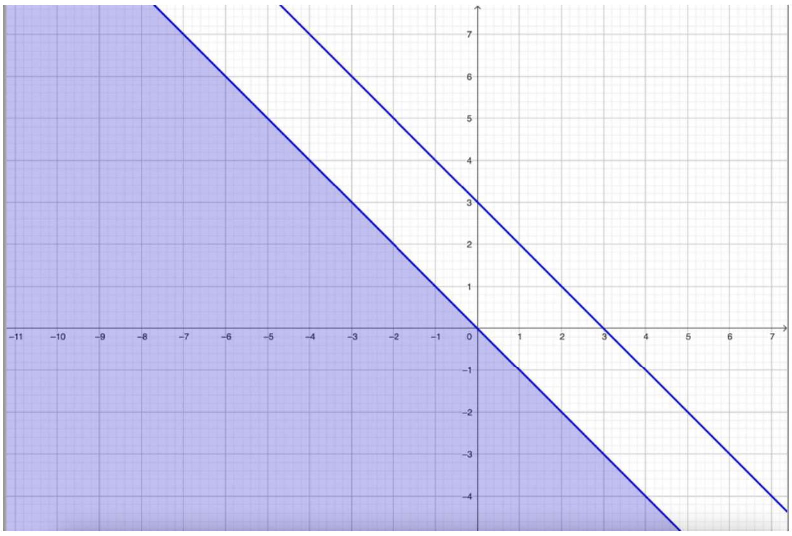
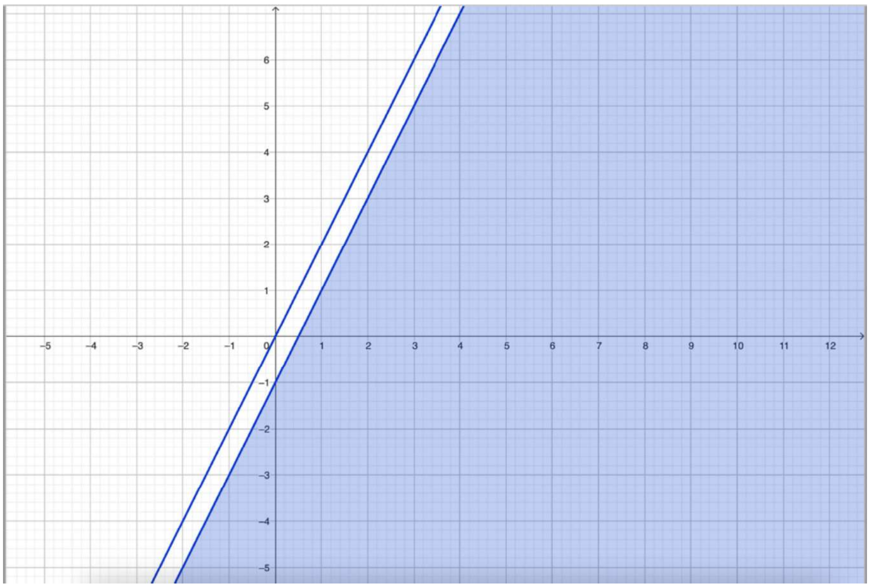


b) Veamos la información de la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = 2x - y = 0$	(0, 0)	$2x - y \geq 0$	$P(1,0): -1 \geq 0$	No
$r_2 = 2x - y = 1$	(1/2, 0) y (0, -1)	$2x - y \geq 1$	$P(0,0): 0 \geq 1$	No

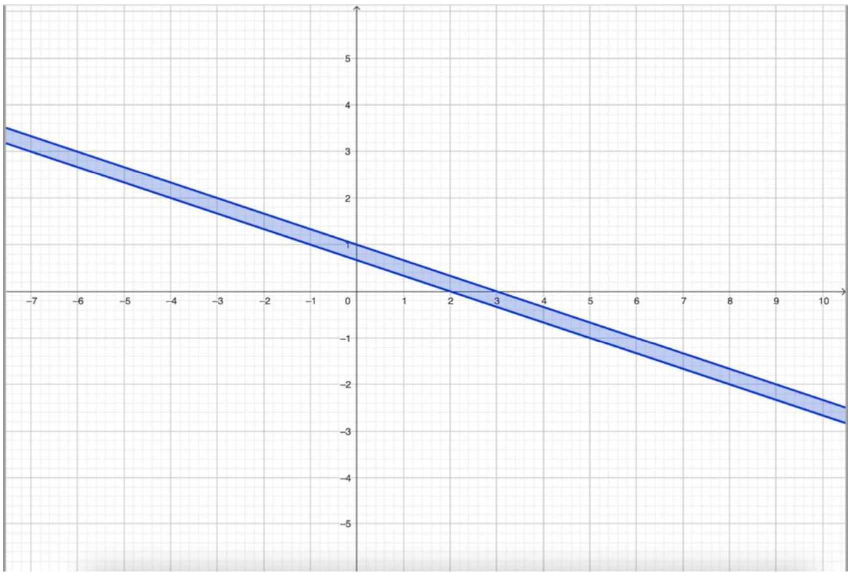
El recinto solución es la región abierta de la figura.



d) Veamos la información de la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = x + 3y = 3$	(3, 0) y (0, 1)	$x + 3y \leq 3$	$0 \leq 3$	Sí
$r_2 = x + 3y = 2$	(2, 0) y (0, 3/2)	$x + 3y \geq 2$	$0 \geq 2$	No

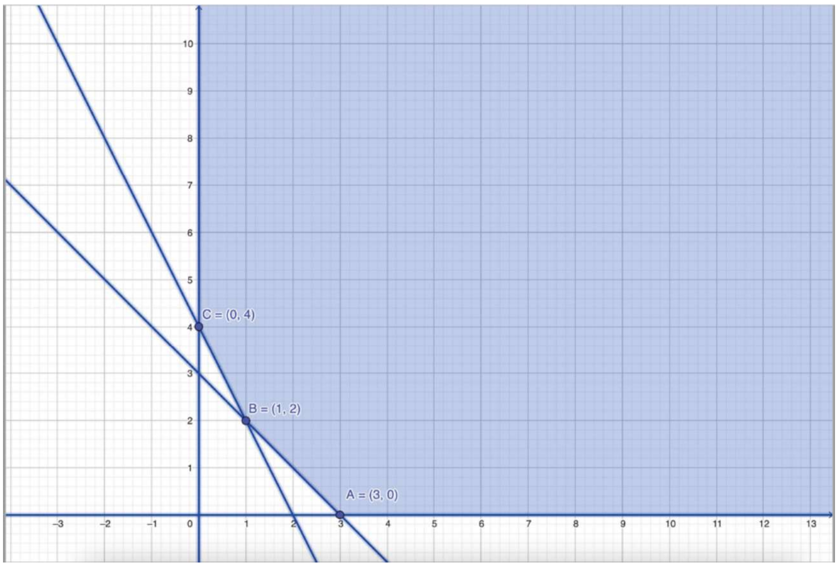
El recinto solución es la región abierta de la figura.



e) Veamos la información de la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = x + y = 3$	(3, 0) y (0, 3)	$x + y \geq 3$	$0 \geq 3$	No
$r_2 = 2x + y = 4$	(2, 0) y (0, 4)	$2x + y \geq 4$	$0 \geq 4$	No

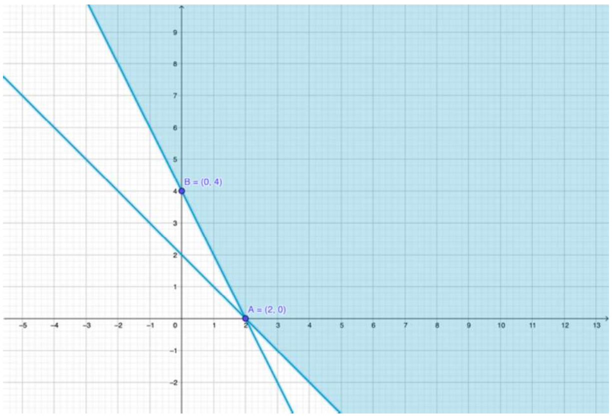
El recinto solución viene dado por región abierta de la figura con vértices en A(3, 0), B(1, 2) y C(0, 4).



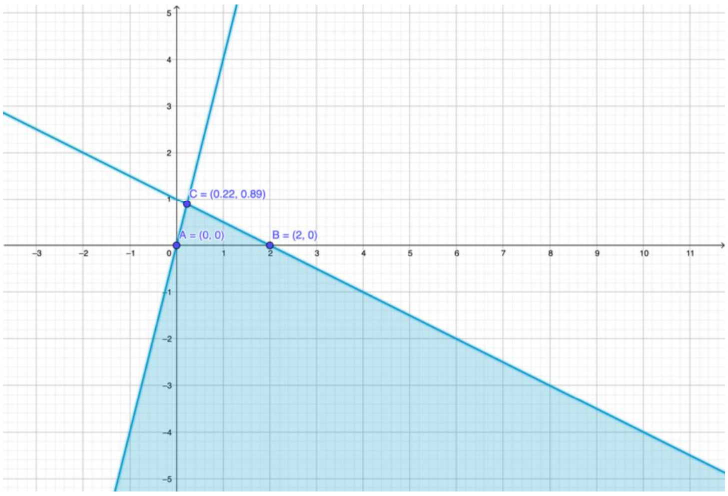
26. Dibuja el recinto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones. Halla los vértices y analiza si se trata de una región cerrada o abierta.

$\boldsymbol{a)}\ \begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ 4x - y \geq 0 \end{cases}$

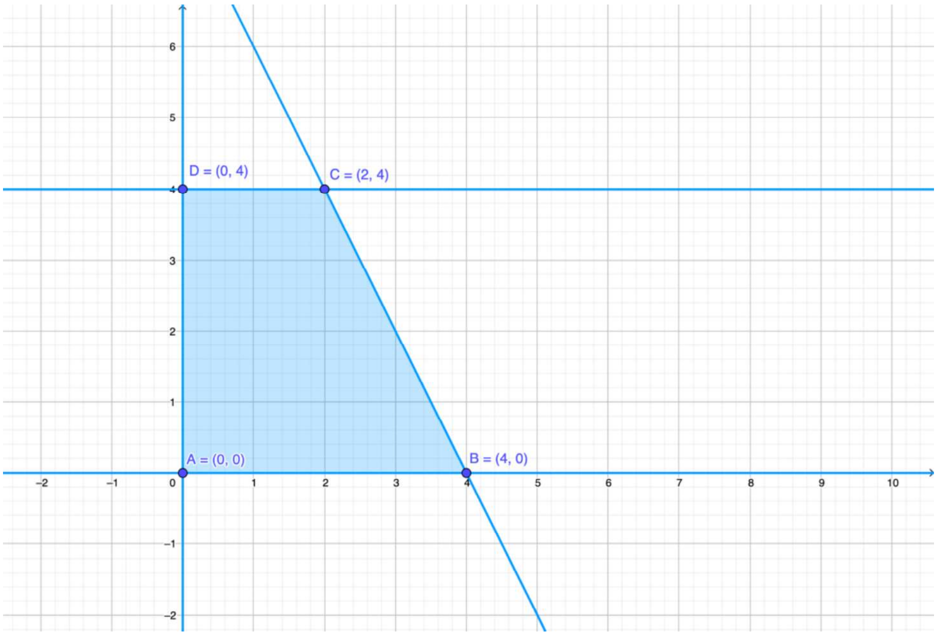
a)



b)



27. Halla un sistema de inecuaciones cuya solución sea el recinto limitado por el paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(2,4)$ **y** $(0,4)$.



La recta que pasa por $A(0,0)$ y $B(4,0)$ es: $y=0$

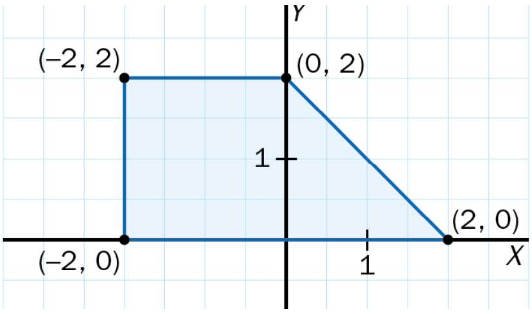
La recta que une $B(4,0)$ y $C(2,4)$ es: $\frac{y-4}{0-4}=\frac{x-2}{4-2} \Longrightarrow 2y-8=-4x+8 \Longrightarrow 2x+y=8$

Mientras que la recta que pasa por $C(2,4)$ y $D(0,4)$, y por $A(0,0)$ y $D(0,4)$ son, respectivamente, la recta horizontal $y=4$ y la recta vertical $x=0$.

Como el paralelogramo está situado en el primer cuadrante y, además, el punto de prueba $P(0,0)$ está en él, entonces el sistema de inecuación correspondiente es:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+y \leq 8 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

28. Encuentra un sistema de inecuaciones que tenga por recinto solución el de la siguiente figura:



Si llamar r_1 a la recta que une $(-2,0)$ y $(2,0)$, r_2 a la que une $(2,0)$ y $(0,2)$, r_3 a la recta que pasa por $(0,2)$ y $(-2,2)$ y, finalmente, r_4 la recta que une $(-2,2)$ y $(-2,0)$, entonces:

$$r_1 : y = 0$$
$$r_2 : \frac{y-2}{0-2} = \frac{x-0}{2-0} \Rightarrow 2y-4 = -2x \Rightarrow x+y=2$$
$$r_3 : y = 2$$
$$r_4 : x = -2$$

A continuación, elegimos un punto interior del recinto, por ejemplo $P(0,1)$ y lo introducimos en cada una de las rectas para decidir qué inecuación verificar. Así:

En $r_1 : 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$

En $r_2 : 1 \leq 2 \Rightarrow x+y \leq 2$

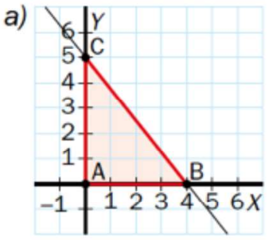
En $r_3 : 1 \leq 2 \Rightarrow y \leq 2$

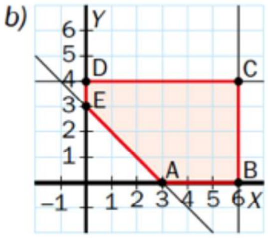
En $r_4 : 0 \geq -2 \Rightarrow x \geq -2$

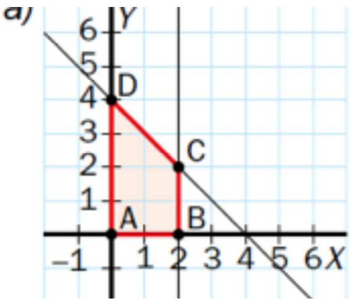
El sistema de inecuaciones buscado es:

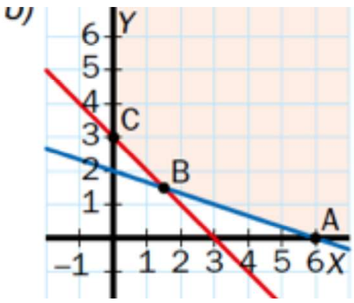
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x+y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

29. Halla un sistema de inecuaciones cuya solución sea la región de la figura.









Se trata de una región del x y, por tanto, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Además es un triángulo delimitado por los vértices A (0, 0) , B (4, 0) y C (0, 5). Así:

$$\frac{y-0}{5-0} = \frac{x-4}{0-4} \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{x-4}{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y = 5x - 20 \Rightarrow 5x + 4y = 20$$

Como el punto P (0, 0) está en la región, entonces la inecuación es de la forma $5x + 4y \leq 20.$ Por tanto, el sistema de inecuaciones correspondiente a esa región es:

$$\begin{cases} 5x + 4y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

b) En este caso la región está delimitada por el polígono A (3, 0) , B (6, 0), C (6, 4), D (0, 4) y E (0, 3).

Calculamos las tres rectas $\overline{AE}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ del primer cuadrante $(x \geq 0, y \geq 0)$.

• Recta $\overline{AE}$: $\frac{y-0}{3-0} = \frac{x-3}{0-3} \Rightarrow -3y = 3x - 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x + 3y = 9 \Rightarrow x + y = 3$$

• Recta $\overline{BC}$: $x = 6$

• Recta $\overline{CD}$: $y = 4$

Por tanto, el sistema que representa a la región de la figura es:

$$\begin{cases} x+y\geq 3 \\ x\leq 6 \\ y\leq 4 \\ x\geq,0, y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y\geq 3 \\ 0\leq x\leq 6 \\ 0\leq y\leq 4. \end{cases}$$

c) La región queda delimitada por el polígono A (0, 0) , B (2, 0), C (2, 2) y D (0, 4).

Como se encuentra en el primer cuadrante, entonces $x\geq 0$, $y\geq 0.$

La recta $\overline{BC}$ es una linea vertical: $x=2.$

Mientras que la recta $\overline{CD}$ es:

$$\frac{y-4}{2-4}=\frac{x-0}{2-0}\Rightarrow 2y-8=-2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2y=8\Rightarrow x+y=4.$$

Como el punto (0, 0) pertenece a la región, entonces la inecuación es: $x+y\leq 4.$

El sistema es: $\begin{cases} x+y\leq 4 \\ x\leq 2 \\ x\geq,0, y\geq 0. \end{cases}$

d) Se trata de la región abierta del primer cuadrante de vértices A(6, 0), B (3/2, 3/2) y

C(0, 3).

• Recta $\overline{BC}$ corta a los ejes en los puntos (3, 0) y (0, 3) y tiene de ecuación: $\frac{y-3}{0-3}=\frac{x-0}{3-0}\Rightarrow 3y-9=-3x\Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x+3y=9\Rightarrow x+y=3$$

• Recta $\overline{AE}$: corta a los ejes en los puntos (6, 0) y (0, 2) y tiene por ecuación:

$$\frac{y-2}{0-2}=\frac{x-0}{6-0}\Rightarrow 6y-12=-2x\Rightarrow$$

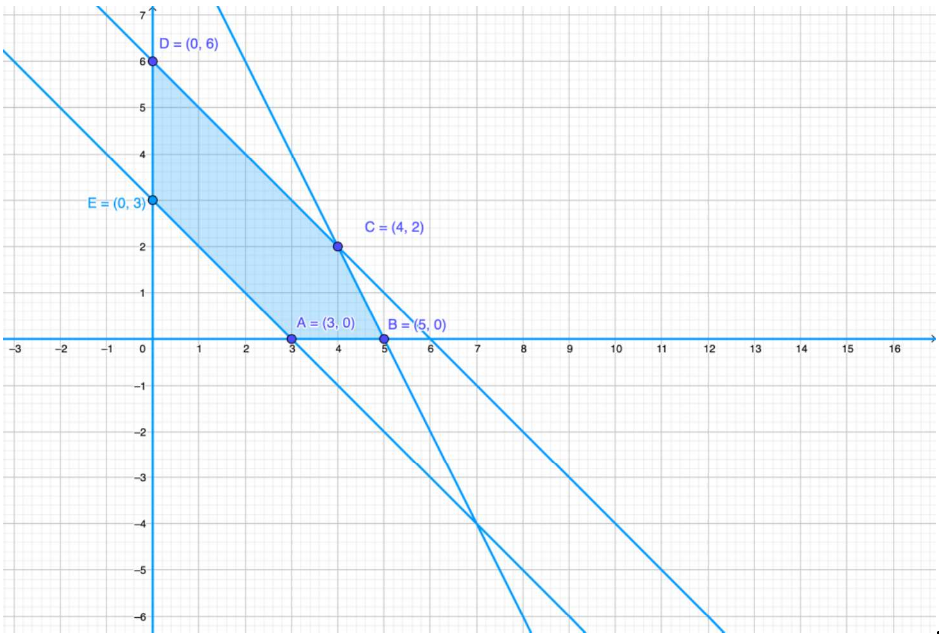
$$\Rightarrow 2x+6y=12\Rightarrow x+3y=6$$

En consecuencia, como el punto P (0, 0) no está en la región las inecuaciones xxx de la forma $x+y\geq 3$ y $x+3y\geq 6$.

Así: $\begin{cases} x+y\geq 3 \\ +3\geq 6 \\ x\geq,0, y\geq 0. \end{cases}$

30. Calcula los vértices de la región solución del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+y\leq 6 \\ 2x+y\leq 10 \\ x+y\geq 3 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$



Los vértices de la región factible son $A(3,0)$, $B(5,0)$, $C(4,2)$, $D(0,6)$ y $E(0,3)$. Donde el vértice C es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+y=10 \end{cases} \Rightarrow x=4, y=2$$

31. Representa gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones y halla los vértices:

$$a)\begin{cases} x+y\le 8 \\ 2x+y\le 10 \\ x+y\ge 2 \\ x,y\ge 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+2y\le 1(\\ x+2y\ge 1 \\ x+y\le 8 \\ x+y\le 2 \\ x\ge 0,\ y\ge (\end{cases}$$

Solución:

a) Veamos la información de la siguiente tabla:

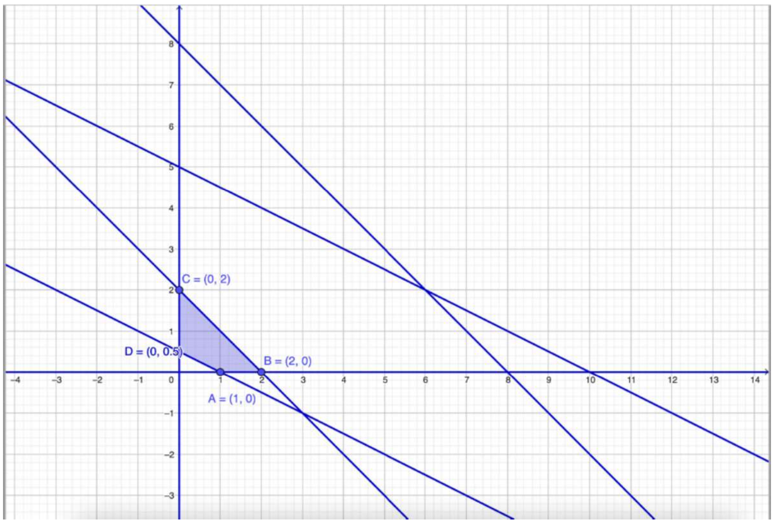
Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = x + y = 8$	(8, 0) y (0, 8)	$x + y \leq 8$	$0 \leq 8$	Sí
$r_2 = 2x + y = 10$	(5, 0) y (0, 10)	$2x + y \leq 10$	$0 \leq 10$	Sí
$r_3 = x + y = 2$	(2, 0) y (0, 2)	$x + y \geq 2$	$0 \geq 2$	No

El recinto factible será delimitada por el polígono de vértices A(2, 0), B(5, 0), C(2, 6), D(0, 8), E(0, 2).

b) Veamos la información de la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = x + 2y = 10$	(10, 0) y (0, 5)	$x + y \leq 10$	$0 \leq 10$	Sí
$r_2 = x + 2y = 1$	(1, 0) y (0, 1/2)	$2x + y \geq 1$	$0 \geq 1$	No
$r_3 = x + y = 8$	(8, 0) y (0, 8)	$x + y \leq 8$	$0 \leq 8$	Sí
$r_4 = x + y = 2$	(2, 0) y (0, 2)	$x + y \leq 2$	$0 \leq 2$	Sí

El recinto factible será delimitada por el polígono de vértices A(1, 0), B(2, 0), C(0, 2), D(0, 1/2).



32. La Agencia Espacial Europea contará con un presupuesto de 2,4 millones de euros para financiar misiones sobre la observación de la Tierra y programas de transporte espacial. Cada misión supone una inversión de 200 000 € y cada programa 100 000 €. En la decisión final deben alcanzarse los 2 millones de euros. Por otra parte, el número de misiones debe ser, al menos, cuatro, pero no más de la mitad del número de programas.

a) Si designamos con x el número de misiones y con y el número de programas, escribe un sistema de inecuaciones que describa el número posible de misiones y programas.

b) Dibuja la solución y calcula los vértices.

Solución:

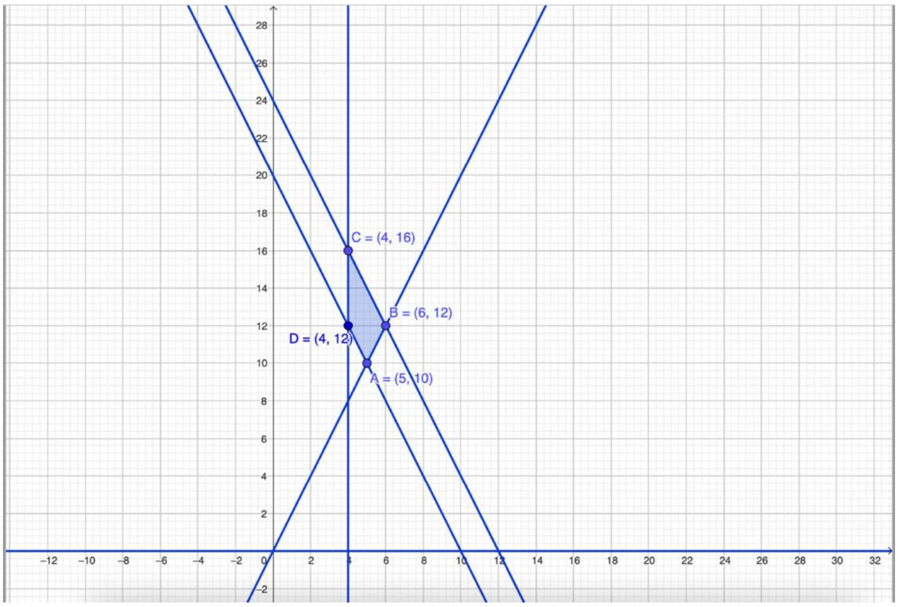
a) El enunciado da lugar al siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}1y \leq 2{,}4 \leftarrow \textit{Presupuesto máximo} \\ 0{,}2x + 0{,}1y \geq 2 \leftarrow \textit{Presupuesto mínimo} \\ x \geq 4 \leftarrow \textit{Número de misiones} \\ x \leq y/2 \leftarrow \textit{Número de misiones} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 24 \\ 2x + 1y \geq 20 \\ x \geq 4 \\ y \leq 2x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

b) Con el fin de dibujar la región factible construimos la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = 2x + y = 24$	(12, 0) y (0, 24)	$2x + y \leq 24$	$P(0,0): 0 \leq 24$	Sí
$r_2 = 2x + y = 20$	(10, 0) y (0, 20)	$2x + y \geq 20$	$P(0,0): 0 \geq 20$	No
$r_3 = x = 4$	(4, 0)	$x \geq 4$	$P(0,0): 0 \geq 4$	No
$r_4 = y = 2x$	(0, 0)	$y \geq 2x$	$P(1,0): 0 \geq 1$	No

El recinto factible será delimitada por el polígono de vértices A(5, 10), B(6, 12), C(4, 16), D(4, 12).



Programación lineal

33. Dado el siguiente problema de programación lineal:

maximizar $z = 20x + 15y$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

a) Determina la región factible y los vértices de esta.

b) Utiliza el método gráfico para resolverlo.

Solución:

a) Para determinar la región factible nos ayudamos de la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = x + 2y = 80$	(80, 0) y (0, 40)	$x + 2y \leq 80$	$0 \leq 80$	Sí
$r_2 = 3x + 2y = 120$	(40, 0) y (0, 60)	$3x + 2y \leq 120$	$0 \leq 120$	Sí

El recinto factible será delimitada por el polígono de vértices A(0, 0), B(40, 0), C(20, 30), D(0, 40).

b) Utilizando el método gráfico desplazamos la función objetivo z = 20x + 15y paralela a sí misma solo la región factible alcanza el máximo en el vértice C(20, 30) con un valor $z_{máx}$ = 850.

34. Se considera el sistema de inecuaciones lineales siguiente:

$2x + y \leq 36$, $x + 3y \leq 48$, $x \geq 6$, $y \geq 4$

a) Representa la región factible.

b) Encuentra el punto de esa región factible en el que la función z = 7x + 5y alcanza el máximo.

Solución:

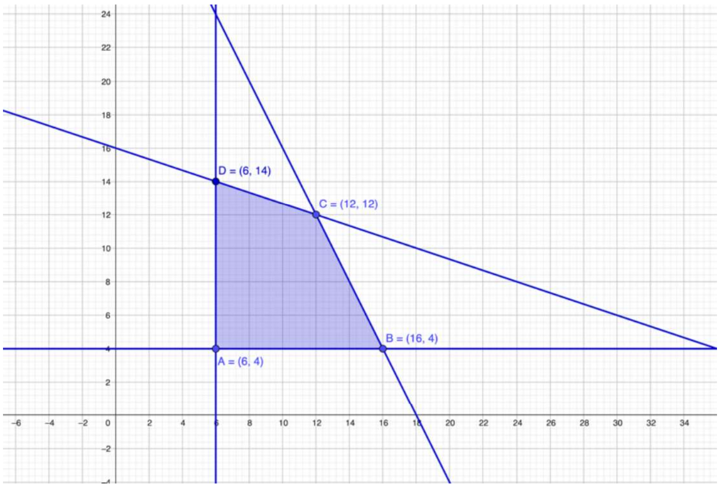
a) 2x + y = 36

x	y
0	36
18	0

x + 3y = 48

x	y
0	16
48	0

El recinto factible será delimitada por el polígono de vértices A(6, 4), B(16, 4), C(12, 12), D(6, 14).



b)

Vértices	Valor z = 7x + 5y
A(6, 4)	62
B(16, 14)	182 <- Máximo
C(12, 12)	144
D(6, 14)	112

El máximo se alcanza en el vértice B(16, 14) y tiene un valor máximo $z_{máx}$ = 182.

35. Dado el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 3x+5y \le 45 \\ 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 6 \\ y \le 2x \end{cases}$$

a) Calcula la región factible y sus vértices.

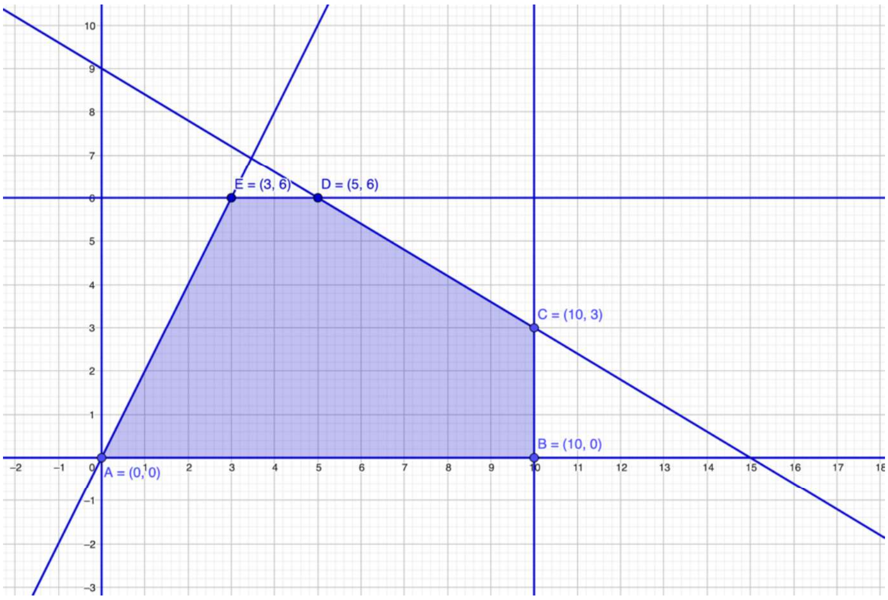
b) Determina el máximo de z = x + 2y.

Solución:

a) z: 3x + 5y = 45

x	y
0	9
15	0

El recinto factible será delimitada por el polígono de vértices A(0, 0), B(10, 0), C(10, 3), D(5, 6) y E(3, 6).



b)

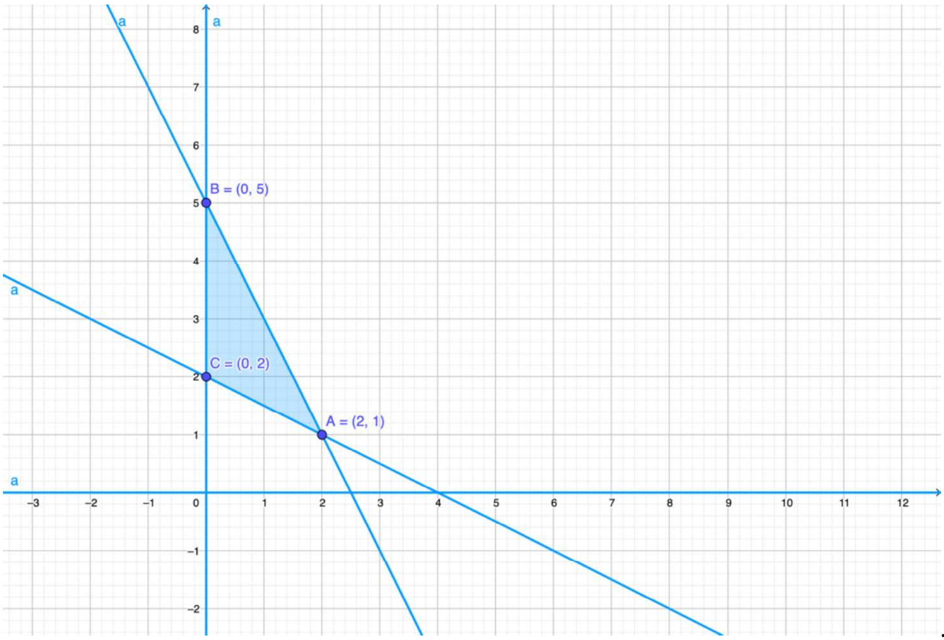
Vértices	Valor z = x + 2y
A(0, 0)	0
B(10, 0)	10
C(10, 3)	16
D(5, 6)	17<- Máximo
E(3, 6)	15

El máximo se alcanza en el vértice D(5, 6) y tiene un valor máximo $z_{máx} = 17$.

36. Resuelve el problema de programación lineal siguiente:

Maximizar $z = 4x + y$

s.a. $\begin{cases} 2x + y \leq 5 \\ x + 2y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$



La región factible queda limitada por el triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(0,5)$ y $C(0,2)$. Siendo A el punto de intersección del sistema:

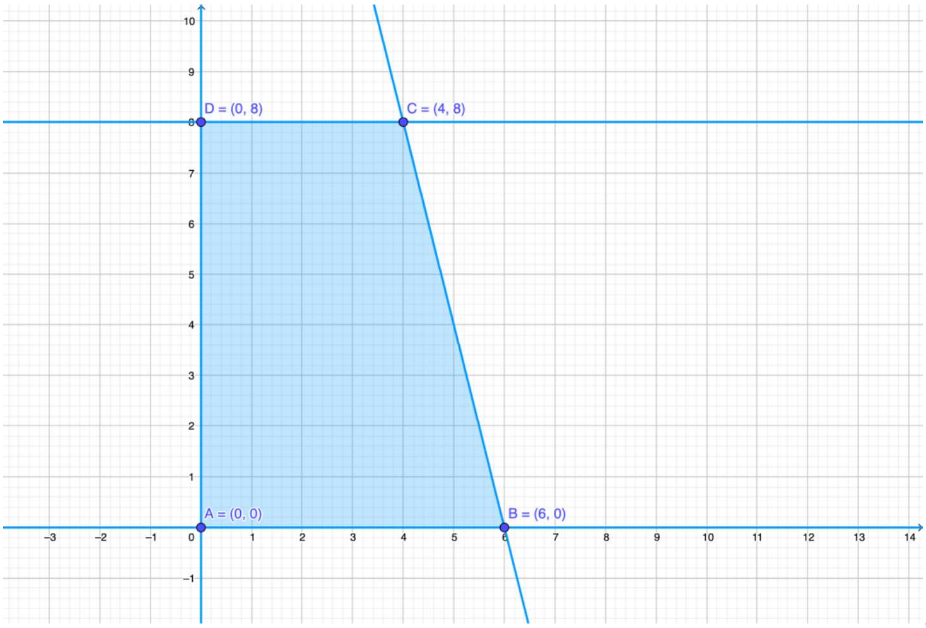
$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=1$$

Veamos el valor de la función objetivo en los vértices del triángulo

Vértices	Valor de $z=4x+y$
$A(2,1)$	$9 \leftarrow Máximo$
$B(0,5)$	5
$C(0,2)$	2

La función objetivo alcanza el máximo en el vértice $A(2,1)$ con un valor $z_{Máx}=9$.

37. La función objetivo de un problema de programación lineal es $z=3x+7y$, y la región factible está delimitada por el polígono de vértices $A(0,0)$ $B(6,0)$, $C(4,8)$ y $D(0,8)$. Determina las inecuaciones que delimitan la región factible y encuentra el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices para determinar el máximo de la función objetivo.



Comenzamos hallando las rectas que forman este polígono. Así:

La recta que pasa por AB es horizontal: $y = 0$

La recta que pasa por los puntos B y C es:

$$\frac{y-8}{0-8} = \frac{x-4}{6-4} \Rightarrow 2y - 16 = -8x + 32 \Rightarrow 4x + y = 24$$

La recta CD es horizontal: $y = 8$

Y la recta que une A y D es vertical: $x = 0$

A continuación, elegimos un punto de prueba interno de la región, por ejemplo $P(1,1)$. Así:

$$1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$$

$$4 + 1 = 5 \leq 24 \Rightarrow 4x + y \leq 24$$

$$1 \leq 8 \Rightarrow y \leq 8$$

$$1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

Por tanto, el sistema de inecuaciones es:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 4x + y \leq 24 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices

Vértices	Valor de $z = 3x + 7y$
$A(0,0)$	0
$B(6,0)$	18
$C(4,8)$	$68 \leftarrow \textit{Máximo}$
$D(0,8)$	56

El máximo de la función objetivo es 68 y se alcanza en el vértice $C(4,8)$.

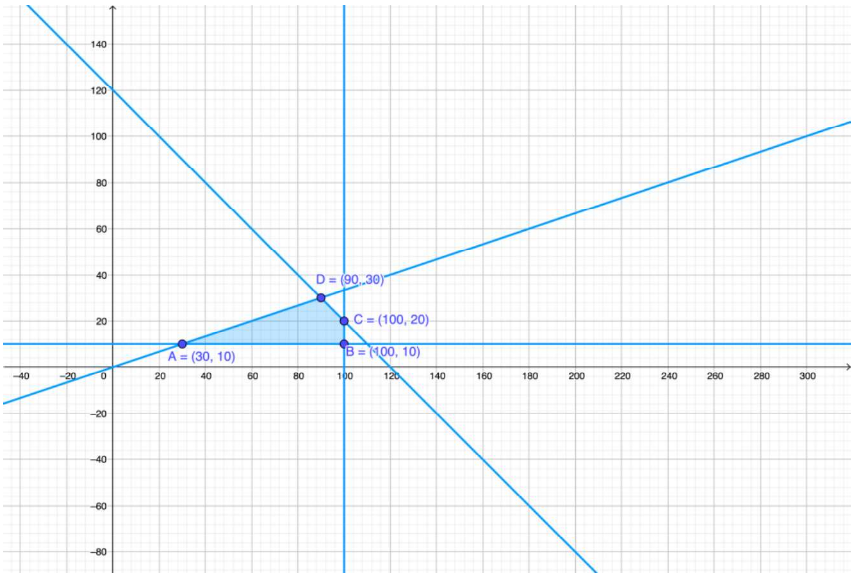
38. Se dan las inecuaciones lineales siguientes:

$x + y \leq 120$, $3y \leq x$, $x \leq 100$, $y \geq 10$

Representa la región factible.

¿En qué punto de esa región factible la función $z = 25x + 20y$ **alcanza el máximo?**

a)



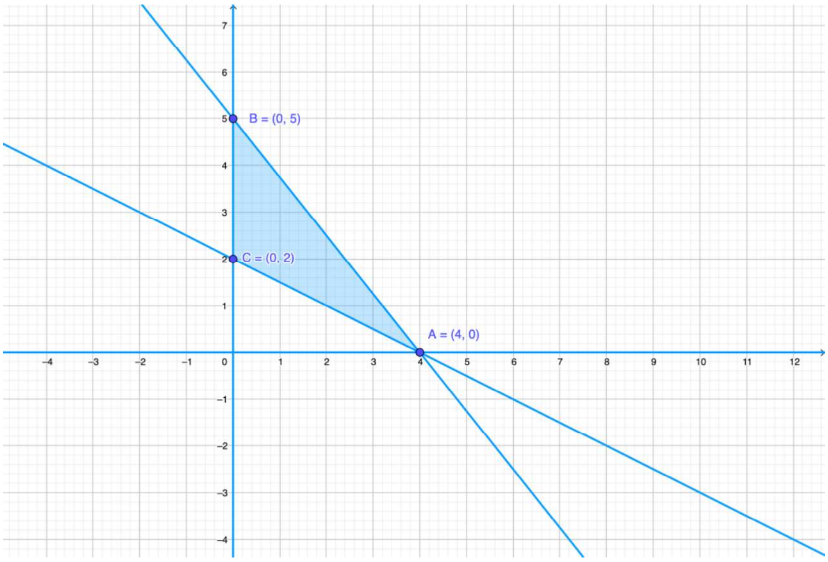
La región factible queda delimitada por los vértices $A(30,10)$, $B(100,10)$, $C(100,20)$ y $D(90,30)$.

Vértices	Valor de $z = 25x + 20y$
$A(30,10)$	950
$B(100,10)$	2700
$C(100,20)$	$2900 \leftarrow Máximo$
$D(90,30)$	2850

La función $z = 25x + 20y$ alcanza el máximo en el vértice $C(100,20)$ con un valor de 2900.

39. Halla el mínimo y el máximo de la siguiente función objetivo: $z = 30 - x - y$

s.a. $\begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$



La región factible queda limitada por el triángulo de vértices $A(4,0)$, $B(0,5)$ y $C(0,2)$.

El valor de la función objetivo en los vértices viene dado en la siguiente tabla:

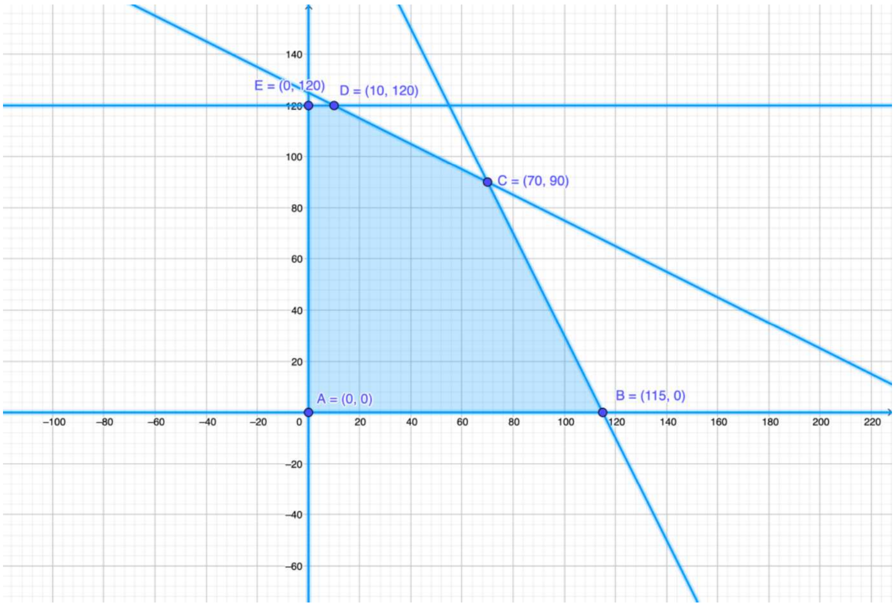
Vértices	Valor de $z = 30 - x - y$
$A(4,0)$	26
$B(0,5)$	$25 \leftarrow Mínimo$
$C(0,2)$	$28 \leftarrow Máximo$

$z_{Mín} = 25$ en el vértice $B(0,5)$

$z_{Máx} = 28$ en el vértice $C(0,2)$

40. Determina el máximo y el mínimo de la función objetivo z = 2x+ + 4y en la región factible determinada por las inecuaciones:

$2x + y \leq 230$, $x + 2y \leq 250$, $y \leq 120$, $x \geq 0$, $y \geq 0$



La región factible tiene por vértices $A(0,0)$, $B(115,0)$, $C(70,90)$, $D(10,120)$ y $E(0,120)$

Ahora, calculamos el valor de la función objetivo en los vértices

Vértices	Valor de $z = 2x + 4y$
$A(0,0)$	0
$B(115,0)$	$230 \leftarrow Mínimo$
$C(70,90)$	$500 \leftarrow Máximo$
$D(10,120)$	$500 \leftarrow Máximo$
$E(0,120)$	480

El máximo se alcanza en los infinitos puntos de la arista CD con un valor en todos ellos de $z_{Máx} = 500$. Por su parte, el mínimo se alcanza en el vértice $B(115,0)$ y con un valor $z_{Mín} = 230$.

41. Dado el siguiente problema de programación lineal:

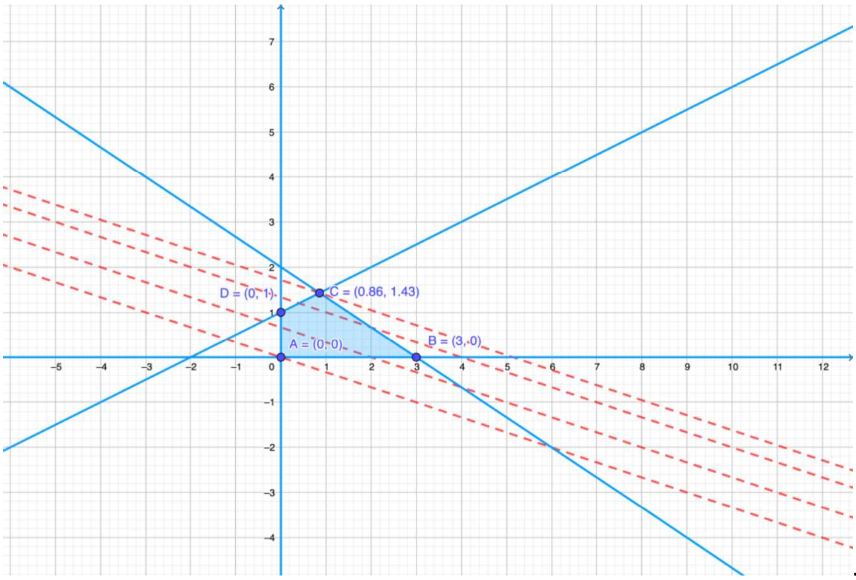
Máx $z = x + 3y$ s.a. $\begin{cases} 2x + 3y \le 6 \\ x - 2y \ge -2 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

Resuélvelo gráficamente y determina la solución óptima.

Si se introduce la restricción: $y \le 1,5$ **, ¿cuál es la solución óptima?**

Analiza gráficamente qué ocurre si en la función objetivo el coeficiente 1 pasa a ser 2, es decir, $z = 2x + 3y$. ¿Cuál es la solución en este caso?

a)



El máximo se alcanza en el vértice $C\left(\frac{6}{7}, \frac{10}{7}\right)$ con un valor $z_{máx} = \frac{36}{7}$.

Al introducir esta restricción no cambia la región factible y, por tanto, la solución óptima es la misma.