4-F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & \alpha-10 \\ 0 & 5 & -1 & \alpha-14 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3 \to 4F_3-5F_2 \\ F_4 \to 4F_4-3F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & \alpha-10 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha-6 \\ 0 & 0 & -1 & -3\alpha+10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \to F_4+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & \alpha-10 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha-6 \\ 0 & 0 & 0 & -4\alpha+4 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x-2y+2z=5 \\ 4y-\ \ z=\alpha-10 \\ z=-\alpha-6 \\ 0=-4\alpha+4 \end{cases} \quad \text{Luego, } \alpha=1$$

Efectivamente, la solución es: $(x,y,z)=(11,-4,-7)$ para $\alpha=1$, y resulta que $x+y+z=0$.

96. El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

Aragón, 2019

Designemos para x, y, z el número de deportistas de esquí alpino, esquí nórdico y escalada, respectivamente. Entonces, el enunciado da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x=y+z-16 \\ x+z=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=-16 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & -1 & -16 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2-F_1 \\ F_3 \to F_3-F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -2 & -2 & -76 \\ 0 & -4 & 0 & -60 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3-2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -2 & -2 & -76 \\ 0 & 0 & 4 & 92 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=60 \\ -2y-2z=-76 \\ 4z=92 \end{cases}$$

Tiene por solución: $x = 22$, $y = 15$, $z = 23$.

Luego, hay 22 deportistas de esquí alpino, 15 de esquí nórdico y 23 de escalada en el club deportivo de Collarada.

97. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases}(a+2)\ x-y-az=-a\\(-a-2)\ x+2y+(a^2-a)\ z=3a-1\\(a+2)\ x-2y+(2-2a)\ z=-2a\end{cases}$$

Navarra, 2019

Calcularemos el rango mediante determinantes:

$$|A|=\begin{vmatrix}a+2 & -1 & -a\\-a-2 & 2 & a^2-a\\a+2 & -2 & z-2a\end{vmatrix}\underset{\substack{F_2'=F_2+F_1\\F_3'=F_3-F_1}}{=}\begin{vmatrix}a+2 & -1 & -a\\0 & 1 & a^2-2a\\0 & -1 & 2-a\end{vmatrix}\underset{F_3'=F_3+F_2}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}a+2 & -1 & -a\\0 & 1 & a^2-2a\\0 & 0 & 2-3a+a^2\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)(a-2)$$

$|A|=0\Rightarrow(0+2)(a-1)(a-2)=0\Rightarrow a=-2,\ a=1$ y $a=2$.

- Si $a\neq 2$, $a\neq 1$ y $a\neq 2$, entonces $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3$ y el sistema es compatible determinado.
- Si a = -2, por ejemplo, $\begin{vmatrix}-1 & 2\\2 & 6\end{vmatrix}=-10\neq 0$ y rg(A) = 2.

Además, $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\2 & 6 & -7\\-2 & 6 & 4\end{vmatrix}=-6\neq 0$ y $\text{rg}(A^*)=3$.

El sistema es incompatible.

- Si a = 1, por ejemplo, $\begin{vmatrix}-1 & -1\\2 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0$ y rg(A) = 2.

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\2 & 0 & 2\\-2 & 0 & -2\end{vmatrix}=0 \text{ y } \text{rg}(A^*)=2$$

Como $rg(A)=rg(A^*)=2<3$, entonces el sistema es compatible indeterminado.

- Si $a = 2$, por ejemplo, $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ y rg(A) = 2.

Además,

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ y } \operatorname{rg}(A^*) = 3.$$

Luego, el sistema es incompatible.

→ Veamos, pues, la resolución cuando $a \neq 2$, $a \neq 1$ y $a \neq 2$ que el sistema es compatible determinado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & -1 & -a & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a & 3a-1 \\ a+2 & -2 & 2-2a & -2a \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & -1 & -a & -a \\ 0 & 1 & a^2-2a & 2a-1 \\ 0 & -1 & 2-a & -a \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & -1 & -a & -a \\ 0 & 1 & a(a-2) & 2a-1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & a-1 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ y + a(a-2)z = 2a-1 \\ (a-2)(a-1)z = a-1 \end{cases}$$

De la tercera ecuación, resulta: $z = \dfrac{1}{a-2}$

Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos:

$y = a - 1$

Y, finalmente, llevando estos dos valores a la primera ecuación, queda:

$$x = \frac{2}{(a-2)(a+2)} = \frac{2}{a^2-4}$$

Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{2}{a^2-4}, \quad y = a-1, \quad z = \frac{1}{a-2}$$

→ Ahora, nos queda la resolución para a = 1. La última matriz reducida es:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Y el sistema equivalente es:

$\begin{cases} 3x \cdot y - z = -1 \\ \quad y - z = 1 \end{cases}$. Haciendo $z = \lambda$, entonces

$y = \lambda + 1$ y $x = \dfrac{2}{3}\lambda$.

Por tanto, la solución es: $x = \dfrac{2}{3}\lambda$, $y = \lambda + 1$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

98. **Considera el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:** $\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$

a) **Determina para qué valores de *a* el sistema tiene solución única. Si es posible, calcula dicha solución para *a* = 2.**

b) **Calcula para qué valor de *a* el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.**

c) **Determina para qué valor de *a* el sistema no tiene solución.**

Región de Murcia, 2019

a) El sistema tendrá solución única si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. Es decir, si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 \quad ; \quad |A| \neq 0 \Rightarrow a^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1 \text{ y } a \neq 1$$

Para *a* = 2, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \\ x + y + \ z = 2 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 2F_2 - F_1]{F_2 \to 2F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

Luego,

$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ \quad y - 2z = -2 \\ \quad\quad 6z = 6 \end{cases}$ que tiene por solución: $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

b) El sistema tendrá infinitas soluciones si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < 3$. Es decir, si ambos rangos coinciden pero son inferior al nº de incógnitos.

Veamos, pues, qué ocurre cuando *a* = -1.

$\begin{cases} -x+y-2z=0 \\ x+y+\ \ z=-1 \\ x+y+\ \ z=1 \end{cases}$. Como la segunda y la tercera ecuación son iguales, entonces:

$\begin{cases} -x+y-2z=0 \\ x+y+\ \ z=0 \end{cases}$ Sumando ambas ecuaciones queda: $2y - z = 0$. Haciendo $y=\lambda$, entonces

$z=2\lambda$ y $x=-3\lambda$.

La solución es: $(x,y,z)=(-3\lambda,\lambda,2\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$.

c) El sistema no tendrá solución si $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$. Solo nos queda comprobar lo que ocurre cuando $a = 1$. Así:

$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x+y-\ \ z=-1 \\ x+y+\ \ z=1 \end{cases}$ Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$

Por tanto, para $a=1$ el sistema no tiene solución, es decir, es un sistema incompatible.

99. *a)* Demuestra que es posible efectuar un pago de 34,50 € satisfaciendo las siguientes condiciones:

- **Utilizar únicamente monedas de 50 céntimos, 1 y 2 €.**
- **Emplear, exactamente, un total de 30 monedas.**
- **Usar un número de monedas de 1 euro igual al de 50 céntimos y 2 € juntas.**

***b)* ¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?**

Si se redondea a 35 € la cantidad por pagar, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

Andalucía, 2018

a) Sean *x*, *y*, *z* el número de monedas de 50 céntimos, 1 euro y 2 euros, respectivamente.

El enunciado da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0{,}5x+y+2x=34{,}50 & \leftarrow \text{Cantidad pagada} \\ x+y+z=30 & \leftarrow \text{Número total de monedas.} \\ y=x+z & \leftarrow \text{Relación ente tipo de monedas.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+4z=69 \\ x+\ \ y+\ \ z=30 \\ -x+\ \ y-\ \ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+4z=69 \\ x+\ \ y+\ \ z=30 \\ -x+\ \ y-\ \ z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 0 & -1 & -3 & -39 \\ 0 & 3 & 3 & 69 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 0 & -1 & -3 & -39 \\ 0 & 0 & -6 & -48 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 69 \\ -\ y - 3z = -39 \\ -6z = -48 \end{cases}$$

que tiene por solución: $x = 7$, $y = 15$, $z = 8$.

Por tanto, solo hay una manera de efectuar el pago de 34,50 € con esa condición y es la siguiente: 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 € y 8 monedas de 2 €.

b) Si el pago es de 35 € el sistema resultante es:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}5x + y + 2z = 35 \\ x + y + z = 30 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 70 \\ x + y + z = 30 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 3 & 3 & 70 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 0 & -6 & -50 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 70 \\ -\ y - 3z = -40 \\ -6z = -50 \end{cases} \quad z = \frac{50}{6} \text{ no es un número entero mayor o igual que 0.}$$

Por tanto, no es posible efectuar el pago de 35 € con esas condiciones.

100. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

donde a es un número real.

a) Determina los valores de a para que la matriz A sea no invertible.

b) Para a = 5, calcula la inversa de la matriz A.

c) Para a = 5, resuelve la ecuación matricial AX = B.

Andalucía

La matriz A no será invertible si $|A| = 0$.

$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - 16a = a(a^2 - 16) = 0$, luego a = 0, a = 4, a = - 4.

Por tanto, $\nexists A^{-1}$ *cuando se dan esos casos*.

b) Para a = 5, entonces:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $|A| = 45$

$Adj(A) = \begin{pmatrix} 25 & -40 & 0 \\ -10 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; $Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)^t = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

c) Para a = 5, el sistema es:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 8x + 5y = -2 \\ 5z = 10 \end{cases}$$

AX = B, luego X = A^{-1}B;

Si $x = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$, entonces:

$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución: x = 1, y = -2, z = 2.

101. Un día de playa y bajo un sol radiante, Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

b) Resuélvelo.

Cantabria

Sean x, y, z los precios, en euros, de un helado, un granizado y una horchata, respectivamente.

a) El enunciado da lugar al siguiente sistema:

$$\begin{cases} (3+1)x + 2y + (2+1)z = 20 \\ x + z = 5 \\ 0{,}5x + 0{,}5y = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 4x+2y+3z=20 \\ x+z=5 \\ x+y=4 \end{cases} \xrightarrow[E3\to 4E3-E1]{E2\to 4E2-E1} \begin{cases} 4x+2y+3z=20 \\ -2y+z=0 \\ 2y-3z=-4 \end{cases} \xrightarrow[E3\to E3+E2]{} \begin{cases} 4x+2y+3z=20 \\ -2y+z=0 \\ -2z=-4 \end{cases}$$

Solución: x = 3, y =2, z, = 1.

102. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1280 € después de invertir un total de 22 000 € en dos empresas distintas. Estos beneficios se desglosan como sigue: la cantidad invertida en la primera empresa le ha proporcionado un m % de beneficios y la cantidad invertida en la segunda empresa le ha proporcionado un 6 % de beneficios.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad invertida en cada una de las dos empresas.

b) Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los beneficios en la primera empresa sean del 4 %? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el porcentaje de beneficio por lo invertido en la primera empresa. En ese caso, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las empresas?

Asturias

Llamamos x e y a las cantidades invertidas en la primera y la segunda empresa, respectivamente. Entonces, del enunciado, deducimos el siguiente sistema de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=22\,000 \to cantidad\ total\ invertida} \\ \boldsymbol{mx+6y=128\,000 \to beneficio\ de\ la\ inversión} \\ \boldsymbol{x\geq 0; y\geq 0} \end{cases}$

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema:

$\boldsymbol{|A|=0 \Rightarrow 6-m}$, luego igualando a cero queda m = 6.

Si m = 6, $\boldsymbol{rg(A)=1\neq rg(A^*)=2, sistema\ incompatible}$.

Por otra parte, si los beneficios en la primera empresa son del 4 %, entonces resulta el sistema:

$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=22\,000 \to cantidad\ total\ invertida} \\ \boldsymbol{4x+6y=128\,000 \to beneficio\ de\ la\ inversión} \\ \boldsymbol{x\geq 0; y\geq 0} \end{cases}$, de donde se obtiene x = 2000 y, por tanto, y = 20 000.

103. Una caja contiene 40 monedas, que son de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €. Se sabe que el número de monedas de 50 céntimos que hay es el doble que el de monedas de 2 €.

a) ¿Puede saberse el número de monedas que hay de cada tipo? En caso afirmativo, calcúlalo. En caso negativo, da la solución en función del parámetro.

b) Averigua si puede calcularse el valor total, en euros, de las monedas de la caja. En caso afirmativo, calcúlalo.

Cataluña

a) Si x, y, z son el número de monedas de 50 céntimos, de 1€ y de 2€ respectivamente que hay en la caja. Entonces:

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \\ x = 2z \\ x, y, z \geq 0, x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Resolviendo:

$$2z + y + z = 40, \textit{luego } y = -3z + 40$$

Si hacemos z = λ, entonces la solución es.

$$x = 2\lambda, y = -3\lambda + 40, z = \lambda$$

Como $-3\lambda + 40 > 0 \Rightarrow \lambda < \frac{40}{3} = 13,3$

Entonces $0 < \lambda \leq 13, \textit{o bien } 1 \leq \lambda \leq 13.$

Hay, por tanto, 13 posibles soluciones.

b) El valor total en euros que contiene la caja es:

$$0,5x + y + 2z = (0,5)(2\lambda) + (-3\lambda + 40) + 2\lambda = \lambda - 3\lambda + 40 + 2\lambda = 40$$

Hay 40 € en la caja.

104. Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1650 € al mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90 % de la cantidad cobrada por el alquiler, y al propietario del tercer local, el 80 % de la cantidad percibida por el alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 € de ganancias. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

Comunidad Valenciana

Sean x, y, z las cantidades que la inmobiliaria ha cobrado por el alquiler del primer, segundo y tercer local, respectivamente, este mes. Con esa información del enunciado, llegamos a este sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1650 \\ 0,05x + 0,10y + 0,20z = 132 \\ x = 2(y + z) \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1650 \\ x + 2y + 4z = 2640 \\ x = 2y + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 3z = 1650 \\ 4y + 6z = 2640 \end{cases}$$

Si $y = 550 - z, \textit{entonces } 1100 - 2z + 3z = 1320 \textit{ luego } z = 220. \textit{Por tanto}, y = 330, x = 1100.$

105. Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C), comparando su peso con el de una barrita que sabemos pesa 13 g. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:

a) La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas.

b) Tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B.

c) Una pieza C pesa lo mismo que dos pieza A y una B. ¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo?

Si la relación (iii) hubiera sido que una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falas. ¿Por qué?

La Rioja

Designamos por A, B, C el peso en gramos de cada pieza A, B y C, respectivamente.

$$\begin{cases} C + 2B = 13 \\ 3A = 2B \\ C = 2A + B \end{cases}$$

Sustituyendo la tercera ecuación en la primera, resulta que 2A + 2B = 13. Y como en la segunda ecuación tenemos:

$$\boldsymbol{A = \frac{2}{3}B}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{2 \cdot \frac{2}{3}B + 3B = 13 \Rightarrow 4B + 9B = 39, luego\ B = 3}$$

Por tanto:

A = 2, y C = 7

Por otra parte, si se modifica el apartado c por los datos que se mencionan en el enunciado, se puede comprobar que la solución es imposible, luego hay información falsa.

106. Hace un año, una sociedad de capital riesgo invirtió 100 000 € en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio, las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102 000 €, y sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a) Identifica las variables e interpreta el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Calcula la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa.

Islas Baleares

a) Llamamos x, y, z a las cantidades invertidas, en euros, por una sociedad en acciones de las empresas A, B y C, respectivamente.

A partir del enunciado llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=100\,000 \\ 1,5x+1,1y+0,85z=102\,000 \\ z=x+y \\ x,y,z\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=100\,000 \\ 150x+110y+85z=10\,200\,000 \\ z=x+y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=100\,000 \\ 30x+22y+17z=2\,040\,000 \\ z=x+y \end{cases}$$

b) Sustituyendo el valor de z de la tercera ecuación en los otros dos ejemplos, resulta:

$$\begin{cases} x+y=50\,000 \\ 47x+39y=2\,040\,000 \end{cases} \Rightarrow x=50\,000-y \Rightarrow 47(50\,000-y)+39y=2\,040\,000 \Rightarrow y = 38\,750$$

Luego x = 11 250 y z = 50 000.

107. **Se considera las matrices**

$$A=\begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores del parámetro a para que A tenga inversa.

b) Calcula, para a = 1, la solución del sistema (A – B)X = Y.

Madrid

Existe A^{-1} solo si $|A|\neq 0$. Por tanto:

$$|A|=\begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+a+a+a=4a$$

$$|A|=0, entonces\ 4a, luego\ a=0.$$

Por tanto, Existe A^{-1} solo si $a\neq 0$.

b) Para a = 1, el sistema (A – B)X = Y resulta:

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lo que resulta en:

$$x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{4}, z=-2$$