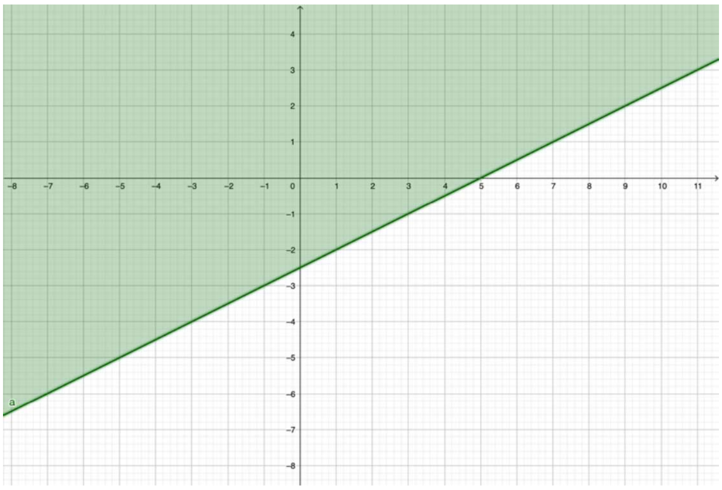
1. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

1. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales:

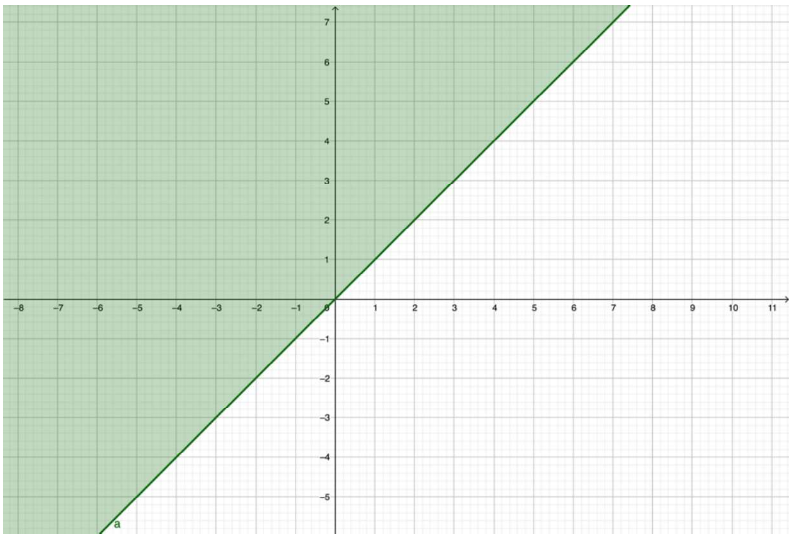
a) $x - 2y \leq 5$ **b)** $x \leq y$ **c)** $x + y > 0$

d) $2x + 3y > 12$ **e)** $4x - 2y \leq 4$ **f)** $6x - 2 > 0$

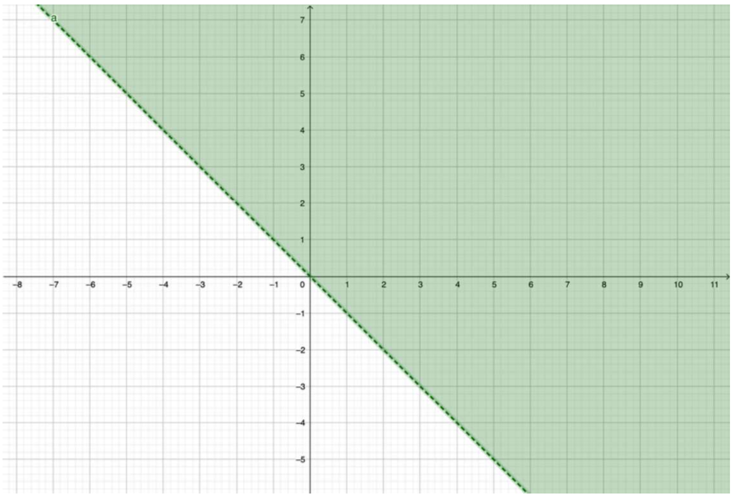
a)



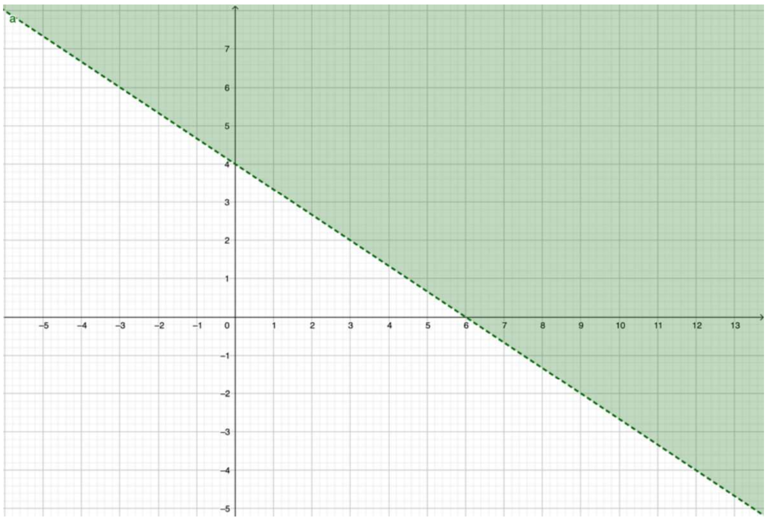
b)



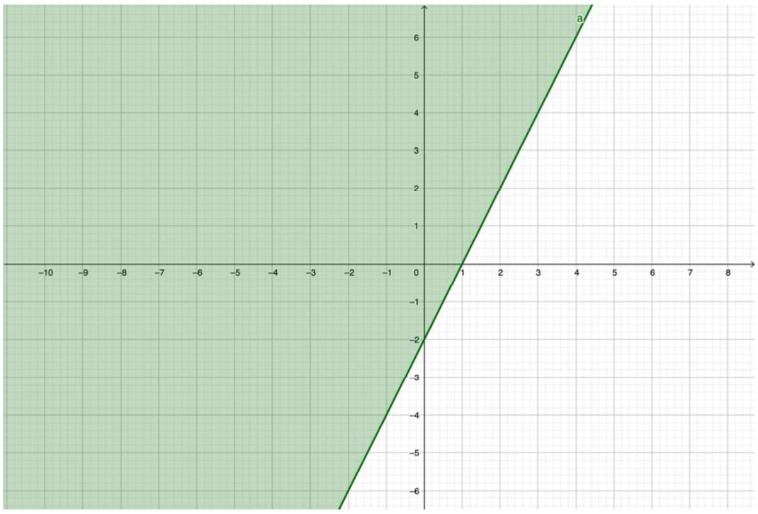
c)



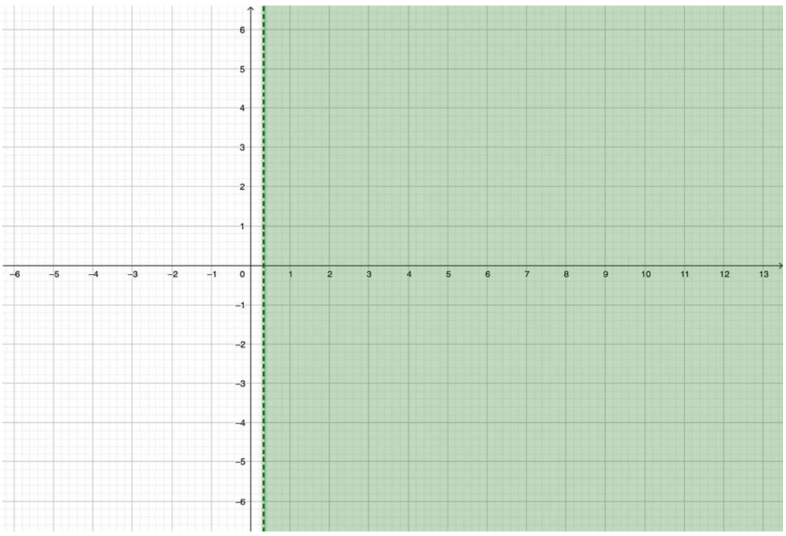
d)



e)



f)

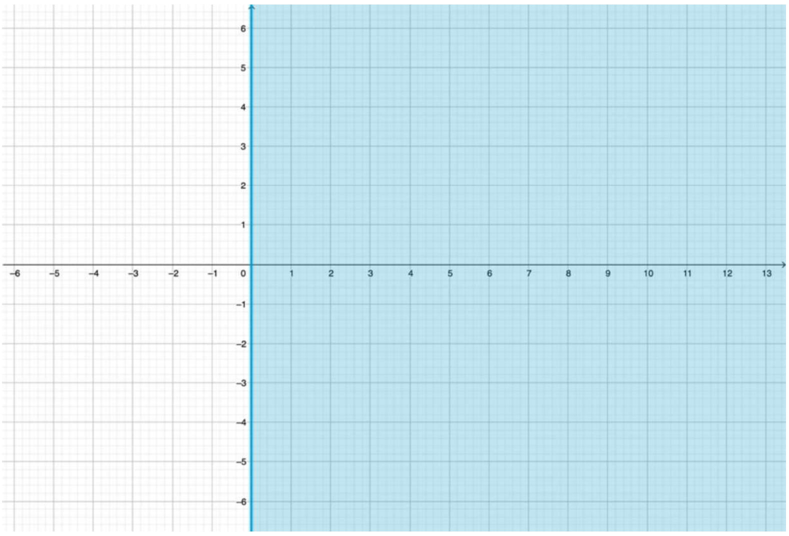


2. ¿Qué región del plano representan cada una de las siguientes inecuaciones?

a) $x \geq 0$ **b)** $x > 2$ **c)** $1 < x < 2$

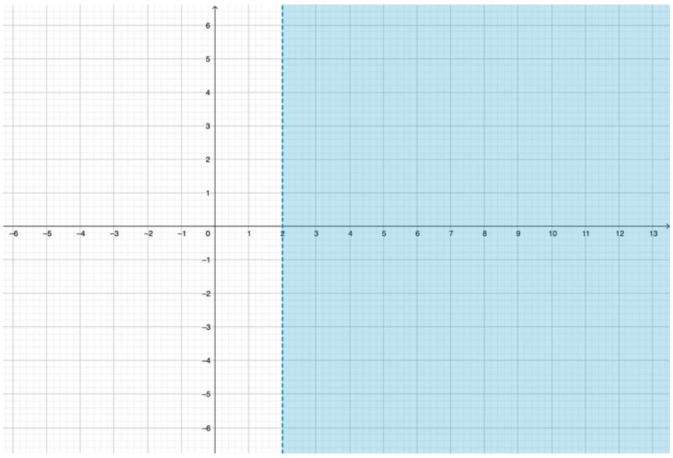
d) $1 \leq y \leq 5$ **e)** $y > x + 1$ **f)** $x \leq y - 3$

a)



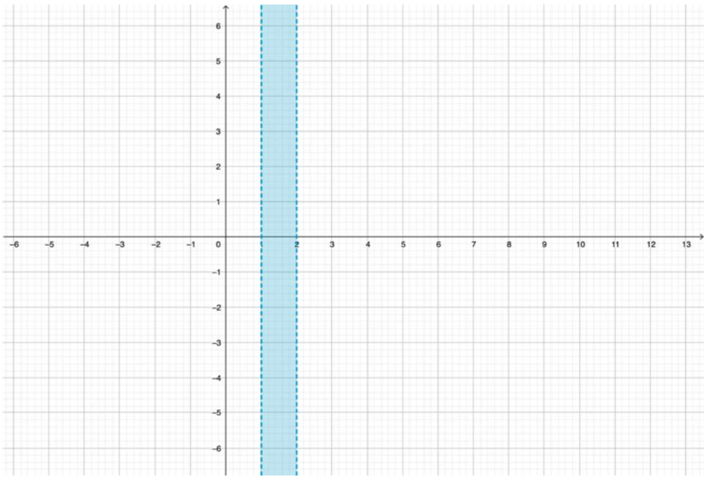
−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6

b)

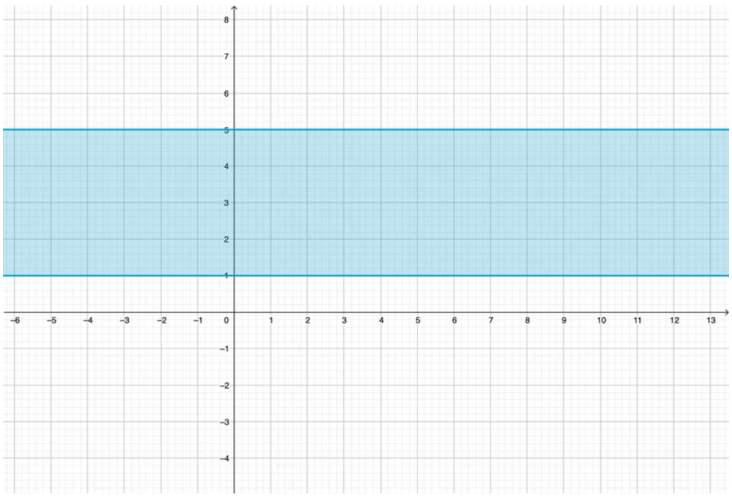


−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6

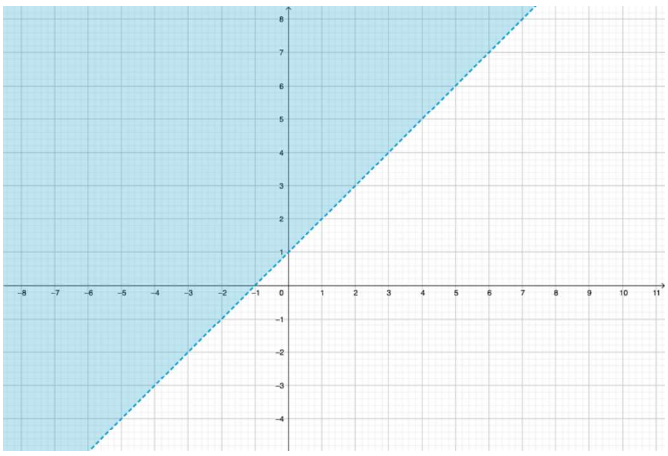
c)



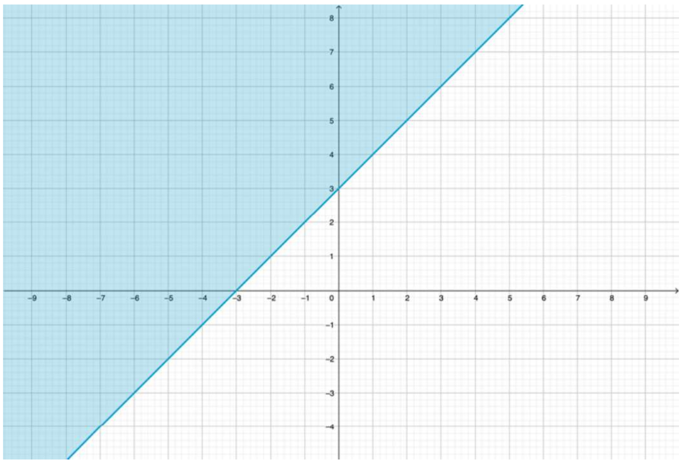
d)



e)

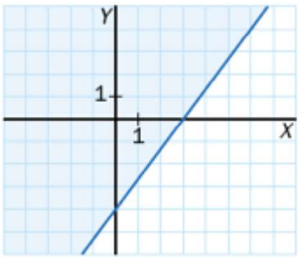


f)

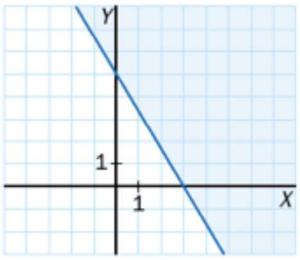


3. Encuentra las inecuaciones que dan lugar a las siguientes regiones del plano:

a)



b)



La frontera de la región es la resta que pasa por los puntos de este en los ejes (3,0) y (0,-4). Luego:

$$\frac{y+4}{0+4}=\frac{x-0}{3-0}\Rightarrow 3y+12=4x\Rightarrow 4x-3y-12=0$$

Por otra parte, el origen de coordenadas (0,0) es un punto de la región y, en consecuencia, debe verificar la inecuación correspondiente. Así:

$$4{\cdot}0-3{\cdot}0-12=-12\leq 0$$

Por tanto, la inecuación que da lugar a esa región es:

$$4x-3y-12\leq 0\Leftrightarrow 4x-3y\leq 12$$

De forma similar, la frontera de esta región es la recta que pasa por los puntos (3,0) y (0,5). Luego:

$$\frac{y-5}{0-5}=\frac{x-0}{3-0}\Rightarrow 3y-15=-5x\Rightarrow 5x+3y-15=0$$

Como el origen de coordenadas (0,0) no está en la región dada, entonces no debe verificar la inecuación correspondiente: Así:

$$5\cdot 0+3\cdot 0-15=-15\not\leq 0$$

Luego, la inecuación que da lugar a esta región del plano es:

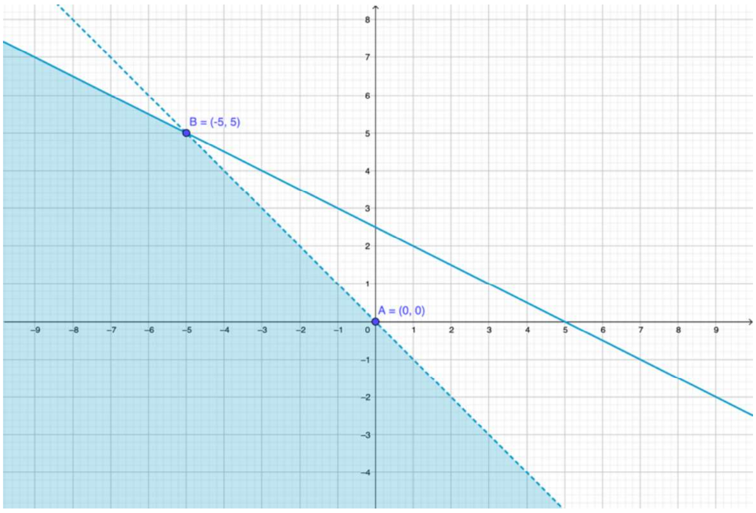
$$5x+3y-15\geq 0\Rightarrow 5x+3y\geq 15$$

2. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

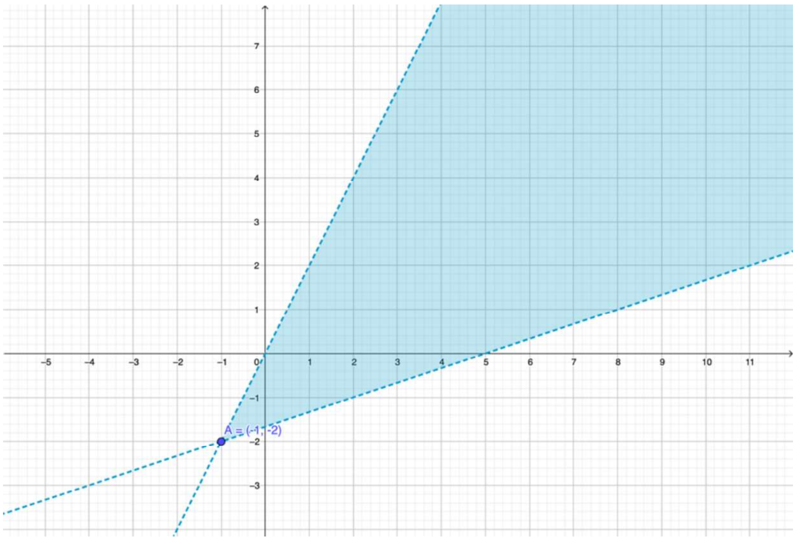
4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:

$\begin{cases} x+y<0 \\ 2x+2y\leq 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-y>1 \\ x-3y<4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4y-3x\geq 0 \\ 5x-y\geq 10 \end{cases}$

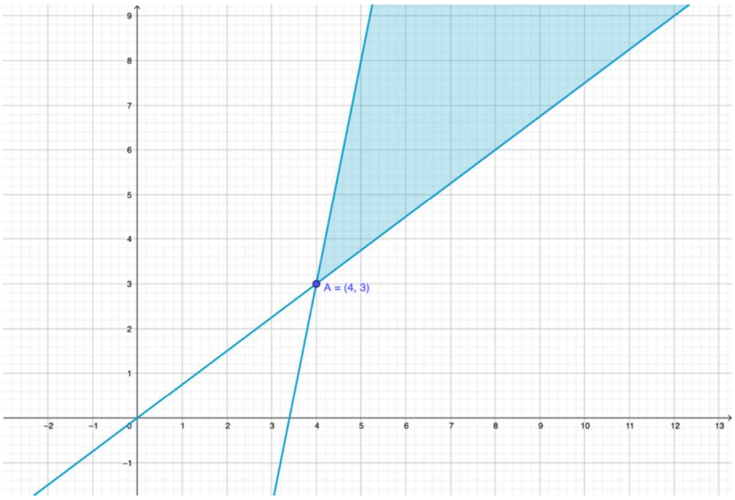
a)



b)



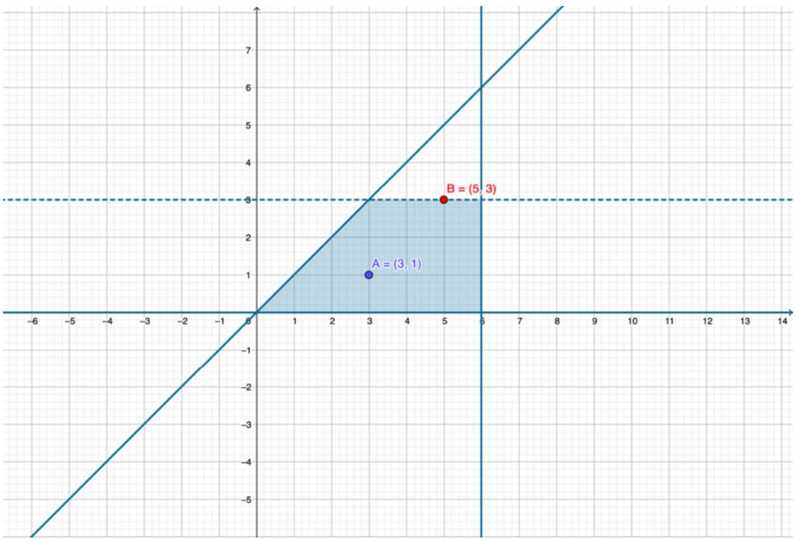
c)



5. **Dado el siguiente sistema de inecuaciones lineales:** $\begin{cases} y \geq 0 \\ y - x \leq 0 \\ y < 3 \\ x - 6 \geq 0 \end{cases}$

Dibuja la región solución.

Estudia si los puntos A(3, 1) y B(5, 3) son soluciones o no del sistema propuesto.



6. Oferta y demanda. Las ecuaciones de oferta y de demanda de un producto son, respectivamente, las siguientes:

$$p = 25 + 0,1x \qquad p = 100 - 0,05x$$

donde x es el número de unidades de dicho producto y p el precio en euros.

Dibuja las dos rectas.

Indica las regiones que representan exceso de oferta y exceso de demanda.

Oferta $\rightarrow p = 25 + 0,1x$

Demanda $\rightarrow p = 100 - 0,05x$

Los puntos de corte con los ejes de estas dos rectas son:

Oferta

Demanda

X	P
0	25
−200	0

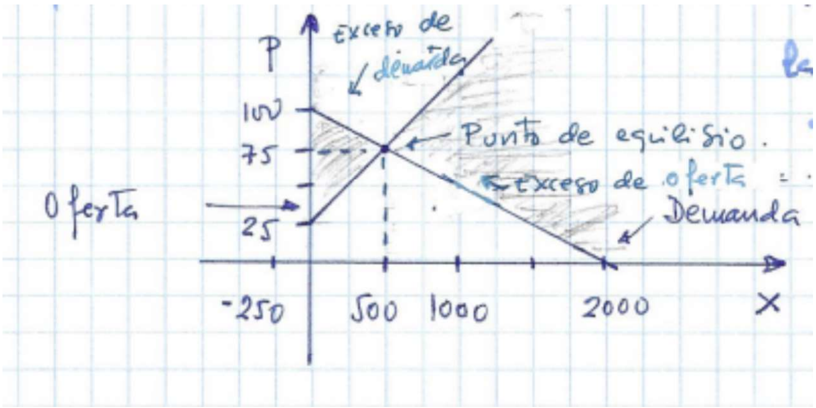
X	P
0	100
2000	0

Por otra parte, el punto de equilibrio, es decir, donde la oferta se iguala a la demanda, lo obtenemos al resolver el sistema:

$$\begin{cases} p = 25 + 0,1x \\ p = 100 - 0,05x \end{cases} \Rightarrow 25 + 0,1x = 100 - 0,05x \Rightarrow 0,15x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{0,15} = 500$$

Y, por tanto: $p = 25 + 0,1 \cdot 500 = 75$

El punto de equilibrio se obtiene con 500 unidades del producto a un precio de 75€.



Hay exceso de oferta cuando la cantidad ofrecida es mayor que la demanda. Hay exceso de demanda porque la cantidad demandada es mayor que la ofertada.

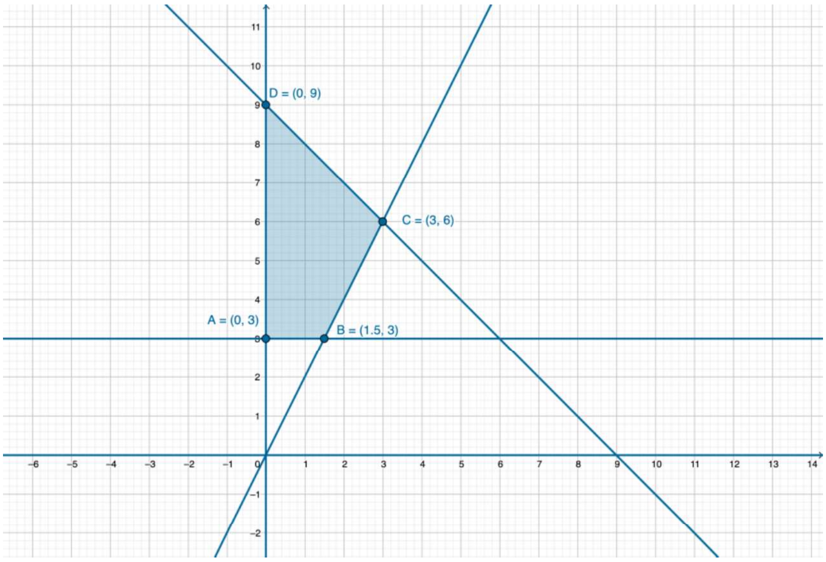
7. Inversión. Una persona dispone de 10 000 euros para invertir en dos cuentas de ahorro, A y B, con intereses diferentes. En la cuenta A quiere depositar al menos 3000 euros para lograr un tipo de interés interesante. Por otro lado, como la cuenta B tiene un tipo de interés superior, decide depositar al menos el doble que en A. Escribe y representa gráficamente el sistema de inecuaciones lineales que permite conocer las distintas opciones de la cantidad invertida en cada cuenta de ahorro.

Sean x e y las cantidades quiere invertir en las cuentas de ahorro A y B, respectivamente.

Entonces con los datos del anunciado tenemos el sistema de inecuación siguiente:

$$\begin{cases} x+y\le 9 \leftarrow \text{Disponibilidad de inversión} \\ x\ge 3 \leftarrow \text{Cantidad depositada en la cuenta A} \\ y\ge 2x \leftarrow \text{Relación entre las cantidades depositadas en A y B} \\ x\ge 0,\, y\ge 0 \leftarrow \text{Las cantidades depositadas no pueden ser negativas} \end{cases}$$

La región factible queda delimitada por el polígono. $A(0,3)$, B(1,5, 3, C(3, 6) y $D(0,9)$. Por tanto, cualquier par de valores de x e y que se encuentran en dicha región cumple las condiciones establecidas.



3. La programación lineal

8. Maximiza la función objetivo $z = 3x + 4y$, sujeta a las restricciones: $x + y \leq 8$, $2x + 3y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

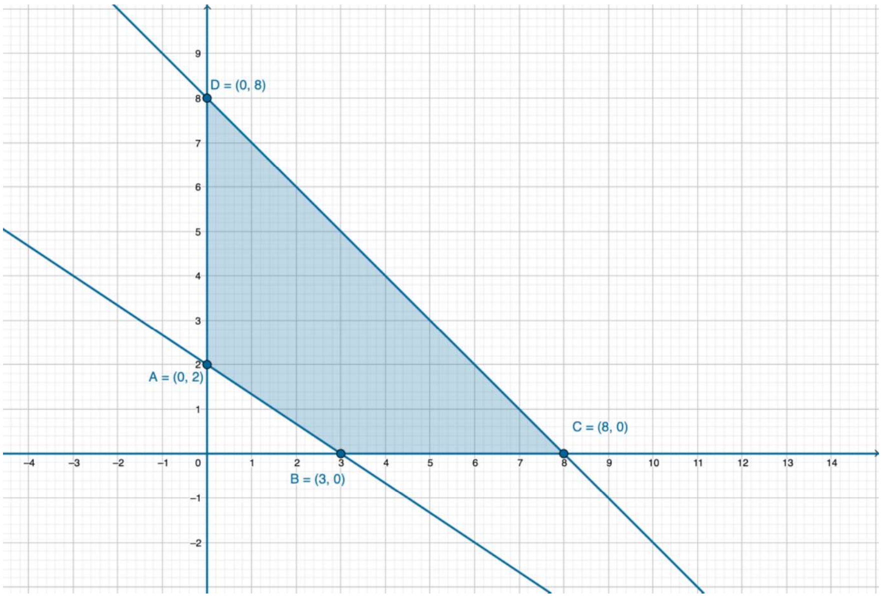
Maximizar $z = 3x + 4y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Construimos la siguiente tabla con la información de cada una de las inecuaciones:

Ecuación	Ptos. de corte con los ejes	Inecuación	Punto de prueba (0,0)	Conclusión
$x + y = 8$	$(8,0)y(0,8)$	$x + y \leq 8$	$0 < 8$	Sí
$2x + 3y = 6$	$(3,0)y(0,2)$	$2x + 3y \geq 6$	$0 < 6$	No

La región factible está delimitada por el polígono $A(0,2)$, $B(3,0)$, $C(8,0)$ y $D(0,8)$.



Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible (ver tabla)

Vértices	$A(0,2)$	$B(3,0)$	$C(8,0)$	$D(0,8)$
Valor $z=3x+4y$	8	9	24	$32 \leftarrow Max$

El máximo se alcanza en el vértice $D(0,8)$ con un valor de 32.

9. Minimiza la función objetivo $z = 5x + 4y$, sujeta a las restricciones: $x + y \geq 2$, $2x + 3y \leq 12$, $3x + y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

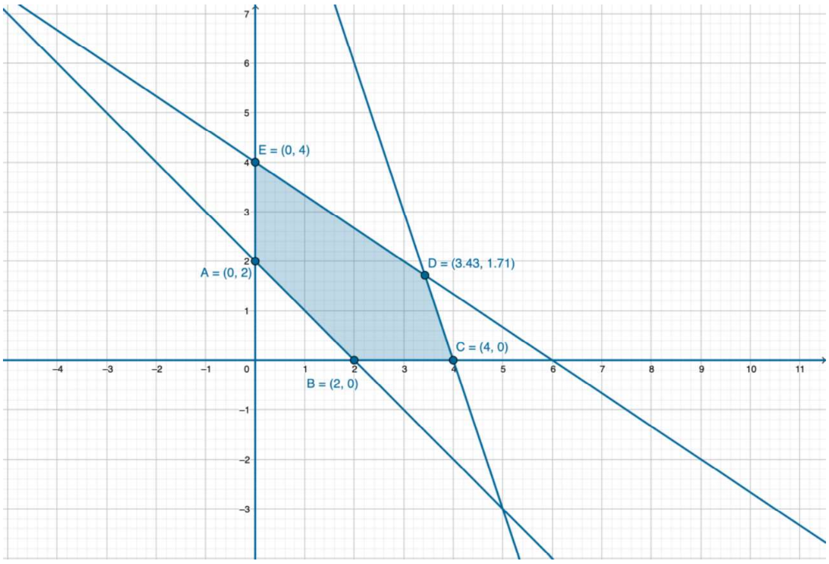
Minimizar $z=5x+4y$

$$\begin{cases} x+y\geq 2 \\ 2x+3y\leq 12 \\ 3x+y\leq 12 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$$

Construimos la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte con los ejes	Inecuación	Punto de prueba P(0,0)
$r_1: x+y=2$	$(2,0)$ y $(0,2)$	$x+y\geq 2$	$0\geq 2$ (No)
$r_2: 2x+3y=12$	$(6,0)$ y $(0,4)$	$2x+3y\leq 12$	$0\leq 12$ (Sí)
$r_3: 3x+y=12$	$(4,0)$ y $(0,12)$	$3x+y\leq 12$	$0\leq 12$ (Sí)

La región factible tiene $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(4,0)$, $D\left(\frac{24}{7},\frac{12}{7}\right)$ y $E(0,4)$. Siendo D el punto de intersección de las rectas r_2 y r_3.



Veamos, pues, cuál es el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices.

Vértices	$A(0,2)$	$B(2,0)$	$C(4,0)$	$D\left(\frac{24}{7},\frac{12}{7}\right)$	$E(0,4)$
Valor de $z=5x+4y$	$8\leftarrow Mín.$	10	20	24	16

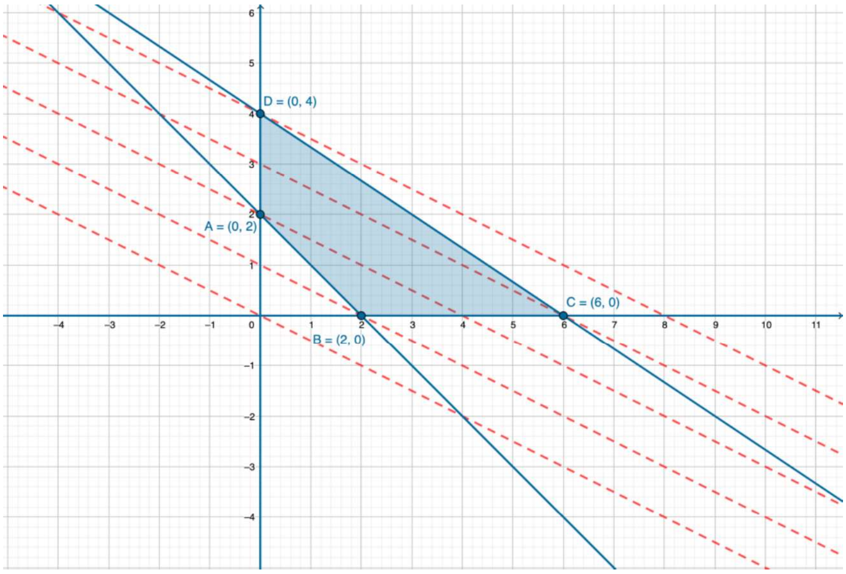
El valor mínimo es 8 y lo alcanza en el vértice $A(0,2)$.

10. Dibuja la región factible y utiliza el método gráfico para hallar el mínimo y el máximo de z, dado el siguiente problema de programación lineal:

Función objetivo:

$$z = x + 2y$$

s.a. $$\begin{cases} x + 2y \leq 4 \\ 2x + y \leq 4 \\ x \geq, y \geq 0 \end{cases}$$



Mediante el método gráfico observamos que la función objetivo alcanza el mínimo en el vértice $B(2,0)$ con un valor $z = 2$; mientras que el máximo lo alcanza en el vértice $D(0,4)$ con un valor $z = 8$.

11. Taller artesano de zapatería. Resuelve el problema de programación lineal de los artesanos zapateros del Ejemplo 12, es decir, determina el número de pares de botas y de sandalias que se deben fabricar diariamente para maximizar los ingresos por venta.

Maximizar $z = 100x + 90y$

$$\begin{cases} 3x+2y\leq 60 \\ x+2y\leq 40 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$$

Calculemos el valor de la función objetivo en los vértices de la región factible.

Vértices	Valor de $z=100x+90Y$
$A(0,0)$	0
$B(20,0)$	2000
$C(10,15)$	$2350 \leftarrow \textit{Máximo}$
$D(0,20)$	1800

El máximo se alcanza en el vértice $C(10,15)$ con un valor $z=2350$. Es decir, se deben fabricar diariamente 10 pares de botas y 15 pares de sandalias con el fin de lograr unos ingresos de 2350€.

12. Ayuda humanitaria. Una ONG está recogiendo alimentos y ropa para enviar a un municipio isleño que ha sufrido graves inundaciones. Cada caja de alimentos que preparan considera que dará de comer a 15 personas, mientras que cada caja de ropa ayudará a 5 personas. Cada caja de comida de 30 $\mathbf{dm^3}$ pesa 10 kg, y cada caja de ropa de 10 $\mathbf{dm^3}$ pesa 2 kg. Cada contenedor que se envía por barco admite un máximo de 14 000 $\mathbf{dm^3}$ y el peso no puede superar los 4400 kg. ¿Cuántas cajas de comida y de ropa se pueden enviar en cada contenedor para maximizar el número de personas a las que les llegue la ayuda?

Designemos por x e y el número de cajas de comida y de ropa, respectivamente, que se pueden enviar en cada contenedor.

Con la información del enunciado podemos construir la siguiente tabla:

	(x) Caja de comida	(y) Caja de ropa	
Volumen (dm3)	30	10	1400
Peso (kg)	10	2	4400
Personal	15	5	

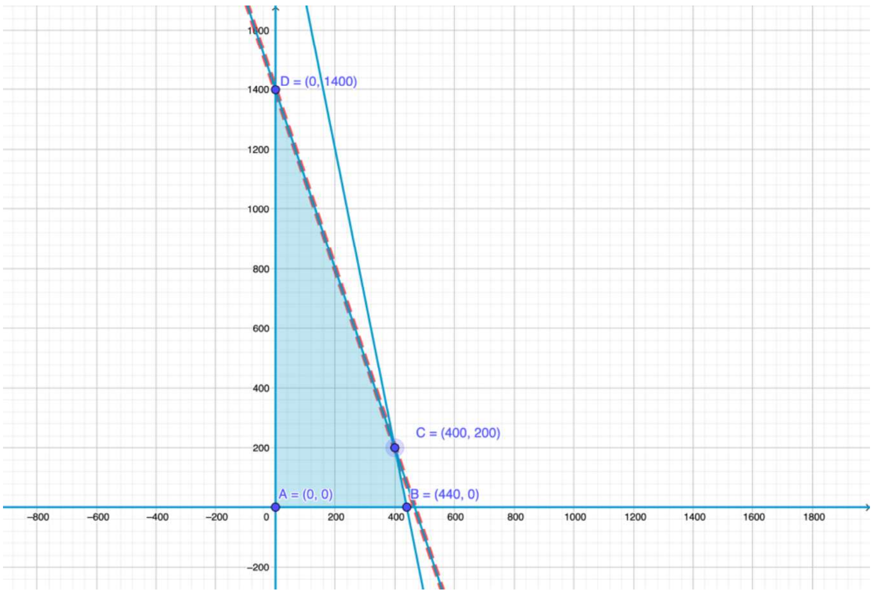
El problema de programación lineal es:

Maximizar $z = 15x + 5y$

s.a. $\begin{cases} 30x + 10y \leq 14000 \\ 10x + 2y \leq 4400 \\ x \geq 0, y \geq 0, x_1 y \in z \end{cases}$

Simplificando resuelta:

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 1400 \\ 5x + y \leq 2200 \\ x_1 y \geq 0, x_1 y \in z \end{cases}$



La región factible tiene por vértices $A(0,0)$, $B(440,0)$, $C(400,200)$ y $D(0,1400)$. Donde C es la intersección de las rectas $3x + y = 1400$ y $5x + y = 2200$.

Veamos, pues, cuál es el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices.

Vértices	Valor de $z = 15x + 5y$

$A(0,0)$ $B(440,0)$ $C(400,200)$ $D(0,1400)$	0 6600 $7000 \leftarrow Máximo$ $7000 \leftarrow Máximo$

Por tanto, el máximo se alcanza en todos los puntos de la arista CD. Ahora bien, como xxx los valores enteros, se puede comprobar en la gráfica que son:

Caja de comida (x)	Caja de ropa (y)
400 200 0	200 800 1400

Esto es, para maximizar el número de personal que reciban la ayuda que es de 7000, se puede lograr enviando 400 cajas de comida y 200 de ropa, 200 de comida y 800 de ropa o solo 1400 cajas de ropa.

4. Problemas de programación lineal con múltiples óptimos

13- Determina el máximo de la función objetivo $z = 2x + 4y$ **en la región factible determinada por las siguientes restricciones:**

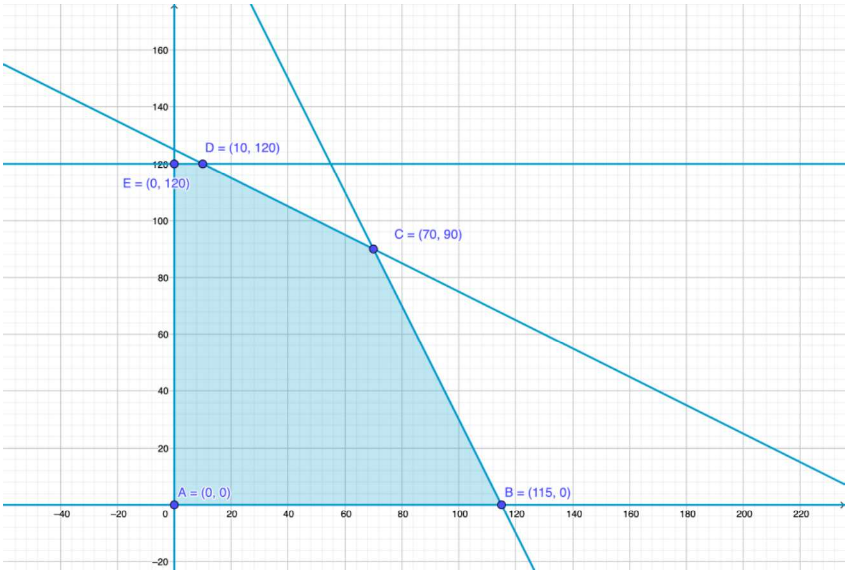
$$\begin{cases} 2x + y \le 230 \\ x + 2y \le 250 \\ y \le 120 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

Construimos la siguiente tabla para dibujar la región factible:

Ecuación	Punto de corte en los ejes	Inecuación	Punto de prueba $P(0,0)$

$r_1: 2x+y=230$ $r_2: x+2y=250$ $r_3: y=120$	(115, 0)y $(0,230)$ $(250,0)$ y $(0,125)$ $(0,120)$	$2x+y\leq 230$ $x+2y\leq 250$ $y\leq 120$	$0\leq 230$ (Sí) $0\leq 250$ (Sí) $0\leq 120$ (Sí)

La región factible tiene por vértices $A(0,0)$, $B(115,0)$, C(70, 90) $D(10,120)$ y $E(0,120)$. Donde c es la intersección de r1 y r2 y D la intersección de r_2 y r_3.



Calculemos el valor de la función objetivo de los vértices.

Vértices	$A(0,0)$	$B(115,0)$	C(70, 90)	$D(10,120)$	$E(0,120)$
$z=2x+4y$	0	230	$500 \leftarrow Máx$	$500 \leftarrow Máx$	480

El valor máximo de la función objetivo es $z_{\max}=500$ y se alcanza en los infinitos puntos de la arista CD .

14- Se considera el siguiente sistema de inecuaciones lineales: $\begin{cases} x-2y \le 2 \\ 2x+y \le 6 \\ x+2y \le 5 \\ x+y \ge 1 \end{cases}$

Dibuja la región factible en el primer cuadrante.

Maximiza la función objetivo $z = 4x+5y$.

Maximiza la función objetivo $w = 2x+y$.

Construimos la siguiente tabla para dibujar la región factible:

Ecuación	Punto de corte en los ejes	Punto de prueba $P(0,0)$
r1: x – 2y = 2	$(2,0)$ y $(0,-1)$	$0 \le 2$ Sí
$r_2 : 2x+y=6$	$(3,0)$ y $(0,6)$	$0 \le 6$ Sí
$r_3 : x+2y=5$	$(5,0)$ y $(0,5/2)$	$0 \le 5$ Sí
$r_4 : x+y=1$	$(1,0)$ y $(0,1)$	$0 \ge 1$ No

Veamos cuáles son los vértices de la región factible.

$A(1,0)$, $B(2,0)$

C es la intersección de las rectas r_1 y r_2

$\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x+y=6 \end{cases}$ $\quad C\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$

D es la intersección de las rectas r_2 y r_3

