9 Probabilidad

Actividades propuestas

Sucesos

1. Cuatro empresas, *A*, *B*, *C* y *D*, se presentan a un concurso de diseños de contenedores de reciclaje. Si solo pueden conseguir la adjudicación tres de ellas, calcula el espacio muestral de este experimento.

Sean *A*, *B*, *C* y *D* los sucesos que representan que las empresas *A*, *B*, *C* y *D*, respectivamente, consiguen la adjudicación del concurso de contenedores.

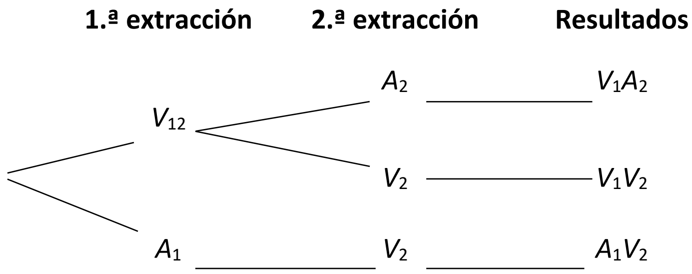
Por tanto, el espacio muestral es:

$$E = \{ABC, ABD, BCD, ACD\}$$

2. Una caja contiene dos fichas verdes y una amarilla. Si se sacan al azar, de una en una, todas las fichas, ¿cuál es el espacio muestral?

Designamos para V_1 y V_2 que la primera y segunda ficha extraída sea verde. Mientras que A_1 y A_2 representan que la ficha amarilla ha salido en primer y segundo lugar, respectivamente.

El diagrama de árbol que representa este experimento puede ser el siguiente:



Así pues, el espectro muestral es:

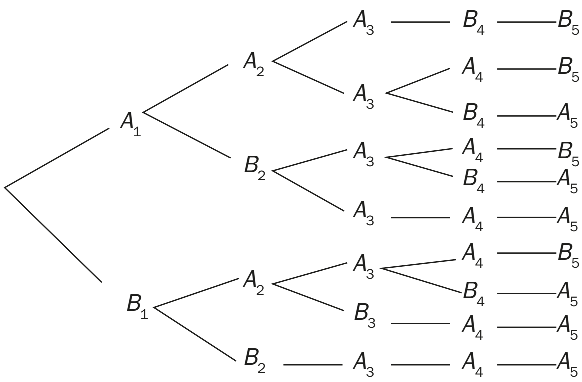
$$E = \{V_1A_2,\ V_1V_2,\ A_2V_2\}$$

3. En la cola de un supermercado hay tres chicas y dos chicos. Describe mediante un diagrama de árbol el espacio muestral de las distintas posiciones que pueden ocupar.

Sean A_i y B_i los sucesos que indican que una chica y un chico, respectivamente, ocupan el lugar i-ésimo en la cola del supermercado:

$$i = 1, 2, 3, 4, 5$$

El diagrama de árbol que representa este experimento es:



Por tanto, el espacio muestral es:

$$E = \{A_1A_2A_3B_4B_5, A_1A_2B_3A_4B_5, A_1A_2B_3B_4A_5, A_1B_2A_3A_4B_5, A_1B_2A_3B_4A_5, A_1B_2B_3A_4A_5,$$
$$B_1A_2A_3A_4B_5, B_1A_2A_3B_4A_5, B_1A_2B_3A_4A_5, B_1B_2A_3A_4A_5\}$$

4. Sean *I* el suceso «utiliza Instagram» y *S* el suceso «utiliza Spotify». Expresa mediante operaciones con sucesos los siguientes casos:

a) **«Utiliza alguna de las dos aplicaciones».**

b) **«Utiliza Spotify, pero no Instagram».**

c) **«No utiliza ninguna de las dos aplicaciones».**

d) **«Solo utiliza una de las dos aplicaciones».**

a) $I \cup S$

b) $S \cap \overline{I}$

c) $\overline{I} \cap \overline{S}$

d) $\left(\overline{I} \cap S\right) \cup \left(I \cap \overline{S}\right)$

5. **Se dan los sucesos: *A* = «hablar inglés», *B* = «hablar chino» y *C* = «hablar francés». Describe en términos del enunciado los siguientes sucesos: $A \cap B$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $A \cup B \cup C$ y $\overline{A \cup B}$.**

$A \cap B$ = «Habla inglés y chino».

$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ = «Habla inglés, pero no chino ni francés».

$A \cup B \cup C$ = «Habla al menos uno de los tres idiomas».

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} =$ «No habla ni inglés ni chino».

Probabilidad

6. **Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,75$. Calcula $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.**

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

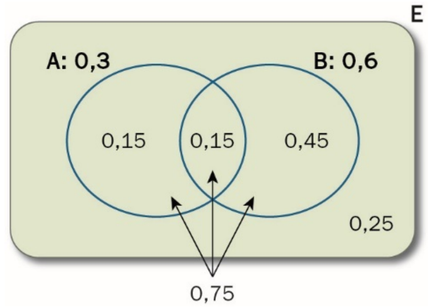
  $0,75 = 0,3 + 0,6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,9 - 0,75 = 0,15$

- $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,15 = 0,45$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,75 = 0,25$

propiedad 2

1.ª ley de

Observación: podemos efectuar una representación de los datos y resultados en un diagrama de Venn. Así:

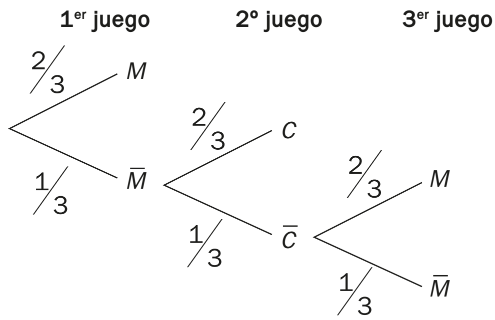


7. **Miguel y Carla juegan a tirar un dado por turnos. Si sale 1, 2, 3 o 4, el jugador que tira el dado gana el juego. Si sale 5 o 6, le toca el turno al siguiente jugador. Pablo comienza el juego, que continúa hasta el tercer lanzamiento.**

a) **¿Qué probabilidad tiene Miguel de ganar el juego en su primera tirada? ¿Y en la tercera?**

b) **¿Qué probabilidad tiene Carla de ganar el juego en su primera tirada?**

Designamos por M y C los sucesos que indican que Miguel y Carla, respectivamente, ganan el juego. Entonces, como Pablo comienza el juego, el diagrama de árbol que describe este juego es el siguiente:



La probabilidad de que se gane un juego es $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ y, por tanto, la de perder $\frac{1}{3}$.

a) La probabilidad de que Miguel gane el juego en la primera tirada es:

$$P(M)=\frac{2}{3}=0{,}6667 \text{ o } 66{,}67\ \%$$

Miguel ganará el juego en la tercera tirada si no ha ganado en la primera y Carla no ha ganado en la segunda. Es decir:

$$P\left(\bar{M}\cap\bar{C}\cap M\right)=P(\bar{M})\cdot P(\bar{C})\cdot P(M)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}=0{,}0741 \text{ o } 7{,}41\ \%$$

Son independientes

La probabilidad de que Miguel gane en la tercera tirada es del 7,41 %.

b) Carla ganará el juego en su primera tirada si Miguel no gana en el primer lanzamiento y, luego, gana Carla. Así:

$$P\left(\bar{M} \cap C\right) = P\left(\bar{M}\right) \cdot P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = 0{,}2222 \text{ o } 22{,}22\ \%$$

Son independientes

La probabilidad que tiene Carla de ganar el juego en su primera tirada es del 22,22 %.

8. Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}32$, $P(B) = 0{,}60$ y $P(A \cup B) = 0{,}80$. ¿Son *A* y *B* dos sucesos compatibles? Calcula $P\left(\bar{A} \cap B\right)$ y $P\left(\bar{A} \cup B\right)$.

A y *B* serán dos sucesos compatibles si $A \cap B \neq 0$, o lo que es equivalente, $P\left(A \cap B\right) \neq 0$.

Calculemos, pues, cuál es el valor de $P\left(A \cap B\right)$.

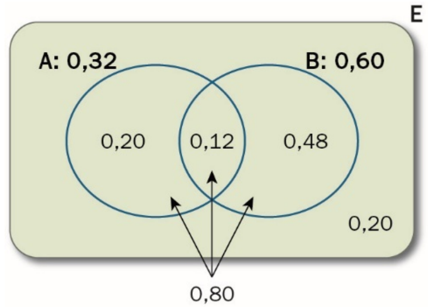
$$P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \cap B\right) \Rightarrow P\left(A \cap B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \cup B\right) =$$
$$= 0{,}32 + 0{,}60 - 0{,}80 = 0{,}12$$

Luego, *A* y *B* sí son compatibles.

Por otro lado,

- $P\left(\bar{A} \cap B\right) = P(B) - P\left(A \cap B\right) = 0{,}60 - 0{,}12 = 0{,}48$
- $P\left(\bar{A} \cup B\right) = P\left(\bar{A}\right) - P(B) - P\left(\bar{A} \cap B\right) = 0{,}68 + 0{,}60 - 0{,}48 = 0{,}80$

Nota: también podríamos resolver el problema utilizando diagramas de Venn.



9. En un grupo de estudiantes, el 60 % juega a baloncesto, el 40 % practica pádel y el 20 % realiza las dos actividades. Si se elige un estudiante al azar, determina la probabilidad de que:

a) **Practique por lo menos uno de los dos deportes.**

b) **Juegue solo a pádel.**

c) **No practique ninguno de estos dos deportes.**

Consideremos los siguientes sucesos:

B = «practica baloncesto»

A = «practica pádel»

Entonces:

$$P(B) = 0{,}60, \qquad P(A) = 0{,}40 \qquad \text{y} \quad P(B \cap A) = 0{,}20$$

a) La probabilidad de que practique por lo menos uno de los dos deportes es:

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A) - P(B \cap A) = 0{,}60 + 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}80 \text{ o } 0{,}80\ \%.$$

b) Si solo juego a pádel, entonces no juega a baloncesto. Así:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}20$$

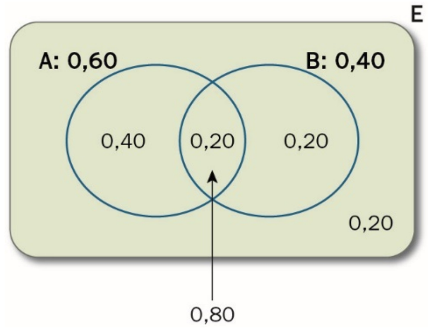
La probabilidad de que solo juegue a pádel es del 20 %.

c) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes es:

$$P(\overline{B} \cap \overline{A}) \underset{\uparrow}{=} P(\overline{B \cup A}) = 1 - P(B \cup A) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20 \text{ o } 20\ \%$$

Ley de Morgan

Mediante un diagrama de Venn podemos comprobar todos los resultados anteriores.



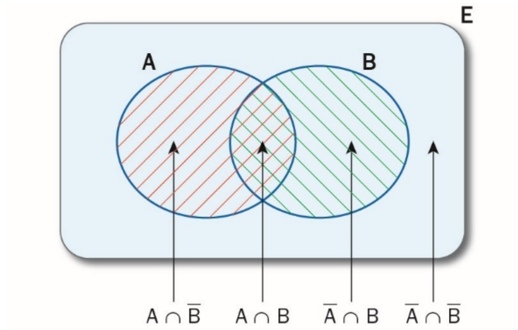
10. **Dibuja un diagrama de Venn con la información de la tabla e identifica las regiones y calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:** $A \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$ **y** $\bar{A} \cup B$ **.**

	B	$\bar{B}$
A	20	35
$\bar{A}$	55	75

Sumando los datos en horizontal y vertical obtenemos la siguiente tabla:

	B	$\bar{B}$	
A	20	35	**55**
$\bar{A}$	55	75	**130**
	75	**110**	**185**

El diagrama de Venn es el siguiente:



- $P\left(A \cap B\right) = \dfrac{20}{185} = \dfrac{4}{37}$
- $P\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right) = \dfrac{75}{37} = \dfrac{15}{37}$
- $P\left(A \cup B\right) = P\left(A \cap \bar{B}\right) + P\left(A \cap B\right) + P\left(\bar{A} \cap B\right) = \dfrac{35}{185} + \dfrac{20}{185} + \dfrac{55}{185} = \dfrac{110}{185} = \dfrac{22}{37}$
- $P\left(\bar{A} \cup \bar{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - \dfrac{20}{185} = \dfrac{65}{185} = \dfrac{33}{37}$
- $P\left(\bar{A} \cup B\right) = 1 - P\left(A \cap \bar{B}\right) = 1 - \dfrac{35}{185} = \dfrac{150}{185} = \dfrac{30}{37}$

Probabilidad condicionada

11. En un restaurante de hamburguesas, el 80 % de sus clientes utilizan kétchup, el 75 % mostaza y el 65 % utilizan ambos.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar utilice al menos una de las dos?**

b) **Si un cliente ha utilizado mostaza, ¿qué probabilidad hay de que use también kétchup?**

Consideremos los sucesos: k = «utiliza kétchup» y M = «utiliza mostaza».

a) La probabilidad de que un cliente elegido al azar utilice al menos uno de los dos es:

$$P(k \cup M) = P(k) + P(M) - P\left(k \cap M\right) = 0,80 + 0,75 - 0,65 = 0,90 \text{ o } 90\ \%$$

b) Si un cliente ha utilizado mostaza, la probabilidad de que utilice kétchup es la probabilidad continuada. $P\left(k/M\right)$. Así:

$$P\left(k/M\right) = \frac{P\left(k \cap M\right)}{P(M)} = \frac{0,65}{0,75} = 0,8667 \text{ o } 86,67\ \%$$

12. Una persona usa una tarjeta de débito (*A*) y otra de crédito (*B*). La probabilidad de que un día utilice la tarjeta de débito es del 80 %; la de crédito, del 30 %, y ambas, del 12 %. Calcula e interpreta en términos del problema las siguientes probabilidades:

a) $P(B|A)$ **b)** $P(A|B)$ **c)** $P(\bar{A}|B)$ **d)** $P(\bar{B}|\bar{A})$

a) $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{0,12}{0,30}=0,4 \text{ o } 40\ \%$.

Si un día una persona utiliza una tarjeta de débito, entonces la probabilidad de que también utilice una de crédito es del 40 %.

b) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,12}{0,80}=0,15 \text{ o } 15\ \%$.

La probabilidad de que utilice una tarjeta de débito, sabiendo que ha utilizado la de crédito es del 15 %.

c) $P(A|B)=\dfrac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,30-0,12}{0,30}=\dfrac{0,18}{0,30}=0,60 \text{ o } 60\ \%$

La probabilidad de que un día no utilice la tarjeta de débito, si ha utilizado la crédito, es del 60 %.

d) $P(\bar{B}|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{B}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(\overline{B\cup A})}{1-P(A)}=\dfrac{1-P(B\cup A)}{1-P(A)}=\dfrac{1-(P(B)+P(A)-P(A\cap B))}{1-P(A)}=$

$=\dfrac{1-(0,80+0,30-0,12)}{1-0,80}=\dfrac{0,02}{0,20}=0,10 \text{ o } 10\ \%$

Sabiendo que la persona no ha utilizado un día la tarjeta de débito, la probabilidad de que tampoco utilice la de créditos es del 10 %.

Sucesos dependientes o independientes

13. Dados dos sucesos *A* y *B*, se conocen estas probabilidades: $P(A\cup B)=0,55$**,** $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0,90$ **y** $P(B|A)=0,25$**.**

a) **Calcula** $P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ **y** $P(B|\bar{A})$.

b) **Deduce si los sucesos *A* y *B* son independientes.**

a) • $P\left(\bar{A}\cup\bar{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P\left(A\cap B\right)=0,90\Rightarrow P\left(A\cap B\right)=0,10$

- $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P(A)}\Rightarrow P(A)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B|A\right)}=\dfrac{0,10}{0,25}=0,4$
- $P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P\left(A\cap B\right)\Rightarrow 0,55=0,4+P(B)-0,10\Rightarrow P(B)=0,25$
- $P\left(B|\bar{A}\right)=\dfrac{P\left(B\cap\bar{A}\right)}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(B)-P\left(A\cap B\right)}{1-P(A)}=\dfrac{0,25-0,10}{1-0,4}=\dfrac{0,15}{0,6}=0,25$

b) Los sucesos *A* y *B* son independientes si, y solo si,

$$P\left(A\cap B\right)=P(A)\cdot P(B)$$
$$0,10=0,4\cdot 0,25$$

Por tanto, sí son independientes.

14. **Si $P(A)=0,3$, $P(B)=0,5$ y $P(A|B)=0,1$, calcula: $P(A\cap B)$, $P\left(B|A\right)$ y $P(\bar{A}\cup B)$**

- $P\left(A|B\right)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P(B)}\Rightarrow P\left(A\cap B\right)=P(B)\cdot P\left(A|B\right)=0,5\cdot 0,1=0,05$
- $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(B\cap A\right)}{P(A)}=\dfrac{0,05}{0,3}=0,1667$
- $P\left(\bar{A}\cup B\right)=P(\bar{A})+P(B)-P\left(\bar{A}\cap B\right)=\left(1-P(A)\right)+P(B)-P\left(P(B)-P\left(A\cap B\right)\right)=$

  $=(1-0,3)+0,5-(0,5-0,05)=0,75$

15. **En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Se elige al azar a un habitante de esta ciudad:**

a) **Calcula la probabilidad de que sea seguidor de ambos equipos.**

b) **Si se sabe que es seguidor del equipo de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que lo sea también del de fútbol?**

Sean los sucesos *F* y *B* que representa si una persona es seguidora de los equipos de fútbol y baloncesto, respectivamente. Entonces:

$P(F)=0,60 \qquad P(B)=0,60$

a) $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) \Rightarrow P(F \cap B) = P(F) + P(B) - P(F \cup B) =$

$= 0,60 + 0,60 - 1 = 0,20$ o 20 %

Observa que $P(F \cup B) = 1$ porque todos los habitantes son seguidores de alguno de los equipos.

Por tanto, la probabilidad de que un habitante elegido al azar sea seguidor de ambos equipos es del 20 %.

b) La probabilidad de que la persona sea seguidor del equipo del fútbol, si lo es del equipo de baloncesto, es la probabilidad condicionada $p(F/B)$. Es decir:

$$P(F|B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0,20}{0,60} = \frac{1}{3} = 0,3333 \text{ o } 33,33\ \%$$

Teorema de la probabilidad total

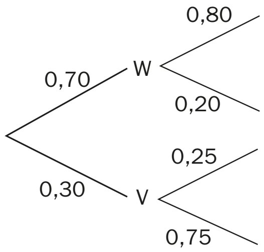
16. Apps. Las aplicaciones de compraventa más usadas entre tres amigas son *Wallapop* y *Vibbo*. El 70 % de sus transacciones que realizan las llevan a cabo con *Wallapop* y el resto las hacen con *Vibbo*. Las tres saben que los productos que suben en *Wallapop*, en el 80 % de las ocasiones, tardan menos de diez días en cerrar su venta, mientras que en *Vibbo* lo consiguen solo en el 25 % de las veces en el mismo plazo de tiempo. Si se elige al azar un producto puesto a la venta, ¿cuál es la probabilidad de que supere el plazo de diez días para lograr su venta?

Sean los sucesos siguientes:

W = «el grupo utiliza *Wallapop*»

V = «el grupo utiliza *Vibbo*»

A = «tardan menos de diez días en vender un producto» con los datos del enunciado podemos considerar dos etapas sucesivas: en la primera decidir qué aplicación utilizan y, en la segunda, analiza si tardan menos de diez días o más conseguir en venta. Así, el siguiente diagrama de árbol representa este proceso:



$$P\left(W\cap A\right)=P(W)\cdot P\left(A\middle|W\right)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56$$
$$P\left(W\cap \overline{A}\right)=P(W)\cdot P\left(\overline{A}\middle|W\right)=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14$$
$$P\left(V\cap A\right)=P(V)\cdot P(V)\cdot P\left(A\middle|V\right)=0{,}3\cdot 0{,}25=0{,}075$$
$$P\left(V\cap \overline{A}\right)=P(V)\cdot P\left(\overline{A}\middle|W\right)=0{,}3\cdot 0{,}75=0{,}225$$

Para calcular la probabilidad de que un producto supere los diez días en su venta basta sumar las ramas que finalizan en $\overline{A}$, es decir, la segunda y cuarta. O, lo que es equivalente, aplicar el teorema de la probabilidad total. Así:

$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(W\cap\overline{A}\right)+P\left(V\cap\overline{A}\right)=P(W)\cdot P\left(\overline{A}\middle|W\right)+P(v)\cdot P\left(\overline{A}\middle|V\right)=1{,}70\cdot 0{,}20+0{,}30\cdot 0{,}75=0{,}365$$

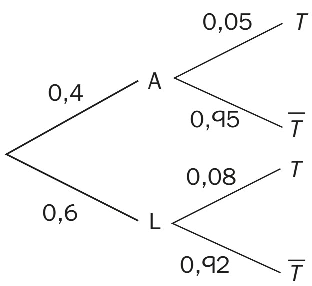
Por tanto, la probabilidad de que un producto, elegido al azar, puesto a la venta tarde más de diez días en venderlo es del 36,5 %.

17. Ana y Luis comparten coche para desplazarse a diario a su trabajo. Ana conduce el 40 % de los días y Luis el resto. Cuando conduce Ana, llegan tarde el 5 % de los días, y cuando conduce Luis, el 8 %. Calcula la probabilidad de que un día elegido al azar lleguen tarde al trabajo.

Consideremos los sucesos: *A* = «conduce Ana», *L* = «conduce Luis» y *T* = «llegan tarde al trabajo».

Esta experiencia se puede dividir en dos etapas sucesivas: en la primera quién conduce y, en la segunda, el hecho de llegar o no tarde al trabajo. Podemos, pues, construir el siguiente diagrama de árbol:

Conductor **Llegar tarde al trabajo**



$$P\left(A\cap T\right)=P(A)\cdot P\left(T\middle|A\right)=0{,}02$$
$$P\left(A\cap \overline{T}\right)=P(A)\cdot P\left(\overline{T}\middle|A\right)=0{,}38$$
$$P\left(L\cap T\right)=P(L)\cdot P\left(T\middle|L\right)=0{,}048$$
$$P\left(L\cap \overline{T}\right)=P(L)\cdot P\left(\overline{T}\middle|L\right)=0{,}552$$

Para calcular la probabilidad de que un día elegido al azar lleguen tarde al trabajo basta sumar las ramas primera y tercera. Es decir:

$$P(T)=P\left(A\cap T\right)+P\left(L\cap T\right)=P(A)\cdot P\left(T\middle|A\right)+P(L)\cdot P\left(T\middle|L\right)=0,02+0,048=0,068$$

Observa que hemos aplicado el teorema de la probabilidad total.

Por tanto, la probabilidad de que un día elegido al azar, Ana y Luis, lleguen tarde al trabajo es del 6,8 %.

18. La probabilidad de que llueva un día de verano en una ciudad es 0,2 %. La probabilidad de que la temperatura máxima diaria supere los 25 ºC es de 0,3 % cuando llueve y de 0,8 % cuando no. Halla la probabilidad de que un día de verano no se superen los 25 ºC.

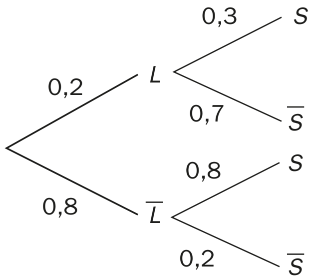
Sean los sucesos:

L = «Llueve»

S = «La temperatura máxima supera los 25 ºC».

Podemos plantear el experimento en dos etapas sucesivas: la primera si llueve o no en dicha ciudad y, la segunda, si la temperatura máxima supera los 25 ºC. Así, el diagrama de árbol que representa este proceso es el siguiente:

Lluvia **Temperatura**



$$P\left(L\cap S\right)=0,2\cdot 0,3=0,06$$
$$P\left(L\cap \overline{S}\right)=0,2\cdot 0,7=0,14$$
$$P\left(\overline{L}\cap S\right)=0,8\cdot 0,8=0,64$$
$$P\left(\overline{L}\cap \overline{S}\right)=0,8\cdot 0,2=0,16$$

Para encontrar la probabilidad de que un día de verano esa ciudad no supere los 25 ºC basta sumar los resultados de las segunda y cuarta ramas. Es decir:

$$P(\overline{S})=0,14+0,16=0,30$$

Veámoslo más formalmente aplicando el teorema de la probabilidad total. Así:

$$P\left(\overline{S}\right)=P\left(\overline{L}\cap \overline{S}\right)+P\left(\overline{L}\cap \overline{S}\right)=P(L)\cdot P\left(L\middle|\overline{S}\right)+P(\overline{i})\cdot P\left(\overline{S}/\overline{L}\right)=0,2\cdot 0,7+0,8\cdot 0,2=0,30$$

Por tanto, la probabilidad de que un día de verano en esa ciudad no se superen los 25 ºC es del 30 %.

Teorema de Bayes

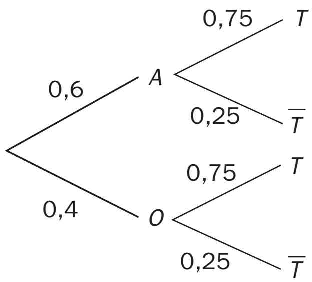
19. En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. Utilizan habitualmente Twitter 9 de las chicas y 6 de los chicos. Si se selecciona a un estudiante al azar, determina la probabilidad de que:

***a)* Sea chica y utilice Twitter.**

***b)* Sea chico, sabiendo que utiliza Twitter.**

Consideremos los sucesos: *A* = «es chica», *O* = «es chico» y *T* = «utiliza Twitter».

El proceso consiste en analizar, en primer lugar, si el estudiante seleccionado al azar es chica o chico, y, posteriormente, si utiliza habitualmente la red social Twitter. Así, el diagrama de árbol de este experimento es:



$$P(A\cap T)=0,6\cdot 0,75=0,45$$
$$P(A\cap \overline{T})=0,6\cdot 0,25=0,15$$
$$P(O\cap T)=0,4\cdot 0,75=0,30$$
$$P(O\cap \overline{T})=0,4\cdot 0,25=0,10$$

a) La probabilidad de que sea chica y utilice Twitter es:

$$P(A\cap T)=P(A)\cdot P(T|A)=0,6\cdot 0,75=0,45$$

b) Para resolverlo, vamos a utilizar el teorema de Bayes.

Las probabilidades a priori son: $P(A)=0,6$ y $P(O)=0,4$.

Información adicional: elegido un estudiante se estudia si utiliza o no la red social Twitter.

Las probabilidades a posteriori son: $P(A|T)$ y $P(O|T)$.

Así:

$$P(O|T)=\frac{P(O\cap T)}{P(T)}=\frac{P(O)\cdot P(T|O)}{P(A)\cdot P(T|A)+P(O)\cdot P(T|O)}=\frac{0,4\cdot 0,75}{0,6\cdot 0,75+0,4\cdot 0,75}=\frac{0,30}{0,75}=0,40$$

Sabiendo que el estudiante elegido al azar utiliza Twitter, la probabilidad de que sea un chico es del 40 %.

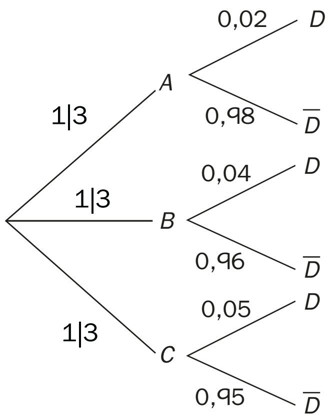
20. **En una fábrica hay tres máquinas, A, B y C, que producen la misma cantidad de piezas. La máquina *A* produce un 2 % de piezas defectuosas, la B un 4 % y la C un 5 %.**

a) **Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.**

b) **Se elige una pieza al azar y resulta que no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que se fabricara en la máquina A?**

Sean *A*, *B* y *C* los sucesos que representan que la pieza es fabricada por la máquina *A*, *B* y *C*, respectivamente. Y, sea *D* el suceso que indica que la pieza es defectuosa.

Un diagrama de árbol, que refleja la máquina que ha producido la pieza y, después, si dicha pieza es defectuosa o no, es el siguiente:



a) Para obtener la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa, es decir, *p*(*D*), basta seguir la primera, tercera y quinta ramas del árbol, es decir, el teorema de la probabilidad total. Así:

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 0,02+\frac{1}{3}\cdot 0,04+\frac{1}{3}\cdot 0,05=0,0367$$

Por tanto, la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es de aproximadamente el 3,67 %.

b) La probabilidad de que la pieza fuera producida por la máquina *A*, sabiendo que no es defectuosa, es la probabilidad condicionada $P(A|\overline{D})$.

Aplicaremos, pues, el teorema de Bayes puesto que se trata de hallar una probabilidad a posteriori. Luego:

$$P\left(A\middle|\overline{D}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}=\frac{P(A)\cdot P\left(\overline{D}\middle|A\right)}{P(A)\cdot P\left(\overline{D}\middle|A\right)+P(B)\cdot P\left(\overline{D}\middle|B\right)+P(c)\cdot P\left(\overline{D}\middle|C\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,98}{\frac{1}{3}\cdot 0,98+\frac{1}{3}\cdot 0,96+\frac{1}{3}\cdot 0,95}=0,3391$$

La probabilidad de que la pieza fuera producida por la máquina *A*, si es no defectuosa, es del 33,91 %.

21. Un estudiante programa el despertador de su móvil para presentarse a un examen. Esta alarma consigue despertarlo en un 80 % de las ocasiones. Si oye el móvil, la probabilidad de que realice el examen es del 90 %, pero, en otro caso, es del 50 %.

***a)* ¿Cuál es la probabilidad de que realice el examen?**

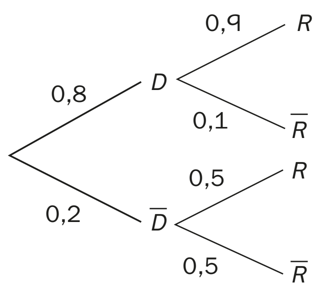
***b)* Si ha realizado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que no oyera el móvil?**

Sean los sucesos:

D = «la alarma le despierta»

R = «realiza el examen»

Un diagrama de árbol que refleja, en primer lugar si la alarma del despertador consigue despertar o no al estudiante y, en segundo lugar, si realiza o no el examen, es el siguiente:



a) La probabilidad de que el estudiante realice el examen, $P(R)$, podemos obtenerla siguiendo la primera y tercera ramas, es decir, el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(D\cap R)+P\left(\overline{D}\cap R\right)=P(D)\cdot P\left(R\middle|D\right)+P\left(\overline{D}\right)\cdot P\left(R\middle|\overline{D}\right)=$$
$$=0,8\cdot 0,9+0,2\cdot 0,5=0,72+0,10=0,82$$

b) la probabilidad de que no pera el móvil, sabiendo que ha realizado el examen, es la probabilidad a posteriori $P(\bar{D}|R)$. Por tanto, aplicaremos el teorema de Bayes para obtenerla.

$$P(\bar{D}|R) = \frac{P(\bar{D} \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}10}{0{,}82} = 0{,}1220$$

Si ha realizado el examen, hay un 12,20 % de probabilidad de que no oyera el móvil.

22. Empleos más demandados. Según el Foro Económico Mundial los tres campos con mayor demanda laboral son: *Big Data,* ciberseguridad e inteligencia artificial. Se sabe que, de los estudiantes que cursan un máster en esas áreas, el 35 % lo hace sobre *Big Data,* el 20 % en ciberseguridad y el 45 % en inteligencia artificial. De quienes estudian *Big Data,* el 60 % son graduados en STEM; para ciberseguridad, lo son el 45 %, y para inteligencia artificial, el 80 %. Se elige al azar un estudiante matriculado en uno de estos másteres.

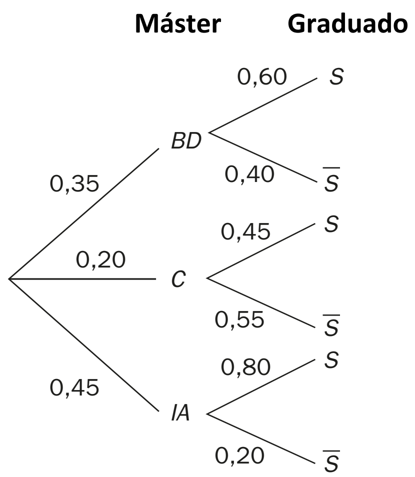
***a)* Halla la probabilidad de que sea un graduado en STEM.**

***b)* Sabiendo que es un graduado en STEM, calcula la probabilidad de que esté cursando un máster en ciberseguridad.**

Designemos por *BD*, *C* e *IA*, los sucesos que indican si un estudiante realiza un máster en *Big Data,* Ciberseguridad e Inteligencia Artificial, respectivamente. Y sea S el suceso que indica que es (*).

Un diagrama de árbol, que describe el experimento consistente en seleccionar a un estudiante de estos másteres y averiguar si son graduados en STEM, es el siguiente:

(*) un graduado en STEM.



a) Para hallar la probabilidad de que un estudiante de esos másteres sea graduado en STEM utilizaremos el teorema de la probabilidad total, o lo que es equivalente, sumar las ramas que finalicen en el suceso *S*. Así:

$$P(S) = P(BD \cap S) + P(C \cap S) + P(IA \cap S) = P(BD) \cdot P(S|BD) + P(C) \cdot P(S|C) + P(IA) \cdot P(S|IA) =$$
$$= 0,35 \cdot 0,60 + 0,20 \cdot 0,45 + 0,45 \cdot 0,80 = 0,21 + 0,09 + 0,36 = 0,66$$

Hay, por tanto, una probabilidad del 66 % de que el estudiante de esos másteres sea graduado en *STEM.*

b) La probabilidad de que el estudiante esté cursando un máster en ciberseguridad si es un graduado en STEM, es la probabilidad condicionada $P(C|S)$.

Para su cálculo utilizaremos el teorema de Bayes. Así:

$$P(C|S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{0,09}{0,66} = 0,1364 \text{ o } 13,64\ \%$$

23. Diabetes. Según datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8 % de los españoles mayores de 18 años tiene esta enfermedad, aunque el 43 % de ellos no lo sabe.

a) **Se elige al azar un español mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa? ¿Cuál es la de que no sea diabético o no lo sepa?**

b) **Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero arroja un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?**

a) Sean los sucesos:

D = «padece diabetes», $\bar{D}$ = «no padece diabetes»

N = «no sabe que padece diabetes»

S = «sí sabe que padece diabetes»

- Entonces, la probabilidad de que sea diabético y lo sepa es:

$$P(D \cap S) = P(D) \cdot P(S) = 0,138 \cdot 0,57 = 0,07866$$

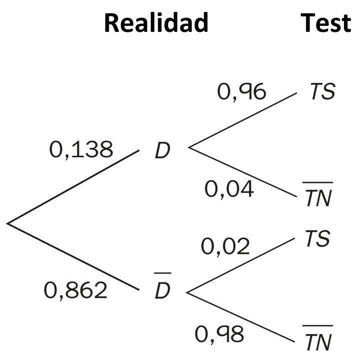
Son independientes

- Por otro lado, la probabilidad de que no sea diabético o no lo sepa es:

$$P(\bar{D} \cup N) = P(\bar{D}) + P(N) - P(\bar{D} \cap N) = P(\bar{D}) + P(N) - P(\bar{D}) \cdot P(N) =$$
$$= 0,862 + 0,43 - 0,862 \cdot 0,43 = 0,92134$$

b) Añadimos los sucesos *TS* y *TN* para indicar que el test dice que sí es diabético y no, respectivamente.

El experimento se realiza en dos etapas sucesivos: la primera analizamos si es o no diabético y, después, si al aplicarle el test indica que lo es o no. Así, un diagrama de árbol que describe este procedimiento es el siguiente:



$$P(D \cap TS) = P(D) \cdot P(TS|D) = 0,13248$$

$$P(\bar{D} \cap TS) = P(\bar{D}) \cdot P(TS|\bar{D}) = 0,1724$$

La probabilidad de que sea realmente diabético un español mayor de edad, si el test ha dado positivo, es la probabilidad condicionada $P(D|TS)$.

$P(D|TS)$ es una probabilidad a posteriori y, para hallarla, utilizaremos el Teorema de Bayes. Así:

$$P(D|TS) = \frac{P(D \cap TS)}{P(TS)} = \frac{P(D) \cdot P(TS|D)}{P(D \cap TS) + P(\bar{D} \cap TS)} = \frac{P(D) \cdot P(TS|D)}{P(D) \cdot P(TS|D) \cdot P(\bar{D}) \cdot P(TS|\bar{D})} =$$
$$= \frac{0,138 \cdot 0,96}{0,138 \cdot 0,96 + 0,862 \cdot 0,02} = \frac{0,13248}{0,14972} = 0,8849 \text{ o } 88,49\ \%$$

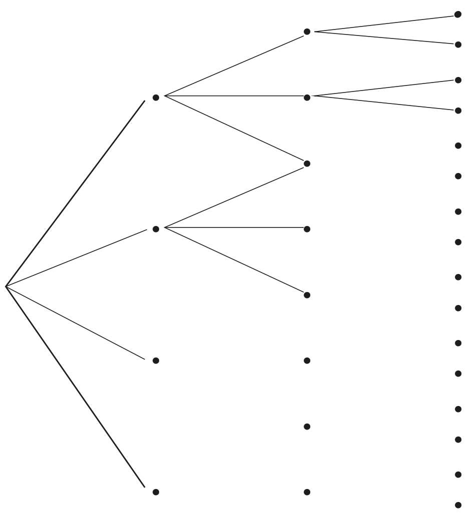
Por tanto, si un español mayor de 18 años da positivo en el test, entonces la probabilidad de que realmente sea diabético es del 88,49 %.

Combinatoria y cálculo de probabilidades

24. Menú del día. El menú del día de un restaurante consta de cuatro primeros platos, tres segundos y dos postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden elegir?

En forma esquemática un diagrama de árbol que represente los menús es el siguiente:

1.^{er} plato **2.º plato** **Postre**



Por cada uno de los 4 primeros platos podemos elegir 3 segundos platos y 2 postres. Luego, aplicando la regla del producto, disponemos de: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ menús diferentes.

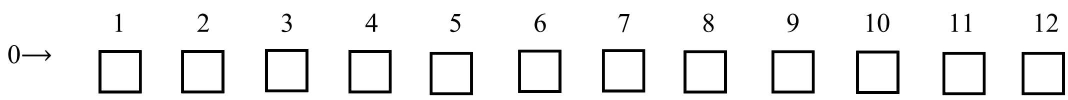
25. **En una clase de inglés hay 9 chicas y 12 chicos. Se trata de formar grupos de 3 chicas y 4 chicos. ¿Cuántos grupos diferentes se pueden componer?**

Como solo interesa la composición del grupo estamos hablando de combinaciones. Más concretamente de elegir 2 chicas de los 9 chicos y 4 chicas de los 12 chicos. Por tanto:

$$C_{9,3} \cdot C_{12,4} = \binom{9}{3} \cdot \binom{12}{4} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot \frac{12!}{4! \cdot 8!} = 84 \cdot 495 = 41\,580$$

En total se pueden formar 41 580 grupos diferentes en esas condiciones.

26. Código. **El código para abrir la puerta de un garaje consiste en 12 bits que elige el propietario. ¿Cuántos códigos diferentes se pueden usar?**



1→ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Disponemos de los dígitos 0 y 1 para ordenarlos en 12 posiciones diferentes, que admiten repeticiones. Por tanto, tenemos variaciones con repetición de 2 elementos en 12 posiciones, es decir, $VR_{2,12}$. Así hay:

$VR_{2,12} = 2^{12} = 4096$ códigos diferentes.

27. De una baraja de póquer que tiene 52 cartas, se extraen 5 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 ases y 2 reyes? ¿Y póquer de ases?

- Los casos posibles de extraer 5 cartas de la baraja de póquer de 52 cartas son:

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\cdot 47!} = 2\,598\,960$$

Para obtener 3 ases y 2 reyes hay que escogerlos de los 4 ases de la baraja y de los 4 reyes de la misma. Es decir:

$$C_{4,3}\cdot C_{4,2} = \binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2} = 4\cdot 6 = 24$$

Por tanto, la probabilidad de obtener 3 ases y 3 reyes es:

$$P(3 \text{ ases y } 2 \text{ reyes}) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{24}{2\,598\,960} = 0{,}000\,009\,23$$

- Para obtener póquer de ases hay que extraer los cuatro ases y otra carta cualquiera. Es decir, 4 de los 4 ases y 1 carta de los 48 restantes. Así.

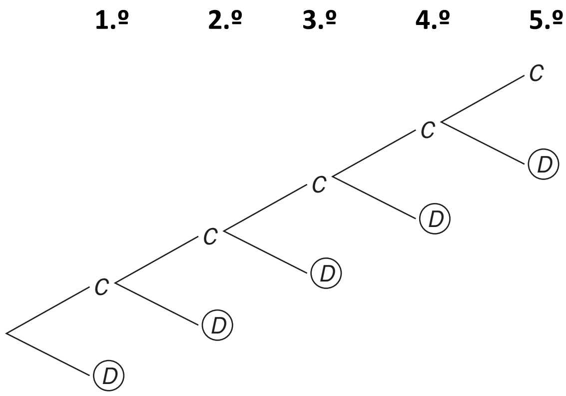
- $$P(\text{póquer de ases}) = \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{48}{2\,598\,960} = 0{,}000\,018\,5$$

Actividades finales

Espacio muestral. Probabilidad

28. Una empresa fabrica neumáticos de bicicleta que deben cumplir una serie de parámetros para salir a la venta. Designemos por *C* el caso en que se cumplen todos los parámetros, y *D* si el neumático presenta algún defecto. El experimento consiste en comprobar cinco neumáticos sacados de la línea de ensamblaje hasta que aparezca el primero defectuoso. Construye el diagrama de árbol de este experimento y describe el espacio muestral.

El diagrama de árbol de este experimento es:



Por tanto, el espacio muestral es: $E = \{D,\ CD,\ CCD,\ CCCD,\ CCCCD,\ CCCCC\}$

29. Una joven va al colegio utilizando diversos medios de transporte: bicicleta (*B*), patinete (*P*) y tranvía (*T*). Expresa con palabras los siguientes sucesos:

a) $B \cup P$ ***b)*** $B \cup P \cup T$ ***c)*** $B \cap (P \cup T)$ ***d)*** $\bar{B} \cap \bar{T}$

e) $\bar{B} \cap P$ ***f)*** $\bar{B} \cap \bar{P} \cap \bar{T}$ ***g)*** $B \cup (P \cap T)$ ***h)*** $B \cup T$

a) $B \cup P$: la joven va al colegio en bicicleta o patinete.

b) $B \cup P \cup T$: la joven va al colegio en bicicleta o en patinete o en tranvía.

c) $B \cap (P \cup T)$: la joven va en bicicleta y, en patinete o tranvía.

d) $\overline{B} \cap \overline{T}$: la joven no utiliza ni la bicicleta ni el tranvía.

e) $\overline{B} \cap P$: la joven no usa la bicicleta, pero sí el patinete.

f) $\overline{B} \cap \overline{P} \cap T$: la joven no utiliza ni la bicicleta ni el patinete, pero sí el tranvía.

g) $B \cup (P \cap T)$: la joven usa la bicicleta o, en patinete y tranvía.

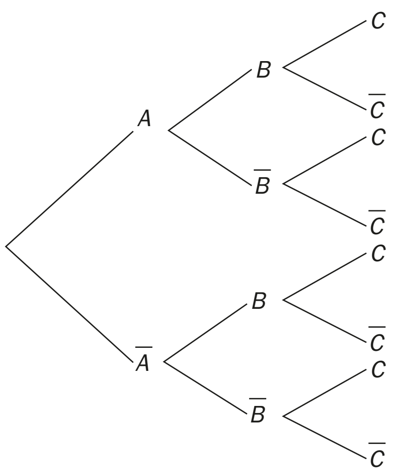
h) $B \cup T$: la joven utiliza la bicicleta o el tranvía.

30. Un abogado defiende a tres clientes, *A*, *B* y *C*, que pueden ser absueltos (*A*, *B*, *C*) o condenados ($\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$) por diversos delitos fiscales.

***a)* Calcula mediante un diagrama de árbol el espacio muestral de este proceso.**

***b)* Describe en términos del enunciado los siguientes sucesos:**
$A \cap C$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ *y* $A \cap B \cap C$.

a) Diagrama de árbol:



El espacio muestral es: $E = \{ABC,\ AB\overline{C},\ A\overline{B}C,\ A\overline{B}\overline{C},\ \overline{A}BC,\ \overline{A}B\overline{C},\ \overline{A}\overline{B}C,\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}\}$

b) $A \cap C$: Los clientes *A* y C son absueltos.

$A \cup C$: Al menos uno de los clientes *A* o *C* es absuelto.

$A \cup B \cup C$: Al menos uno de los clientes es absuelto.

$A \cap B$: Los clientes *A* y *B* son absueltos.

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$: Los clientes *A* y *B* son condenados, pero *C* es absuelto.

$A \cap B \cap C$: Los tres clientes son absueltos.

31. **El tiempo, en minutos, que dedican a hacer los deberes en casa un grupo de 30 estudiantes de Primaria viene reflejado en la siguiente tabla:**

Tiempo (t)	$t \leq 5$	$5 < t \leq 10$	$10 < t \leq 15$	$15 < t \leq 20$
Número de estudiantes	6	12	9	3

Se elige un estudiante al azar de este grupo.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que dedique más de 10 minutos a hacer los deberes?**

b) **¿Cuál es la probabilidad de que dedique como mucho 15 minutos?**

a) $P(t > 10) = \dfrac{9+3}{30} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

Hay una probabilidad del 40 % de que un estudiante tarde más de 10 minutos en hacer los deberes.

b) $P(t \leq 15) = \dfrac{6+12+9}{30} = \dfrac{27}{30} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$

La probabilidad de que un estudiante dedique como mucho 15 minutos es del 90 %.

32. **Al 30 % de los estudiantes de un centro escolar les gusta el fútbol, al 20 % el baloncesto y al 10 % ambos deportes. Si se elige un estudiante del centro escolar al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes? ¿Y la de que no le guste ninguno? ¿Y solo uno de ellos?**

Sean F y B los sucesos que indican que a un estudiante le gusta el fútbol y el baloncesto, respectivamente.

$$P(F) = 0{,}30 \qquad P(B) = 0{,}20 \qquad P(F \cap B) = 0{,}10$$

- La probabilidad de que a un estudiante le guste alguno de los deportes es $P(F \cup B)$. Así:

  $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$. Así:

  $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0{,}30 + 0{,}20 - 0{,}10 = 0{,}40$ o $40\ \%$

- La probabilidad de que a un estudiante no le guste ninguno de estos dos deportes es $P(\bar{F} \cap \bar{B})$, luego:

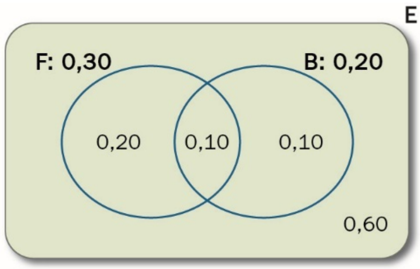
$$P(\bar{F} \cap \bar{B}) \underset{\text{Ley de Morgan}}{=} P(\overline{F \cup B}) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0,40 = 0,60 \text{ o } 60~\%$$

- La probabilidad de que le guste solo uno de los dos deportes es $P[(F \cap \bar{B}) \cup (\bar{F} \cap B)]$. Así:

$$P[(F \cap \bar{B}) \cup (\bar{F} \cap B)] \underset{\text{Son incompatibles}}{=} P(F \cap \bar{B}) + P(\bar{F} \cap B) = P(F) - P(F \cap B) + P(B) - P(F \cap B) =$$

$$= 0,30 - 0,10 + 0,20 - 0,10 = 0,30 \text{ o } 30~\%$$

Observación: Podemos representar toda la información en un diagrama de Venn y, posteriormente, responder a las preguntas.



33. **En un estudio realizado sobre el número de parejas chico-chica con edades entre 25 y 30 años que viven en casa de sus padres, se obtuvo que el 52 % de los chicos, el 58 % de las chicas y el 32 % en ambos casos vive en el hogar familiar. Se eligen al azar un chico y una chica del estudio realizado. Determina la probabilidad de que viva en casa de sus padres...**

a) **... al** ***b)*** **... ninguno**

c) **... solo** ***d)*** **... el**

Designemos por A y B los sucesos que representan que un chico y una chica, respectivamente, vive en casa de sus padres.

$P(A) = 0{,}52 \qquad P(B) = 0{,}58 \qquad P(A \cap B) = 0{,}32$

a) La probabilidad de que al menos uno de la pareja viva en casa de sus padres es $P(A \cup F)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}52 + 0{,}58 - 0{,}32 = 0{,}78$ o $78\ \%$

b) La probabilidad de que ninguno de los dos viva en casa de sus padres es $p(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$ o $22\ \%$

c) La probabilidad de que solo uno de la pareja viva en casa de sus padres es $p[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup B)]$

$P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] \underset{\text{Son incompatibles}}{=} P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$

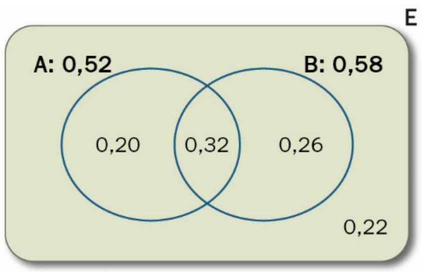
Son incompatibles

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0{,}52 + 0{,}58 - 2 \cdot 0{,}32 = 0{,}46$ o $46\ \%$

d) La probabilidad de que viva en casa de sus padres el chico, pero no la chica, es $P(A \cap \overline{B})$.

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}52 - 0{,}32 = 0{,}20 \text{ o } 20\ \%$$

Observación: Todos los resultados se pueden comprobar en el siguiente diagrama de Venn:



34. Según un estudio realizado entre personas menores de 40 años, el 24 % sigue alguna serie española, el 35 %, una norteamericana, y el 14 %, ambas. ¿Qué proporción de personas sigue regularmente al menos uno de los dos tipos de series?

Sean los sucesos:

S = «sigue una serie española»

N = «sigue una serie norteamericana»

$P(S) = 0,24$ $\quad P(N) = 0,35$ $\quad P(S \cap N) = 0,14$

La probabilidad de que una persona del estudio siga al menos uno de los dos tipos de serie es $P(S \cup N)$.

$P(S \cup N) = P(S) + P(N) - P(S \cap N) = 0,24 + 0,35 - 0,14 = 0,45$ o $45\ \%$.

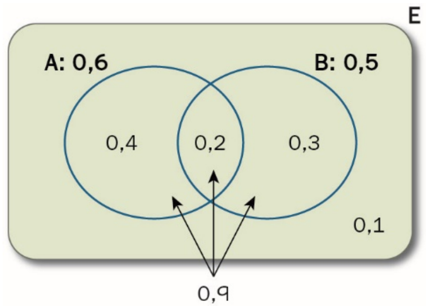
35. **Si A y B son dos sucesos que verifican $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 0,9$ ¿son A y B compatibles? En caso afirmativo, calcula $P(\bar{A} \cap B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.**

En general:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0,9 = 0,6 + 0,5 - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = 0,2$$

Como $P(A \cap B) = 0,2 \neq 0$, entonces *A* y *B* sí son compatibles.

Podemos construir el siguiente diagrama de Venn:

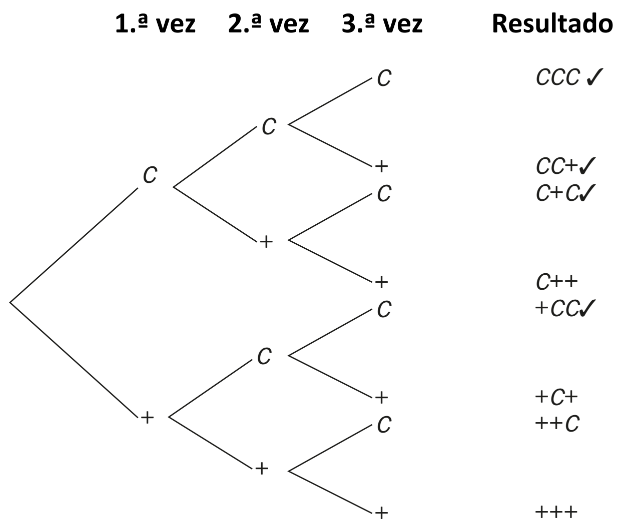


- $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,2 = 0,3$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$

Ley de Morgan

36. **Se tira una moneda al aire tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener más caras que cruces?**

Designando para C y + obtenemos cara y cruz, respectivamente, entonces el diagrama de árbol que refleja el experimento de tirar una moneda tres veces es el siguiente:



De los 8 resultados posibles se obtienen más caras que cruces en 4 de ellos. Por tanto:

$$p(\text{Obtener más caras que cruces}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$$

37. Dados los sucesos independientes, *A* y *B*, tales que $P(A \cap B) = 0,3$ y $P(A \cap \overline{B}) = 0,3$. Encuentra $P(A \cup B)$.

- $P(A \cap \overline{B}) = (A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,3 = P(A) - 0,3 \Rightarrow P(A) = 0,6$
- Si *A* y *B* son independientes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0,3 = 0,6 \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = 0,5$.

  Por tanto,

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$

38. **Se generan en un ordenador tres números aleatorios comprendidos entre el 1 y el 10, ambos inclusive. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres números sean inferiores a 5?**

Sea el suceso:

A = «el número *i*-ésimo generado es inferior a 5», $i = 1, 2, 3$

$$P(A_i) = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

La probabilidad de que los tres números sea inferiores a 5 es $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = (0{,}4)^{30} = 0{,}064$$

Son independientes

La probabilidad de que los tres números aleatorios generados en un ordenador sean inferiores a 5 es 0,064.

Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes e independientes

39. **Sara tiene dos baldas extraíbles en su armario: en una están colgadas las camisas, y en la otra, las faldas. La tabla muestra el número total de prendas que guarda en el armario, agrupadas en tres tipos: lisas, con dibujos y a rayas.**

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisas	7	3	1
Faldas	2	8	5

Elige una prenda al azar de cada balda. Calcula la probabilidad...

a) **... de que las dos sean de rayas.**

b) **... de que las dos sean del mismo tipo.**

c) **... de que al menos una de ellas no sea de rayas.**

Sean los sucesos:

CL = «camisa lisa», *CD* = «camisa con dibujos»

CR = «camisa de rayas», *FL* = «falda lisa»,

FD = «falda con dibujos» y *FR* «falta de rayas»

a) La probabilidad de que las dos prendas sean de rayas es $P(CR \cap FR)$.

$$P(CR \cap FR) = P(CR) \cdot P(FR) = \frac{1}{11} \cdot \frac{5}{15} = \frac{5}{165} = \frac{1}{33} = 0{,}0303 \text{ o } 3{,}03\ \%$$

Hay un 3,03% de probabilidad de que ambas prendas sean de rayas.

b) Las dos prendas serán del mismo tipo si las dos son lisas, con dibujos o de rayas. Es decir:

$$P\left[(CL \cap FL) \cup (CD \cap FD) \cup (CR \cap FR)\right] \underset{(1)}{=} P(CL) \cdot P(FL) + P(CD) \cdot P(FD) + P(CR) \cdot P(FR) =$$

(1) Son incompatibles y, además, independientes.

$$= \frac{7}{11} \cdot \frac{2}{15} + \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{15} + \frac{1}{11} \cdot \frac{5}{15} = \frac{43}{165} = 0{,}2606 \text{ o } 2606\ \%$$

La dos prendas serán del mismo tipo en el 26,06 % de las ocasiones que se extraigan.

c) De las 9 posibles combinaciones de tipo de camisas y faltas en 8 de ellos hay al menos una prenda que no sea de rayas. De hecho, solo hay una que las dos prendas son de rayas. Por tanto, para hallar su probabilidad utilizaremos el suceso contrario. Así:

$$P(\text{al menos una de las prendas no sea de raya}) = 1 - P(\text{las dos prendas son de rayas}) =$$

$$= 1 - P(CR \cap FR) = 1 - \frac{1}{33} = \frac{32}{33} = 0{,}9997 \text{ o } 99{,}97\ \%$$

Hay una probabilidad del 99,97 % de que al menos una de las dos prendas no sea de rayas.

40. En un grupo de Bachillerato hay 10 chicos y 8 chicas. De ellos, 3 chicos y 4 chicas juegan al ajedrez. Si escogemos al azar una persona de este grupo, determina estas probabilidades:

***a)* Que sea chico y no juegue al ajedrez.**

***b)* Que no juegue al ajedrez sabiendo que es chica.**

Con los datos del enunciado podemos construir la siguiente tabla:

	Juega (J)	No Juega ($\bar{J}$)	Total

Chicos (O)	3	7	10
Chicas (A)	4	4	8
Total	7	11	18

a) La probabilidad de que sea chico y no juegue al ajedrez es $P\left(0 \cap \bar{J}\right)$.

$$P\left(O \cap \bar{J}\right) = \frac{7}{18}$$

b) Sabiendo que es chica, la probabilidad de que no juegue al ajedrez es la probabilidad condicionada

$$P\left(\bar{J}|A\right)$$

$$P\left(\bar{J}|A\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

41. En un centro escolar hay 1230 estudiantes de Secundaria y Bachillerato. La distribución por sexo se muestra en esta tabla:

	Secundaria	**Bachillerato**	**Total**
Mujeres	**440**	**185**	**625**
Hombres	**410**	**195**	**605**
Total	**850**	**380**	**1230**

Se elige un estudiante al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) **Estudie en Secundaria.**

b) **Sea mujer.**

c) **Sea hombre y estudie Bachillerato.**

d) **Estudie Bachillerato, si es mujer.**

e) **Sea mujer, si estudia Bachillerato.**

Sean los sucesos *M*, *H*, *S* y *BV* que el estudiante es mujer, hombre, estudia Secundaria y estudia Bachillerato, respectivamente.

a) $P\left(5\right) = \frac{850}{1230} = \frac{85}{123} = 0,6911 \text{ o } 69,11\ \%$

La probabilidad de que un estudiante esté en Secundaria es del 69,11 %.

b) $P(M)=\frac{625}{1230}=\frac{125}{246}=0,5081 \text{ o } 50,81\ \%$

Hay un 50,81 % de probabilidad de que el estudiante sea mujer.

c) La probabilidad de que estudie Bachillerato, si es mujer, es la probabilidad condicionada $p(B|M)$.

$P(B|M)=\frac{185}{625}=\frac{37}{246}=0,1504 \text{ o } 15,04\ \%$

Si es una mujer, la probabilidad de que esté estudiando Bachillerato es del 15,04 %.

e) Si estudia Bachillerato, la probabilidad de que el estudiante sea mujer es la probabilidad condicionada.

$P(M|B)$

$P(M|B)=\frac{185}{380}=\frac{37}{76}=0,4868 \text{ o } 48,68\ \%$

Hay un 48,68 % de probabilidad de que sea mujer, si estudia Bachillerato.

42. En una escuela de ingeniería, el 35 % de los estudiantes que comienzan sus estudios consiguen obtener el título. Se eligen al azar dos estudiantes de primer curso. Determina la probabilidad de que finalicen sus estudios:

***a)* Ambos.**

***b)* Al menos uno.**

***c)* Solo uno de ellos.**

Consideremos los sucesos A_1 y A_2 que representan que el primer y segundo estudiantes de primer curso finalizan sus estudios:

$P(A_1)=P(A_2)=0,35$

a) La probabilidad de que ambos finalicen sus estudios es:

$$P(A_1\cap A_2)=\underset{\uparrow}{=}P(A_1)\cdot P(A_2)=(0,35)^2=0,1225 \text{ o } 12,25\%$$

Son independientes

b) La probabilidad de que al menos uno de ellos consiga el título es:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0,35 + 0,35 - 0,1225 = 0,5775 \text{ o } 57,75\ \%$$

c) La probabilidad de que solo uno de los dos obtenga el título es:

$$P\left[(A_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)\right] \underset{\text{Son incompatibles}}{=} P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) =$$

$$= P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1 \cap A_2) = 0,35 + 0,35 - 0,245 = 0,455 \text{ o } 45,5\ \%$$

43. **De 500 estudiantes de segundo de Bachillerato, 200 estudian la opción científico-tecnológica. Además, 150 practican fútbol y 100 practican baloncesto (pero nadie practica ambos deportes). De quienes practican baloncesto, 70 estudian la opción científico-tecnológica, y hay 150 estudiantes que no practican estos deportes ni cursan la opción científico-tecnológica. Se pide:**

a) **Probabilidad de que un estudiante curse la opción científico-tecnológica y no practique estos deportes.**

b) **Si un estudiante practica fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que estudie la opción científico-tecnológica?**

c) **¿Son independientes los sucesos «practicar fútbol» y «cursar la opción científico-tecnológica»?**

Con los datos del enunciado podemos construir la siguiente tabla:

Deporte / Opción	Fútbol (F)	Baloncesto (B)	Ninguno (N)	Total
CT	30	70	100	200
$\overline{CT}$	120	30	150	300
Total	150	100	250	500

a) La probabilidad de que un estudiante curse la opción científico-tecnológica y no practique deportes es:

$$P(CT \cap N) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ o } 20\ \%$$

b) Si sabemos que un estudiante practica fútbol, entonces la probabilidad de que estudie la opción científico-tecnológica es:

$$P(CT|F) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ o } 20\ \%$$

c) Veamos si los sucesos *F* y *CT* son independientes.

$$P(F) = \frac{150}{500} = \frac{3}{10} = 0,3$$
$$P(CT) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} = 0,4$$
$$P(F \cap CT) = \frac{30}{500} = \frac{3}{50} = 0,06$$

Como $P(F \cap CT) = 0,06 \neq P(F) \cdot P(CT) = 0,12$, podemos concluir que los sucesos *F* y *CT* son dependientes.

44. En un grupo de segundo de Bachillerato, el 60 % son chicas, el 40 % aprobaron Matemáticas y el 20 % son chicas que, además, aprobaron Matemáticas. Se elige un estudiante al azar.

***a)* ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico y suspenda Matemáticas?**

***b)* Si el estudiante ha aprobado Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que sea un chico?**

Del enunciado deducimos los siguientes resultados:

	M	$\bar{M}$	Total
Chico (O)	0,20	0,20	0,40
Chica (A)	0,20	0,40	0,60
Total	0,40	0,60	1

Donde *M* es el sucesos «aprueba Matemáticas»

a) La probabilidad de que sea chico y suspenda Matemáticas es:

$$P(0 \cap \bar{M}) = 0,20 \text{ o } 20\ \%$$

b) Si el estudiante ha aprobado Matemáticas, la probabilidad de que sea chico es la probabilidad condicionada siguiente:

$$P(O|M) = \frac{P(O \cap M)}{P(M)} = \frac{0,20}{0,40} = 0,5 \text{ o } 50\ \%$$

45. **Una bolsa contiene una bola verde, tres rojas y seis amarillas. Se eligen al azar dos bolas (con reemplazamiento).**

a) **¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean amarillas?**

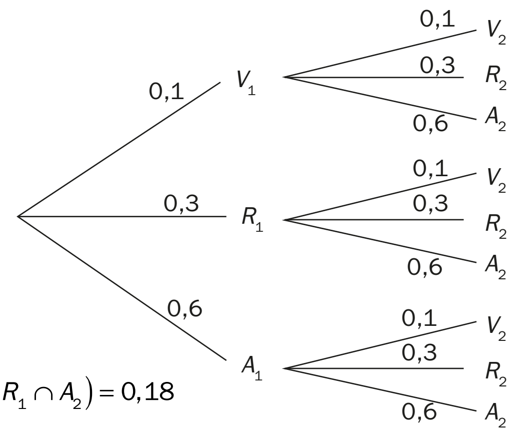
b) **¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?**

c) **¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea amarilla?**

d) **¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean de colores diferentes?**

Un diagrama de árbol que representa este experimento es:

1.ª elección **2.ª elección** **Probabilidad del resultado**



$P(V_1 \cap V_2) = 0,01$

$P(V_1 \cap R_2) = 0,03$

$P(V_1 \cap A_2) = 0,06$

$P(R_1 \cap V_2) = 0,03$

$P(R_1 \cap R_2) = 0,09$

$P(R_1 \cap A_2) = 0,18$

$P(A_1 \cap V_2) = 0,06$

$P(A_1 \cap R_2) = 0,18$

$P(A_1 \cap A_2) = 0,36$

a) La probabilidad de que ambas sean amarillas es:

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot p(A_2) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$ o 36 %

b) La probabilidad de que ambas sean rojas es:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \text{ o } 9\,\%$$

c) Para obtener la probabilidad de que ninguna de las bolas sea: amarillas sumaremos los casos en los cuales esto ocurre. Así:

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 0,01 + 0,03 + 0,03 + 0,09 = 0,16 \text{ o } 16\,\%$$

d) De forma similar, ara obtener la probabilidad de que la dos bolas extraídas sean de colores diferentes, sumaremos aquellos casos en los que esto corre. Así:

$$P(\text{dos bolas de colores diferentes}) = 0,03 + 0,06 + 0,03 + 0,18 + 0,06 + 0,18 = 0,54 \text{ o } 54\ \%$$

46. Según un estudio reciente, el 52 % de los jóvenes europeos entre 18 y 25 años estudia, el 58 % trabaja y un 32 % simultanea sus estudios con el trabajo. Se elige al azar una persona de este colectivo.

***a)* Calcula la probabilidad de que solo estudie.**

***b)* Determina la probabilidad de que ni estudie ni trabaje.**

***c)* Si no trabaja, ¿qué probabilidad hay de que estudie?**

Sean *S* y *T* los sucesos que indican que los jóvenes europeos estudian y trabajan, respectivamente.

$$P(S) = 0,52 \qquad P(T) = 0,58 \qquad P(S \cap T) = 0,32$$

a) La probabilidad de que solo estudie es:

$$P(S \cap \overline{T}) = P(S) - (S \cap T) = 0,52 - 0,32 = 0,20 \text{ o } 20\ \%$$

b) La probabilidad de que ni estudie ni trabaje es:

$$P(\overline{S} \cap \overline{T}) \underset{\uparrow}{=} P(\overline{S \cup T}) = 1 - P(S \cup T) = 1 - [P(S) + P(T) - 1(S \cap T)] =$$

Ley de Morgan

$$= 1 - [0,52 + 0,58 - 0,32] = 0,22 \text{ o } 22\ \%$$

c) Si no trabaja, la probabilidad de que estudie es la siguiente probabilidad condicionada:

$$P(S|\overline{T}) = \frac{P(S|\overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(S) - P(S \cap T)}{1 - P(T)} = \frac{0,52 - 0,32}{1 - 0,58} = \frac{0,20}{0,42} = 0,4762 \text{ o } 47,62\ \%$$

47. Si *A* y *B* son dos sucesos que verifican que $P(A) = 0,3$ y $P(B) = 0,8$. ¿Son *A* y *B* sucesos compatibles? Si *A* y *B* son independientes, ¿cuánto vale $P(A \cup B)$?

- Como $P(A) + P(B) = 0,3 + 0,8 = 1,1 > 1$, los sucesos A y B son compatibles.

Si A y B son independientes, entonces

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

  Por tanto,

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ = 0{,}3 + 0{,}8 - 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}86$$

48. Se consideran los sucesos *A* y *B*, tales que $P(A) = 0{,}42$, $P(B) = 0{,}68$ y $P(A \cup B) = 0{,}79$. Estudia si *A* y *B* son compatibles e independientes.

- A y B son compatibles si $A \cap B \neq 0$, es decir, $P(A \cap B) \neq 0$.

  Ahora bien,

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}42 + 0{,}68 - 0{,}79 = 0{,}31$$

  Por tanto, los sucesos A y B son compatibles.

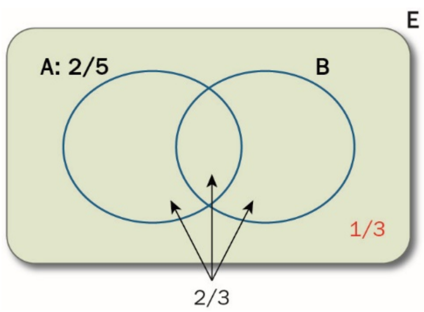
- A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot p(B)$.

  $$P(A \cap B) = 0{,}31 \neq 0{,}2856 = 0{,}42 \cdot 0{,}68 = P(A) \cdot P(B)$$

  Luego, A y B son sucesos dependientes.

49. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(\bar{A} \cup B) = \frac{14}{15}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Calcula $P(B)$, $P(A \cap \bar{B})$ y $P(B|A)$. ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

Representaremos los datos en un diagrama de Venn:



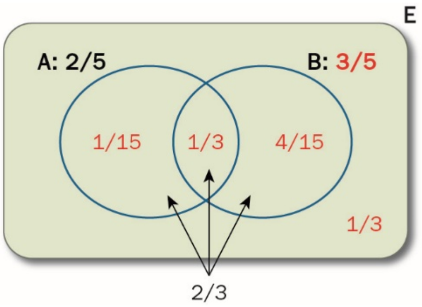
- $P\left(\bar{A}\cup B\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)+P\left(B\right)\Rightarrow\dfrac{14}{15}=\dfrac{1}{3}+P\left(B\right)\Rightarrow P\left(B\right)=\dfrac{14}{15}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$
- $P\left(A\cup B\right)=P\left(4\right)+\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\Rightarrow P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cup B\right)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$

  Luego, $P\left(A\cap\bar{B}\right)=P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{15}$

- $P\left(B|A\right)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{1/3}{2/5}=\dfrac{5}{6}$

  Como $P\left(A\cap B\right)=\dfrac{1}{3}\neq P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{25}$ los sucesos A y B son dependientes.

  Observa que con los resultados obtenidos podemos completar el diagrama de Venn inicial.



50. **Sean A y B dos sucesos con $P\left(\bar{A}\right)=0,4$ y $P\left(B\right)=0,7$. Si A y B son independientes, calcula $P\left(A\cup B\right)$ y $P\left(A-B\right)$.**

Si A y B son independientes, entonces

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$$

- $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=0,6+0,7-0,6\cdot 0,7=0,88$
- $P\left(A-B\right)=P\left(A\cap\bar{B}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Son independientes}}}{=}P\left(A\right)\cdot P\left(\bar{B}\right)=0,6\cdot 0,3=0,18$

  O bien, de esta otra forma:

- $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,6-0,6\cdot 0,7=0,18$

51. **Según un estudio, el 85 % de los jóvenes españoles conoce las noticias diariamente a través de Internet. En una encuesta realizada a tres jóvenes elegidos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno se informe por Internet?**

Sea A_i = «el joven i-ésimo se informa por Internet»

$$P(A_i)=0,85 \qquad\qquad i=1,\ 2,\ 3$$

Los sucesos A_i son independientes entre sí.

La probabilidad de que al menos uno se informe por internet es:

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_2\cap A_3)-P(A_1\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)=\\&=0,85+0,85+0,85-0,85\cdot 0,85-0,85\cdot 0,85-0,85\cdot 0,85+0,85\cdot 0,85\cdot 0,85=\\&=0,996625 \text{ o } 99,66\ \%\end{aligned}$$

Hay un 99,66 % de probabilidad de que al menos uno de los tres jóvenes se informe por internet.

52. **Consideremos dos sucesos independientes, *A* y *B*, tales que $P(A\cap B)=0,3$ y $P(A|B)=0,5$. Calcula:**

a) $P(A)$ **y** $P(B)$**.** **b)** $P(A\cup B)$ **y** $P(B|A)$ **.**

a) • $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow 0,5=\dfrac{0,3}{P(B)}\Rightarrow$

- $P(B)=\dfrac{0,3}{0,5}=0,6$

Por otro lado, como A y B son independientes se cumple que:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow 0,3=P(A)\cdot 0,6\Rightarrow$

- $P(A)=\dfrac{0,3}{0,6}=0,5$

b) • $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,5+0,6-0,3=0,8$

- $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,3}{0,5} = 0,6$

53. **Una persona ha recibido los pedidos de sus compras por Internet a través de tres empresas distintas de mensajería, *A, Q* y *R,* independientes entre sí. Se sabe que la probabilidad de recibir un pedido en malas condiciones con cada una de ellas vale $P(A) = 0,05$, $P(Q) = 0,03$ y $P(R) = 0,12$. ¿Qué es más probable: que reciba los tres pedidos en buenas condiciones o que, al menos, uno esté en malas condiciones?**

- La probabilidad de que reciba los tres pedidos en buenas condiciones es:

  $P(\bar{A}\cap\bar{Q}\cap\bar{R}) = P(\bar{A})\cdot P(\bar{Q})\cdot P(\bar{R}) = 0,95\cdot 0,97\cdot 0,88 = 0,810\,92$ o $81,09\ \%$

  Por tanto, la probabilidad de que reciba los tres pedidos en buenas condiciones es del 81,09%.

- La probabilidad de que, al menos, uno de los pedidos esté en malas condiciones es $p(A\cup Q\cup R)$, utilizaremos dos procedimientos productos para obtenerlo.

  1.er procedimiento:

  $$P(A\cup Q\cup R) = P(A)+P(Q)+P(R)-P(A\cap Q)-P(Q\cap R)+P(A\cap Q\cap R) =$$
  $$= 0,05+0,03+0,12-0,05\cdot 0,03-0,05\cdot 0,12-0,03\cdot 0,12+0,05\cdot 0,03\cdot 0,12 = 0,189\,08$$

  2.º procedimiento:

  $$P(A\cup R\cup Q) = 1-P\left(\overline{A\cap Q\cap R}\right) = 1-\left(\bar{A}\cap\bar{Q}\cap\bar{R}\right) = 1-P(\bar{A})-P(\bar{Q})\cdot P(\bar{R}) =$$
  $$= 1-0,95-0,97\cdot 0,88 = 0,189\,08$$

  Por tanto, la probabilidad de que reciba, al menos, un pedido en malas condiciones es del 18,91 %.

  En consecuencia, es más probable que reciba los tres pedidos en buenas condiciones a que reciba, al menos, uno en malas condiciones.

Teoremas de la probabilidad total y de Bayes

54. **Se tienen tres cajas con canicas. La primera caja contiene tres canicas, la segunda, cinco y la tercera, cuatro. Cada una de ellas contiene solo una canica roja. Se elige al azar una caja y se saca de ella, también al azar, una canica.**

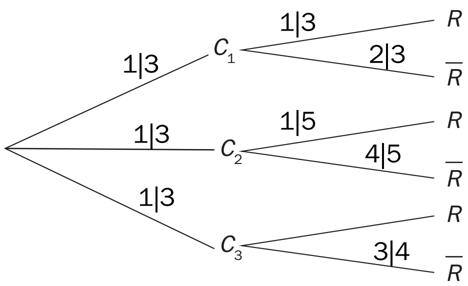
a) **¿Cuál es la probabilidad de que sea una canica roja?**

***b)* Si se sabe que la canica extraída es roja, ¿qué probabilidad hay de que proceda de la primera caja?**

Designemos para C_1, C_2 y C_3 a la primera, segunda y tercera cajas, respectivamente. Y sea R el suceso que indica que la canica extraída es roja.

Con la información dada podemos construir el siguiente diagrama de árbol:

Selección de caja **Selección de canica** **Probabilidad de los resultados**



$$p(C_1 \cap R) = \frac{1}{9}$$

$$p(C_2 \cap R) = \frac{1}{15}$$

$$p(C_3 \cap R) = \frac{1}{12}$$

a) Para hallar la probabilidad de que la canica extraída sea roja basta seguir las ramas del árbol que finalizan en el suceso R, y sumarlas. Así:

$$P(R) = \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{47}{180} = 0{,}2611$$

De forma más precisa, estamos utilizando el teorema de la probabilidad total en dos etapas sucesivas. Así:

$$P(R) = P(C_1 \cap R) + P(C_2 \cap R) + P(C_3 \cap R) = P(C_1)\cdot P(R|C_1) + P(C_2)\cdot P(R|C_2) + P(C_3)\cdot P(R|C_3) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{47}{180} = 0{,}2611$$

La probabilidad de que se extraiga una canica roja es de aproximadamente el 26,11 %.

b) Si se sabe que la canica es roja, la probabilidad de que proceda de la primera caja es la probabilidad condicionada $P(C_1|R)$. Aplicando el teorema de Bayes obtenemos:

$$P(C_1|R) = \frac{P(C_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{1/9}{47/180} = \frac{20}{47} \simeq 0{,}4255$$

La probabilidad de que la canica extraída proceda de la primera caja, sabiendo que es roja, es de aproximadamente el 42,55 %

55. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6, y otro trucado con cuatro caras numeradas con el número 5 y dos caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

a) **Calcula la probabilidad de obtener un 5.**

b) **Si el resultado de la tirada es un 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?**

Sean los sucesos:

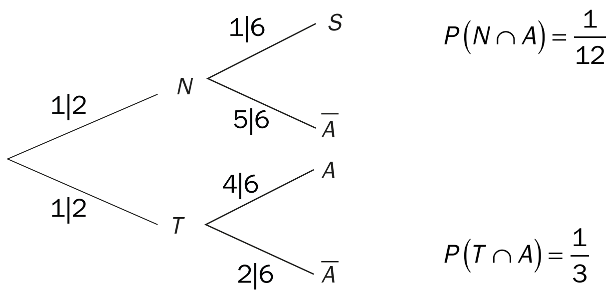
N = «dado normal»

T = «dado trucado»

A = «obtener un 5»

Un diagrama de árbol que representa esta experiencia en dos etapas sucesivas es:

Dado **Resultado** **Probabilidad**



a) Calculamos la probabilidad de obtener un 5 sumando las ramas que finalizan en el suceso A, o lo que es equivalente, utilizando el teorema de la probabilidad total. Así:

$$P(A)=P(N\cap A)+P(T\cap A)=P(N)\cdot P(A|N)+P(T)\cdot P(A|T)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}\simeq 0{,}4167$$

La probabilidad de obtener un 5 es equivalente de un 41,67 %.

b) Si se sabe que el resultado es un 5, la probabilidad de haber lanzado el dado trucado es $P(T|A)$.

Según el teorema de Bayes,

$$P(T|A)=\frac{P(T\cap A)}{P(A)}=\frac{1/3}{5/12}=\frac{4}{5}=0,8$$

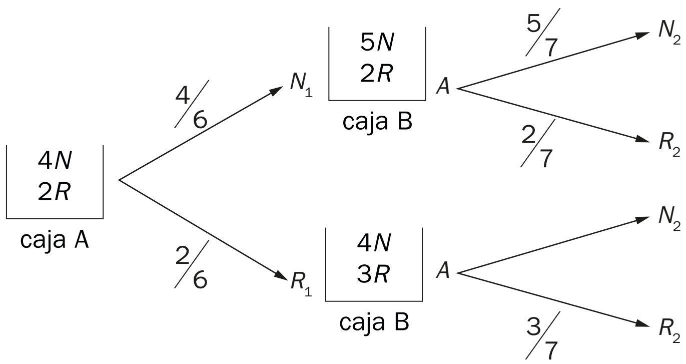
Luego, con la información de que el resultado obtenido es un 5, la probabilidad de que proceda del dado trucado es del 80 %.

56. Se dispone de dos cajas: la caja *A* contiene 3 bolas negras y 2 bolas rojas, mientras que la caja *B* contiene 4 bolas negras y 4 rojas.

a) **Se escoge una bola al azar de la caja *A* y se pasa a la caja *B*. A continuación, se extrae una bola de la caja *B*. ¿Qué probabilidad hay de que sea negra?**

b) **En la situación original de las cajas, se selecciona una de ellas al azar y se saca una bola, que resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola proceda de la caja *B*?**

a) A continuación, figura un esquema de la experiencia:



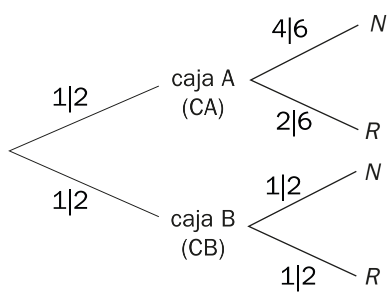
Para hallar la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea negra sumaremos las ramas que finalizan en N_2. Así:

$$P(N_2)=P(N_1\cap N_2)+P(R_1\cap N_2)=P(N_1)\cdot P(N_2|N_1)+P(R_1)\cdot P(N_2|R_1)=$$
$$=\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{3}=0,6667$$

Después de este proceso, la probabilidad de que la bola extraída sea negra es aproximadamente del 66,67 %.

b) El diagrama de árbol de esta segunda experiencia es:

Elección de caja **Extracción de una bola Probabilidad de resultado**



$P(CA \cap N) = \frac{1}{3}$

$P(CB \cap N) = \frac{1}{4}$

Sabiendo que la bola es negra, la probabilidad de que proceda de la caja B es la probabilidad condicionada $P(CB|N)$. Para su cálculo utilizaremos el teorema de Bayes. Así:

$$P(CB|N) = \frac{P(CB \cap N)}{P(N)} = \frac{P(CB) \cdot P(N|CB)}{P(CA) \cdot P(N|CA) + P(CB) \cdot P(N|BC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7} = 0,4286$$

Por tanto, sabiendo que la bola extraída es negra, la probabilidad de que proceda de la caja B es de 42,86 %.

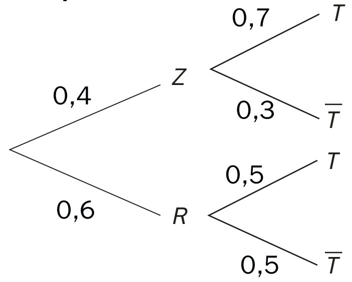
57. Una persona utiliza diariamente para relajarse dos aplicaciones, *Zenon* y *Relaxing*, la primera en el 40 % de las ocasiones y la segunda en el 60 % restante. Cuando usa *Zenon*, lo hace durante más de una hora en el 70 % de los casos, mientras que con *Relaxing* pasa más de una hora la mitad de las veces. Si se analiza un día al azar en que utiliza estas aplicaciones:

a) **¿Cuál es la probabilidad de que pase enganchado más de una hora?**

b) **Si resulta que estuvo más de una hora, calcula la probabilidad de que usara *Relaxing*.**

Esta actividad puede abordarse en dos etapas sucesivas: primera, la elección de la aplicación para relajarse y, segunda, si el tiempo que le dedica es superior o no a una hora. Así, un diagrama de árbol que describe esta situación es:

Aplicación **Duración** **Probabilidad de los resultados**



$P\left(Z\cap T\right)=0{,}4\cdot 0{,}7=0{,}28$

$P\left(Z\cap \overline{T}\right)=0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}12$

$P\left(R\cap T\right)=0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}30$

$P\left(R\cap \overline{T}\right)=0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}30$

Donde *Z, R* y *T* son respectivamente los sucesos «utiliza *Zenon*», «utiliza *Relaxing*» y «está enganchado más de una hora».

a) La probabilidad de que un día elegido al azar, esta persona use una de estas dos aplicaciones más de una hora, es *p*(*T*). La podemos hallar sumando las ramas primera y tercera del árbol, o lo que es equivalente, utilizando el teorema de la probabilidad total. Así:

$$P\left(T\right)=P\left(Z\cap T\right)+P\left(R\cap T\right)=P\left(z\right)\cdot P\left(T|Z\right)+P\left(R\right)\cdot P\left(T|R\right)=0{,}4\cdot 0{,}7+0{,}6\cdot 0{,}5=$$
$$=0{,}28+0{,}30=0{,}58 \text{ o } 58\ \%$$

La probabilidad de que esté enganchado más de una hora con estas aplicaciones es del 58 %

b) Si se sabe que pasó más de una hora, la probabilidad de que usara la aplicación *Relaxing* es $P\left(R|T\right)$. Para su cálculo nos serviremos del teorema de Bayes. Luego:

$$P\left(R|T\right)=\frac{P\left(R\cap T\right)}{P\left(T\right)}=\frac{P\left(R\right)\cdot P\left(T|R\right)}{P\left(T\right)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}5}{0{,}58}=\frac{0{,}30}{0{,}58}=0{,}5172 \text{ o } 51{,}72\ \%$$

Hay un 51,72 % de probabilidad de que usara *Relaxing* si pasa más de una hora enganchado.

58. En una bolsa hay 25 cubos. Unos son azules y otros blancos. Se eligen dos cubos de forma aleatoria. Si la probabilidad de escoger dos cubos del mismo color es la misma que la de seleccionar dos cubos de distinto color, ¿cuántos cubos azules hay en la bolsa?

Sean los sucesos:

A_1 = «el primer cubo seleccionado es azul»

A_2 = «el segundo cubo seleccionado es azul»

B_1 = «el primer cubo seleccionado es blanco»

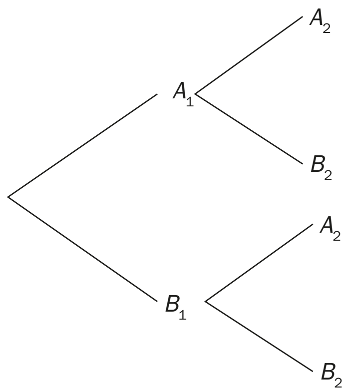
B_2 = «el segundo cubo seleccionado es blanco»

Supongamos que hay p cubos azules en la bolsa. Y, por tanto, habrá 25 – p cubos blancos. Entonces:

$$P(A_1)=\frac{P}{25} \quad \text{y} \quad P(B_1)=\frac{25-P}{25}$$

Un diagrama de árbol que describe la elección aleatoria de dos cubos es el siguiente:

1.^{er} cubo **2.º cubo** **Probabilidad de los resultados**



$$P(A_1\cap A_2)=\frac{P}{25}\cdot\frac{P-1}{24}=\frac{P(P-1)}{600}$$

$$P(A_1\cap B_2)=\frac{P}{25}\cdot\frac{25-P}{24}=\frac{P(25-P)}{600}$$

$$P(B_1\cap A_2)=\frac{25-P}{25}\cdot\frac{P}{24}=\frac{P(25-P)}{600}$$

$$P(B_1\cap B_2)=\frac{25-P}{25}\cdot\frac{24-P}{24}=\frac{(25-P)(24-P)}{600}$$

La probabilidad de que los dos cubos sean del mismo color es:

$$P(A_1\cap A_2)+P(B_1\cap B_2)=\frac{P(P-1)}{600}+\frac{(25-P)(24-P)}{600}=\frac{2P^2-50+600}{600}=\frac{P^2-25P+300}{300}$$

La probabilidad de que los dos cubos sean de distinto color es:

$$P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) = \frac{P(25-P)}{600} + \frac{P(25-P)}{600} = \frac{-2P^2 + 50P}{600} = \frac{-P^2 + 25P}{300}$$

Si ambas probabilidades son iguales, entonces:

$$P^2 - 25P + 300 = -P^2 + 25P \Rightarrow 2P^2 - 50P + 300 = 0$$
$$\Rightarrow P^2 - 25P + 150 = 0 \Rightarrow P - 10 \quad y \quad P = 15$$

Por tanto, hay dos soluciones: 10 cubos azules o 15 cubos azules.

En resumen, la bolsa contiene 10 cubos azules y 15 blancos, o bien 15 cubos azules y 10 blancos.

Combinatoria y probabilidad

59. Un examen consta de 10 preguntas del tipo «verdadero o falso». Si un estudiante responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de que marque 6 preguntas verdaderas y el resto falsas?

Sean *V* y *F* los sucesos que reflejan si se marcan como verdadera y falsa, respectivamente, una pregunta. Así:

$$P(V) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(F) = \frac{1}{2}.$$

Ahora bien, extraer 6 respuestas como verdaderas de las 10 existentes, es el número de combinaciones de 6 elementos elegidos de un conjunto de 10 elementos, es decir:

$$C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6-14!} = 210$$

Por tanto, la probabilidad de responder 6 preguntas verdaderas y 4 falsas es:

$$P = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{210}{2^{10}} = \frac{210}{1024} = \frac{105}{512} = 0{,}2051 \text{ o } 20{,}51\ \%$$

69. Un grupo de estudiantes consta de 12 chicas y 8 chicos. Cada día el profesor de Matemáticas elige a un estudiante al azar para realizar ejercicios en la pizarra. Determina la probabilidad de que, en los cinco días de la semana, salgan a la pizarra dos chicas. ¿Y al menos tres chicos?

Sean los sucesos *O* y *A* que representan a la elección de un chico y una chica, respectivamente:

$$P(O)=\frac{8}{20}=0,4 \quad , \quad P(A)=\frac{2}{20}=0,6$$

a) Elegir chicos y chicas es un proceso formado por sucesos independientes. Por tanto, la probabilidad de elegir dos chicas, es equivalente, a elegir dos chicas y tres chicos en los cinco días de la semana. Pero, además, hay que comprobar los posibles días en que pueden salir las dos chicas que es $C_{5,2}=\binom{5}{2}=10$.

Luego, la probabilidad de que, en los cinco días de la semana, salgan a la pizarra dos chicas es:

$$P(2\text{ chicas})=\binom{5}{2}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ \text{3 chicos}}}{(0,4)^3}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ \text{3 chicas}}}{(0,6)^2}=0,2304\text{ o }23,04\ \%$$

b) Si tienen que salir, al menos, tres chicos pueden salir tres, cuatro o cinco días. Así:

$$P(2\text{ chicos})=\binom{5}{3}(0,4)^3\cdot(0,2)^2=0,0256$$

$$P(4\text{ chicas})=\binom{5}{4}(0,4)^4\cdot(0,2)=0,0256$$

$$P(5\text{ chicos})=(0,4)^5=0,01024$$

Por tanto, la probabilidad de que, en los cinco días de la semana, salgan al menos tres chicos es:

$$P(\text{al menos 3 chicos})=0,0256+0,0256+0,01024=0,06144\text{ o }6,14\ \%.$$

61. Se extraen cinco cartas de la baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco sean del mismo palo?

Los casos posibles de extraer 5 cartas de la baraja española son $C_{40,5}=\binom{40}{5}$.

Mientras que los casos favorables de extraer 5 cartas del mismo palo, por ejemplo de oros es $C_{10,5}=\binom{10}{5}$. Pero como hay 4 palos, entonces hay:

$$4 \cdot \binom{10}{5}$$

Por tanto, la probabilidad de extraer 5 cartas de la baraja española del mismo palo es:

$$P = \frac{4 \cdot \binom{10}{5}}{\binom{40}{5}} = \frac{1008}{658\,008} = 0{,}0015 \text{ o } 0{,}15\ \%$$

62. **Para pasar el fin de semana, siete chicas han alquilado un piso de tres habitaciones, una con tres camas y las otras dos con dos camas cada una. ¿De cuántas formas pueden distribuirse?**

En primer lugar, las 7 chicas se pueden ubicar en la habitación que tiene 3 camas de $C_{7,3}$ formas.

A continuación, las 4 chicas restantes se pueden colocar en una de las habitaciones que tiene 2 cama de $C_{4,2}$ formas. Y, finalmente, a las 2 restantes solo le queda una opción, es decir, $C_{2,2}$.

En total hay, pues, las siguientes formas de distribuirse:

$$C_{7,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 35 \cdot 6 \cdot 1 = 210 \text{ formas}.$$

63. **Una entrenadora de baloncesto dispone de 12 jugadores, de los cuales cinco juegan de pívot, cuatro son aleros y tres son bases. ¿Cuántos quintetos iniciales distintos puede alinear?**

El quinteto inicial estará formado por un base, dos aleros y dos pívots. Por tanto, se trata de elegir un base de tres, dos aleros de cuatro y dos pívots de cinco. Es decir $C_{3,1}$, $C_{4,2}$ y $C_{5,2}$.

Luego, el número de quinteto iniciales es:

$$C_{3,1} \cdot C_{4,2} \cdot C_{5,2} = \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 3 \cdot 6 \cdot 10 = 180$$

64. **Un estudiante tiene *n* amigos. Como despedida, en su último curso, quiere salir cada noche con un grupo diferente de cuatro amigos. Si el curso tiene 224 días, ¿cuál es el mayor valor de *n,* o lo que es equivalente, el mayor número de amigos necesario?**

Las distintas formas de elegir un conjunto de 4 amigos de un total de *n* vienen dadas por:

$$C_{n,4}=\binom{n}{4}=\frac{n!}{4!(n-4)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)}!}{24\cancel{(n-4)}!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Ahora bien, este número tiene que ser inferior o igual a 224. Luego,

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\leq 224$$
$$n(n-1)(n-2)(n-3)\leq 5376$$

El mayor valor de *n* que verifica esta inecuación es *n* = 10. (Compruébalo).

Por tanto,

$$C_{10,4}=\binom{10}{4}=210$$

Si tiene 10 amigos puede cenar un total de 210 días con grupos de 4 amigos diferentes.

Nota bene: comprueba que con *n* = 11 se superan los 224 días disponibles.

Aplicaciones

65. Avería de automóviles. Durante el periodo de garantía, los vehículos más modernos suelen sufrir tres tipos de averías: en la válvula EGR (*A*), en el volante bimasa (*B*) y en el turbocompresor (*T*). Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A)=0{,}03 \qquad P(B)=0{,}04 \qquad P(T)=0{,}04$$
$$P(A\cup B)=0{,}06 \qquad P(A\cup T)=0{,}05 \qquad P(B\cup T)=0{,}07$$
$$P(A\cap B\cap T)=0{,}001$$

Se elige un vehículo al azar durante el periodo de garantía.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que no se averíen ni su válvula EGR ni su volante bimasa?**

b) **¿Qué probabilidad hay de que el vehículo presente al menos una avería de este tipo?**

c) **¿Cuál es la probabilidad de que presente, como mucho, dos de estas averías?**

a) La probabilidad de que no tenga averiada ni la válvula EGR ni el volante bimasa es:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}06=0{,}94 \text{ o } 94\%$$

Ley de Morgan

Hay, por tanto, una probabilidad del 94 % de que un vehículo en periodo de garantía no tenga averías ni de la válvula EGR ni del volante bimasa.

b) La probabilidad de que el vehículo presente al menos una avería de este tipo es:

$$P(A\cup B\cup T)=P(A)+P(B)+P(T)-P(A\cap B)-P(A\cap T)-P(B\cap T)+P(A\cap B\cap T)$$

Calculemos, previamente, $P(A\cap B)$, $P(A\cap T)$ y $P(B\cap T)$.

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)+P(B)-p(A\cup B)=0{,}03+0{,}04-0{,}06=0{,}01\\P(A\cap T)&=P(A)+P(T)-p(A\cup T)=0{,}03+0{,}04-0{,}05=0{,}02\\P(B\cap T)&=P(B)+P(T)-p(B\cup T)=0{,}04+0{,}04-0{,}07=0{,}01\end{aligned}$$

Luego,

$$P(A\cup B\cup T)=0{,}03+0{,}04+0{,}04-0{,}01-0{,}02-0{,}01+0{,}001=0{,}071\text{ o }71\ \%$$

En el 7,1 % de las ocasiones el vehículo presentará al menos una de las averías de este tipo.

c) Si debe presentar, como mucho dos averías es porque puede no traer ninguna, una o dos averías.

Por tanto, el suceso contrario es que tenga tres averías.

$$\begin{aligned}&P(\text{tenga como mucho dos averías})=1-P(\text{tenga tres averías})=\\&=1-P(A\cap B\cap T)=1-0{,}001=0{,}999\text{ o }99{,}9\ \%\end{aligned}$$

La probabilidad de que un vehículo durante el periodo de garantía presente como mucho dos averías es del 99,9%.

66. Máquina calibradora de naranjas. Una máquina calibradora electrónica usada para clasificar las naranjas según unas medidas establecidas falla en el dos por mil de las ocasiones. Si se seleccionan al azar tres naranjas calibradas por dicha máquina, ¿qué probabilidad hay de que al menos una no cumpla las medidas fijadas?

Sea A_i = «la naranja *i*-ésima seleccionada cumple las medidas establecidas», i = 1, 2, 3

$$P(A_i)=\frac{998}{1000}=0{,}998$$

En una muestra de tres naranjas, la probabilidad de que al menos una no cumpla las medidas fijadas es:

$$P\left(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3\right) \underset{\uparrow}{=} P\left(\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}\right) = 1 - P\left(A_1\right) \cdot p\left(A_2\right) \cdot p\left(A_3\right) =$$

Son independientes

$$= 1 - \left(0{,}998\right)^3 = 0{,}0060 \text{ o } 0{,}6\ \%.$$

La probabilidad de que al menos una de las tres naranjas no cumpla las medidas establecidas es del 0,6 %.

67. Grupos de *WhatsApp*. Un grupo de *WhatsApp,* formado por los estudiantes de idiomas, está compuesto por un 60 % de mujeres. Se sabe que el 30 % del grupo estudia chino y, además, que la cuarta parte de las mujeres estudia este idioma. Se recibe un mensaje en el grupo:

a) **Encuentra la probabilidad de que lo haya enviado una mujer, si se sabe que la persona remitente estudia chino.**

b) **Si el mensaje no contiene información sobre el sexo o idioma de estudio de la persona remitente, calcula la probabilidad de que esta sea un hombre y estudie chino.**

Con la información del enunciado podemos construir la siguiente tabla:

	Estudia chino (C)	No estudia chino ($\bar{M}$)	Total
Mujer (M)	0,15	0,45	0,60
Hombre (H)	0,15	0,25	0,40
Total	0,30	0,70	1

a) La probabilidad de que haya enviado el mensaje una mujer, sabiendo que estudia chino, es la siguiente probabilidad condicionada:

$$P\left(M|C\right) = \frac{P\left(M \cap C\right)}{P(C)} = \frac{0{,}15}{0{,}30} = 0{,}5 \text{ o } 50\ \%$$

b) Sin ninguna información del remitente, la probabilidad de que este sea hombre y estudie chino es: $P\left(H \cap C\right) = 0{,}15 \text{ o } 15\ \%$.

68. Problemas técnicos. Se ha comprobado que, a la hora de realizar un trámite, una página web oficial da problemas técnicos con el navegador *G* en el 4 % de los casos, mientras que con otro navegador *S* ocurre en un 20 % de las ocasiones. Por otro lado, da problemas con ambos navegadores un 1 % de las veces. Calcula e interpreta las siguientes probabilidades:

$P(\bar{G} \cap S)$, $P(G \cup S)$, $P(G|S)$, $P(G|\bar{S})$, $P(\bar{G}|S)$ y $P(\bar{G}|\bar{S})$

Del enunciado anterior obtenemos que:

$$P(G) = 0,04, \quad P(S) = 0,20 \text{ y } P(G \cap S) = 0,01$$

- $P(\bar{G} \cap S) = P(S) - P(G \cap S) = 0,04 - 0,01 = 0,03$

  La probabilidad de que de problemas el navegador *S*, pero no el *G*, es del 3 %.

- $P(G \cup S) = P(G) + P(S) - P(G \cap S) = 0,04 + 0,20 - 0,01 = 0,23$

  Hay un 23 % de probabilidad de que al menos uno de los navegadores de problemas.

- $P(G|S) = \dfrac{P(G \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,01}{0,20} = 0,05$
- Si el navegador *S* ha dado problemas, la probabilidad de que lo de el navegador *G* es del 5 %.
- $P(G|\bar{S}) = \dfrac{P(G \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \dfrac{P(G) - P(G \cap S)}{1 - P(S)} = \dfrac{0,04 - 0,01}{1 - 0,20} = \dfrac{0,03}{0,80} = 0,0375$

  Si se sabe que el navegador *S* no da problemas, la probabilidad de que lo de *G* es del 3,75 %.

- $P(\bar{G}|S) = \dfrac{P(\bar{G} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,03}{0,20} = 0,15$

  Si el navegador *S* da problemas técnicos, la probabilidad de que no los de el navegador *G* es del 15 %.

- $P(\bar{G}|\bar{S}) = \dfrac{P(\bar{G} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \dfrac{P(\overline{G \cup S})}{1 - P(S)} = \dfrac{1 - P(G \cup S)}{1 - P(S)} = \dfrac{1 - 0,23}{1 - 0,20} = \dfrac{0,77}{0,80} = 0,9625$

  Si se sabe que el navegador *S* no da problemas técnicos, la probabilidad de que tampoco los del navegador G es del 96,25 %.

69. Alimentación y ejercicio. En una encuesta realizada en un centro escolar sobre hábitos alimentarios y actividad física, se obtuvo que el 40 % de las personas encuestadas hacían ejercicio regularmente, y el 65 % tomaba un desayuno equilibrado. Además, dentro de este último grupo, el 25 % hacía ejercicio con regularidad. Se elige al azar un estudiante de ese centro.

a) **¿Es independiente que realice un desayuno equilibrado y haga ejercicio regularmente?**

b) **Calcula la probabilidad de que ni desayune de forma equilibrada ni haga ejercicio regularmente.**

Consideremos los sucesos:

A = «hace ejercicio regularmente»

D = «toma un desayuno equilibrado»

$P(A)=0,40, \qquad P(D)=0,65 \quad \text{y} \quad P(A|D)=0,25$

a) $P(A|D)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)} \Rightarrow P(A\cap D)=P(D)\cdot P(A|D)=0,65\cdot 0,25=0,1625$

Por otro lado,

$$P(A)\cdot P(D)=0,40\cdot 0,65=0,26$$

Como $P(A\cap D)=0,1625\neq 0,26=(A)\cdot P(D)$ los sucesos A y D son dependientes.

b) $P(\bar{A}\cap\bar{D})=P(\overline{A\cup D})=1-P(A\cup D)=1-[P(A)+P(D)-P(A\cap D)]=$

$=1-[0,40+0,65-0,1625]=0,1125 \text{ o } 11,25\ \%$

La probabilidad de que ni desayune de forma equilibrada ni haya ejercicio regularmente es del 11,25 %.

70. Circuitos. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes de tres fabricantes *A*, *B* y *C*. El 50 % del total de los componentes se compran al fabricante *A*, mientras que a los fabricantes *B* y *C* se les compra un 25 % a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5 % para el fabricante *A*, un 10 % para el fabricante *B* y un 12 % para el fabricante *C*. Con el fin de controlar el proceso de producción, se realiza un control de calidad, eligiendo un circuito al azar.

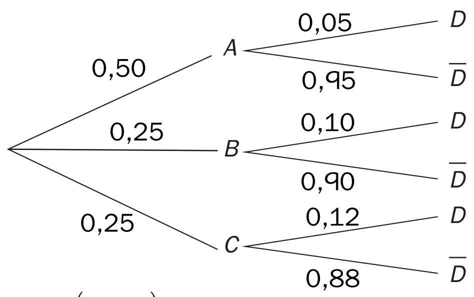
***a)* Halla la probabilidad de que este contenga componentes defectuosos.**

***b)* Si el circuito no contiene componentes defectuosos, ¿qué probabilidad hay de que proceda del fabricante *B*?**

Designamos por A, B y C si los componentes son fabricados por los fabricantes A, B y C, respectivamente. Y sea D el suceso que indica si un componente es defectuoso.

El proceso seguido en dos etapas sucesivas: primera, en la que se elige el fabricante y, segunda, en la que se analiza si el componente es defectuoso o no. Así, un diagrama de árbol que describe esta situación es el siguiente:

Fabricante **Componente** **Probabilidad de resultados**



$P(A \cap D) = 0{,}025$

$P(A \cap \overline{D}) = 0{,}475$

$P(B \cap D) = 0{,}025$

$P(B \cap \overline{D}) = 0{,}225$

$P(C \cap D) = 0{,}030$

$P(C \cap \overline{D}) = 0{,}220$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total y sumado las ramas que finalizan en el suceso D, obtenemos:

$$p(A) = p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D) = p(A) \cdot p(D|A) + p(B).p(D|B) + p(C) \cdot p(D|C) =$$
$$= 0{,}50 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}10 + 0{,}25 \cdot 0{,}12 = 0{,}08$$

La probabilidad de que un circuito contenga componentes defectuosos es del 8 %.

b) Sabiendo que el circuito no contiene componentes defectuosos, la probabilidad de que proceda del fabricante *B* es la probabilidad condicionada $P(B|\overline{D})$.

Para su cálculo, utilizaremos el teorema de Bayes.

$$P(B|\overline{D}) = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}90}{1 - 0{,}08} = \frac{0{,}225}{092} = 0{,}2446 \, .$$

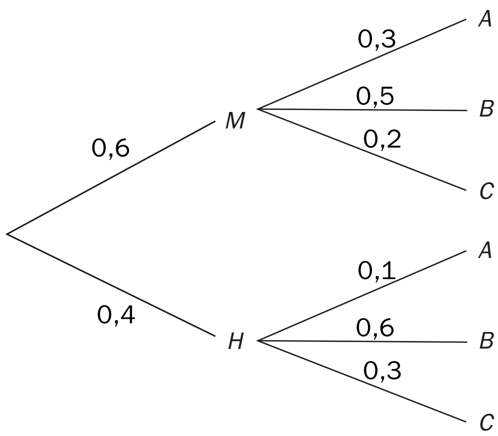
La probabilidad de que proceda del fabricante *B*, si se conoce que el circuito no tiene componentes defectuosos, es de aproximadamente el 24,46 %.

71. Elecciones municipales. En unas elecciones municipales se presentan tres partidos políticos, *A*, *B* y *C*. Se sabe que el 60 % del censo electoral son mujeres y que sus preferencias políticas son: el 30 % vota al parido *A*, el 50 % al *B* y el resto al *C*. Por su parte, entre los hombres las preferencias son: el 10 % vota al partido *A*, el 60 % a *B* y el resto a *C*. Si se elige una persona al azar del censo electoral, ¿cuál es la probabilidad de que sea un hombre y votante del partido *C*? Y si resulta que es votante del partido *C*, ¿qué probabilidad hay de que sea mujer?

Designamos para *A*, *B* y *C* los sucesos que representan que se vota a los partidos *A*, *B* y *C*, respectivamente. Y, además, *H* y *M* si el votante es hombre y mujer, respectivamente.

El diagrama de árbol de la experiencia llevada a cabo en dos etapas sucesivas: primera, eligiendo el sexo del votante y, después, el partido al que se ha votado. Es el siguiente:

Sexo **Partido** **Probabilidad de los resultados**



$P(M \cap A) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$

$P(M \cap B) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,30$

$P(M \cap C) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12$

$P(H \cap A) = 0,4 \cdot 0,1 = 0,04$

$P(H \cap B) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$

$P(H \cap C) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

La probabilidad de que la persona elegido al azar sea un hombre y vote al partido C es:

$P(H \cap C) = P(H) \cdot P(C|H) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$ o 12 %

Por otro lado, si se sabe que es votante del partico C, la probabilidad de que sea mujer, $P(M|C)$, lo calcularemos mediante el teorema de Bayes. Así:

$$P(M|C) = \frac{P(m \cap C)}{P(C)} = \frac{P(M \cap C)}{P(M \cap C) + P(H \cap C)} = \frac{P(M) \cdot P(C|M)}{P(M) \cdot P(C|M) + P(H) \cdot P(C|H)} = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3} =$$

$$= \frac{0,12}{0,24} = 0,5 \text{ o } 50\ \%.$$

72. Empresa de teléfonos. Una empresa de teléfonos tiene tres cadenas de producción para un modelo de terminal. Cada cadena fabrica, respectivamente, un 40, 35 y 25 % de la producción total. La probabilidad de que un teléfono sea defectuoso es del 5, 3 y 2 %, respectivamente. Se considera un teléfono al azar.

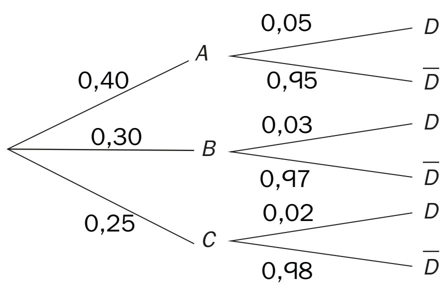
a) **¿Cuál es la probabilidad de que el teléfono presente defectos?**

b) **Si el teléfono es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la segunda cadena?**

Sean *A*, *B* y *C* los sucesos que representan en la primera, segunda y tercera cadenas de la fábrica. Y, por otro lado, indicaremos por *D* el suceso que indica si el teléfono presenta defectos.

Por tanto, el proceso seguido para analizar la cadena de producción y si presenta o defectos el teléfono, lo podemos describir en el siguiente diagrama de árbol.

Cadena **Presente defecto** **Probabilidad de los resultados**



$P(A \cap D) = 0,40 \cdot 0,05 = 0,02$

$P(B \cap D) = 0,30 \cdot 0,03 = 0,0105$

$P(C \cap D) = 0,25 \cdot 0,02 = 0,005$

a) Para obtener la probabilidad de que el teléfono considerado presente defectos sumaremos los resultados de la primera, tercera y quinta ramas.

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) =$$
$$= 0,40 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,02 = 0,0355 \text{ o } 3,55\ \%$$

Luego, la probabilidad de que el teléfono tenía defectos es del 3,55 %.

Observa, que el cálculo de *p*(*D*) es la aplicación del teorema de la probabilidad total.

b) Si el teléfono es defectuoso, la probabilidad de que proceda de la segunda cadena es $P(B|D)$.

Para obtenerla utilizaremos el teorema de Bayes.

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,0105}{0,0355} = 0,2958 \text{ o } 29,58\ \%$$

Hay una probabilidad del 29,58 % de que el teléfono defectuoso proceda de la segunda cadena.

73. Calidad de las manzanas. Una empresa utiliza una máquina para seleccionar las manzanas y detectar en ellas defectos internos y externos. Según datos de la empresa, la máquina rechaza el 10 % de las manzanas por defectos internos, y un 8 % por defectos externos. No obstante, de las manzanas rechazadas por presentar defectos internos, el 2 % son envasadas, mientras que lo son el 3 % de las

manzanas que presentan defectos externos. Si una manzana ha sido envasada, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina haya detectado defectos internos?

Consideremos los siguientes sucesos:

DI = «la manzana presenta defectos internos»

DE = «la manzana presenta defectos externos»

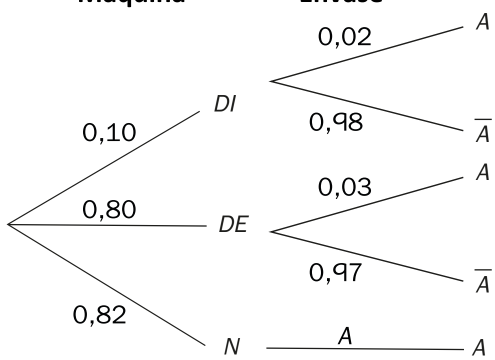
N = «la manzana es normal, no presenta defectos»

A = «la manzana es envasada»

El proceso descrito en el enunciado consiste, en primer lugar, en detectar si la manzana presenta defectos internos o externos y, si por el contrario, no presenta ningún defecto y es normal. Mientras que en segundo lugar figura la decisión de si envasarla o no.

Un diagrama de árbol que muestra este proceso es el siguiente:

Máquina **Envase** **Probabilidad de los resultados**



$P(DI \cap A) = 0,10 \cdot 0,02 = 0,002$

$P(DE \cap A) = 0,08 \cdot 0,03 = 0,0024$

$P(N \cap A) = 0,82 \cdot 1 = 0,82$

Si una manzana ha sido envasada, la probabilidad de que la máquina haya detectado defectos internos es $P(DI|A)$.

Para hallar esta probabilidad a posteriori utilizaremos el teorema de Bayes. Así:

$$P(DI|A) = \frac{P(DI \cap A)}{P(A)} = \frac{P(DI \cap A)}{P(DI \cap A) + P(DE \cap A) + P(N \cap A)} =$$

$$= \frac{P(DI) \cdot P(A|DI)}{P(DI) \cdot P(A|DI) + P(DE) \cdot P(A|DE) + P(N) \cdot P(N \cap A)} =$$

$$= \frac{0,10 \cdot 0,02}{0,10 \cdot 0,02 + 0,08 \cdot 0,03 + 0,82 \cdot 1} = \frac{0,002}{0,884} = 0,0023$$

Hay un 0,23 % de probabilidad de que la máquina haya detectado defectos internos si la manzana ha sido envasada.

Prepárate para la universidad

74. De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de Primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0,60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0,30; mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0,15. Se selecciona un niño al azar de esta región.

a) Obtén la probabilidad de que sufra fracaso escolar.

b) Si tiene fracaso escolar, determina cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

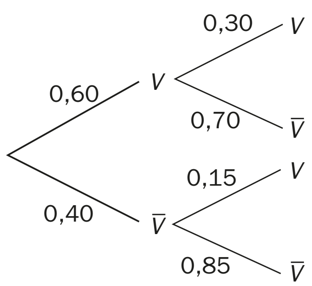
Comunidad de Madrid

Consideremos los sucesos:

V = «un niño juega con consolas o videojuegos más tiempo del recomendado».

F = «un niño tiene fracaso escolar».

Un diagrama de árbol que describe el proceso de estudiar si un niño dedica más o menos tiempo del recomendado a videojuego y, posteriormente, si tiene fracaso escolar o no, es el siguiente:



a) La probabilidad de que un niño tenga fracaso escolar es $p(F)$. Para hallarla, basta sumar las ramas primera y tercera, o lo que es equivalente, aplicar el teorema de la probabilidad total. Así:

$$p(F) = p(V \cap F) + p(\overline{V} \cap F) = p(V) \cdot p(F/V) + p(\overline{V}) \cdot p(F/\overline{V}) = 0,60 \cdot 0,30 + 0,40 \cdot 0,15 = 0,24$$

Hay un 24 % de probabilidad de que un niño tenga fracaso escolar.

b) La probabilidad de que no juegue con estas consolas más del tiempo recomendado, sabiendo que tiene fracaso escolar, es la probabilidad coordinada $p(\overline{V}/F)$. Aplicaremos el teorema de Bayes para calcularlas. Así:

$$p(\overline{V}/F)=\frac{p(\overline{V}\cap F)}{p(F)}=\frac{p(\overline{V})\cdot p(F/\overline{V})}{p(F)}=\frac{0,40\cdot 0,15}{0,24}=\frac{0,06}{0,24}=0,25$$

Por tanto, hay una probabilidad del 25 %.

75. Un centro tiene dos grupos de Bachillerato, A y B. El grupo A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. El grupo B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se selecciona al azar a dos estudiantes del grupo A y uno del grupo B. Calcula:

a) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán.

b) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán.

c) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán.

Navarra

Los casos posibles de elegir al azar a dos estudiantes del grupo *A* y uno del grupo *B*, son:

$$C_{40,2}\cdot C_{25,1}=\binom{40}{2}\cdot\binom{25}{1}=780,25=19\,500$$

a) Los casos favorables de que ninguno de los tres estudie alemán consistirá en elegir 2 del grupo *A* de los 30 que no estudian alemán y 1 del grupo B de los 20 que no estudian alemán. Así:

$$C_{30,2}\cdot C_{20,1}=\binom{30}{2}\cdot\binom{20}{1}=435\cdot 20=8700$$

Por tanto:

$$p(\text{Ninguno de los tres estudia alemán})=\frac{\binom{30}{2}\cdot\binom{20}{1}}{\binom{40}{2}\cdot\binom{25}{1}}=\frac{8700}{19\,500}=\frac{29}{65}=0,4462 \text{ o } 44,62\,\%$$

b) Los casos favorables en los que uno de los tres estudie alemán puede servir que, o bien sea del grupo A o bien del grupo *B*, es decir, elegir 1 de los 10 que estudian alemán del grupo *A* y otro que no estudie alemán del mismo grupo, y 1 del grupo B que lo estudien alemán, o bien elegir 2 del grupo A que no estudien alemán y 1 del grupo B que sí estudie alemán. Es decir:

$$C_{10,1}\cdot C_{30,1}\cdot C_{20,1}+C_{30,2}\cdot C_{5,1}=\binom{10}{1}\cdot\binom{30}{1}\cdot\binom{20}{1}+\binom{30}{2}\cdot\binom{5}{1}=6000+2175=8175$$

Luego:

$$p(\text{uno solo estudie alemán})=\frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{30}{1}\cdot\binom{20}{1}+\binom{30}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{40}{2}\cdot\binom{25}{1}}=\frac{8175}{19\,500}=\frac{109}{260}=0,4192 \text{ o } 41,92\ \%$$

c) La probabilidad de que alguno de los tres estudie alemán es el suceso contrario de que ninguno de los tres estudie alemán. Por tanto_

$$p(\text{alguno de los tres estudie alemán})=1-0,4462=0,5538 \text{ o } 55,38\ \%$$

76. En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca A y 100 de la marca B. Además, se sabe que el 5 % de los tetrabriks de la marca A están caducados, así como el 10 % de los tetrabriks de la marca B. Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 que hay en el almacén, se pide:

a) Determinar la probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado.

b) Determinar la probabilidad de que sea de la marca B o esté caducado.

Asturias

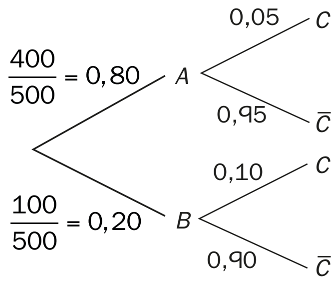
Sean los siguientes sucesos:

A = «el tetrabrik es de la marca A»

B = «el tetrabrik es de la marca B»

C = «el tetrabrik está caducado»

El experimento de elegir un tetrabrik de las marcas A o B y, después, averiguar si está caducado o no, podemos describirlo mediante el siguiente diagrama de árbol:



a) La probabilidad de que un tetrabrik de fecha sea de la marca B y no esté caducada es:

$p(B \cap \overline{C}) = p(B) \cdot p(\overline{C}/B) = 0,20 \cdot 0,90 = 0,18$ o 18 %

b) La probabilidad de que el tetrabrik sea de la marca B o esté caducado es $p(B \cup C)$. Así:

$p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C)$

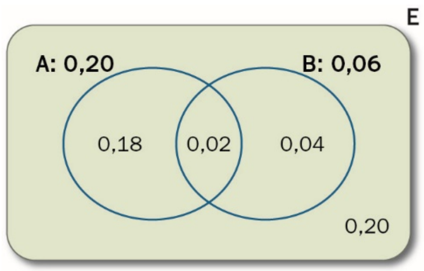
Necesitamos obtener previamente $p(C)$. Para ello, aplicaremos el teorema de la probabilidad total:

$p(C) = p(A \cap C) + p(B \cap C) = p(A) \cdot p\left(C/A\right) + p(B) \cdot p\left(C/B\right) = 0,80 \cdot 0,05 + 0,20 \cdot 0,10 = 0,06$

Por tanto,

$p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0,20 + 0,06 - 0,20 \cdot 0,10 = 0,24$ o 24 %

Comprueba en el siguiente diagrama de Venn los resultados obtenidos anteriormente.



77. En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luis va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.

a) ¿Qué probabilidad tiene Luis de encestar dos lanzamientos?

b) ¿Qué probabilidad tiene Luis de ganar el premio?

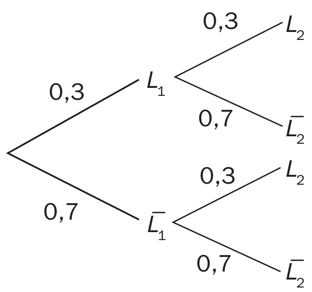
c) Si Luis ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?

d) Sea A el suceso «Luis falla el primer lanzamiento» y B el suceso «Luis gana el premio». ¿Son los sucesos A y B independientes?

Aragón

Designemos por L_1 y L_2 los sucesos que indican que Luis encesta en el primer y segundo lanzamiento, respectivamente. Además, sea G el suceso que señala que Luis gana un premio.

El diagrama de árbol que figura a continuación muestra todas las posibilidades que se pueden presentar al lanzar los dos lanzamientos.



a) La probabilidad que tiene Luis de encestar los dos lanzamientos es:

$$p(L_1 \cap L_2) = p(L_1) \cdot p(L_2) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \text{ o } 9\,\%$$

b) La probabilidad que tiene Luis de ganar, $p(G)$, lo obtenemos al seguir las ramas en los que consigue encestar al menos un lanzamiento. Es decir,

$$p(G) = p(L_1 \cap L_2) + p(L_1 \cap \overline{L}_2) = p(4) \cdot p(L_2) + p(L_1) \cdot p(\overline{L}_2) + p(\overline{L}_1) \cdot p(L_2) =$$
$$= 0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,51 \text{ o } 51\,\%$$

Tiene una probabilidad del 51 % de ganar el premio.

c) Si Luis ha ganado el premio, entonces la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento es:

$$p\left(\overline{L}_1/G\right) = \frac{p\left(\overline{L}_1 \cap G\right)}{p(G)} = \frac{p(\overline{L}_1 \cap L_2)}{p(G)} = \frac{p(\overline{L}_1) \cdot p(L_2)}{p(G)} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{0,51} = \frac{0,21}{0,51} = 0,4118 \text{ o } 41,18\,\%$$

d) Si A = «Luis falla el primer lanzamiento» y

B = «Luis gana el precio», entonces

$$p(A) = p(\overline{L}_1) = 0,7 \quad \text{y} \quad p(B) = p(G) = 0,51$$

Por otro lado,

$$p(A \cap B) = p(\overline{L}_1 \cap G) = p(\overline{L}_1 \cap L_2) = p(\overline{L}_1) \cdot p(L_2) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21$$

Como $p(A \cap B) = 0,21 \neq p(A) \cdot p(B) = 0,7 \cdot 0,51 = 0,357$

Los dos sucesos A y B son dependientes.

78. **Se consideran dos sucesos independientes A y B. Si la probabilidad de que ocurra A es 1/2 y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es 1/3, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.**

Castilla y León

Si A y B son independientes, entonces $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Luego,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot p(B) \Rightarrow p(B) = \frac{2}{3}.$$

La probabilidad de que no ocurra *A* y no ocurra *B* es $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

$$p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ley de Morgan}}}{=} p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - p(A \cup B)$$

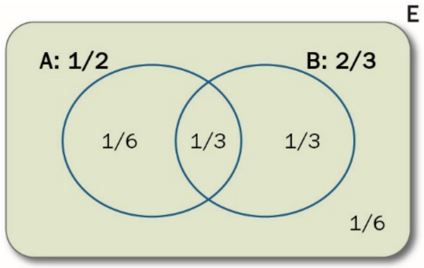
Calculemos, pues, previamente $p(A \cup B)$. Así:

$$p\left(A \cup B\right) = p(A) + p(B) - p\left(A \cap B\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Por tanto,

$$p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Nota: observa en el siguiente diagrama de Venn todos los resultados anteriores.



79. **Las probabilidades de que tres tiradores con arco consigan hacer diana son, respectivamente, 3/5, 2/3 y 5/6. Si los tres disparan simultáneamente:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el blanco uno solo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres acierten?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos uno de ellos?

Cantabria

Sean *A*, *B* y *C* los sucesos que representan que el primero, segundo y tercer tirador, respectivamente, hace diana. Así:

$$p(A)=\frac{3}{5},\quad p(B)=\frac{2}{3},\quad p(C)=\frac{5}{6}.$$

a) La probabilidad de que acierte en el blanco no solo es que acierte o bien A, o bien B, o bien C.

$$p\left[\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\right]=p\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)+p\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)+p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)=$$
$$=p(A)\cdot p(\overline{B})\cdot p(\overline{C})+p(\overline{A})\cdot p(B)\cdot p(\overline{C})+p(\overline{A})\cdot p(\overline{B})\cdot p(C)=$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{17}{90}=0{,}1889 \text{ o } 18{,}89\ \%$$

b) La probabilidad de que los tres acierten es:

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}=0{,}3333 \text{ o } 33{,}33\ \%$$

c) La probabilidad de que acierte al menos uno de ellos es:

$$p(A\cup B\cup C)=1-p\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)\underset{\uparrow}{=}1-p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=1-p(\overline{A})\cdot p(\overline{B})\cdot p(\overline{C})=$$

Ley de Morgan

$$= 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45} = 0{,}9778 \text{ o } 97{,}78\ \%$$

Nota: como disparan simultáneamente, el hecho de dar o no en la diana, son sucesos independientes.

80. En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10 000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y que el 20 % de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

c) Si la persona elegida opina que el acceso debe ser restringido, ¿cuál es la probabilidad de que viva en el centro?

Andalucía

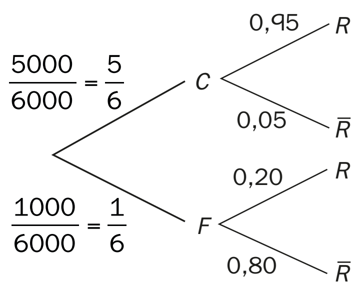
Consideremos los siguientes sucesos:

C = «persona que residen en el centro»

F = «persona que reside en la periferia»

R = «persona que opina que hay que restringir el acceso al centro de los vehículos privados»

El diagrama de árbol que muestra e proceso de analizar si una persona elegida al azar vive en el centro o en la periferia de esa población y, después, si está a favor o en contra de restringir el tráfico en el centro, es el siguiente:



a) La probabilidad de que una persona esté a favor de restringir el tráfico en el centro es $p(R)$. Para su cálculo basta sumar la primera y tercera ramas del árbol, o bien aplicar el teorema de la probabilidad total. Así:

$$p(R) = p(C \cap R) + p(F \cap R) = p(C) \cdot p\left(R|C\right) + p(F) \cdot p\left(R|F\right) = \frac{5}{6} \cdot 0,95 + \frac{1}{6} \cdot 0,20 = 0,825 \text{ o } 82,5\ \%$$

b) La probabilidad de que la persona viva en el centro y esté a favor de restringir el tráfico es:

$$p(C \cap R) = p(C) \cdot p\left(R|C\right) = \frac{5}{6} \cdot 0,95 = 0,7917 \text{ o } 79,17\ \%$$

c) Si la persona elegida opina a favor de restringir el tráfico, entonces la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad es:

$$p\left(C|R\right) = \frac{p(C \cap R)}{p(R)} = \frac{p(C) \cdot p\left(R|C\right)}{p(R)} = \frac{0,7917}{0,825} = 0,9596 \text{ o } 95,96\ \%$$

81. En una ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV, pero sí haya contratado televisión de pago?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

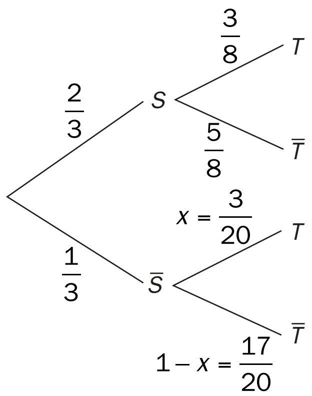
Comunidad Valenciana

Sean los sucesos siguientes:

S = «un hogar tiene Smart TV»

T = «un hogar tiene contratado algún servicio de televisión de pago»

Elegido un hogar al azar, el diagrama de árbol que analiza si tiene Smart TV y, a continuación, si tiene contratado algún servicio de pago, es:



Calculemos, en primer lugar, el valor de x, es decir, $p\left(T\middle|\overline{S}\right)$

Como $p(T)=0,30$, entonces aplicando el T. de la probabilidad total:

$$p(T)=p(S\cap T)+p(\overline{S}\cap T)+p(S)\cdot p\left(T\middle|S\right)+p(\overline{S})\cdot p\left(T\middle|\overline{S}\right)\Rightarrow \frac{3}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot x\Rightarrow x=\frac{3}{20}$$

a) La probabilidad de que no tenga Smart TV, pero sí servicio de TV de pago es:

$$p(\overline{S}\cap T)=p(\overline{S})\cdot p\left(T\middle|\overline{S}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{20}=\frac{1}{20}=0,05 \text{ o } 5\ \%$$

b) La probabilidad de que tenga Smart TV, si ha contratado televisión de pago, es:

$$(*)\quad p\left(S\middle|T\right)=\frac{p(S\cap T)}{p(T)}=\frac{p(S)\cdot p\left(T\middle|S\right)}{p(T)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{3}{10}}=\frac{5}{6}=0,8333 \text{ o } 83,33\ \%$$

c) Si no ha contratado televisión de pago, entonces la probabilidad de que no tenga Smart TV es:

$$p\left(\overline{S}\middle|\overline{T}\right)=\frac{p(\overline{S}\cap\overline{T})}{p(\overline{T})}=\frac{p(\overline{S})\cdot p\left(\overline{T}\middle|\overline{S}\right)}{1-p(T)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{20}}{1-\frac{3}{10}}=\frac{17}{42}=0,4048 \text{ o } 40,48\ \%$$

(*) Hemos aplicado el teorema de Bayes.

82. Los videojuegos que se consumen en Galicia se juegan el 45 % en consola y el resto en el móvil. De los juegos de consola, el 70 % son de acción, el 10 % de estrategia y el resto de otras categorías. De los de móvil, un 25 % son de acción, otro 25 % de estrategia y el resto de otras categorías.

a) ¿Qué porcentaje de los videojuegos son de acción?

b) Se elige al azar una persona que está jugando a un juego de estrategia, ¿qué probabilidad hay de que lo esté haciendo a través del móvil?

Galicia

Sean los siguientes sucesos:

C = «se juega en consola»

M = «se juega en móvil»

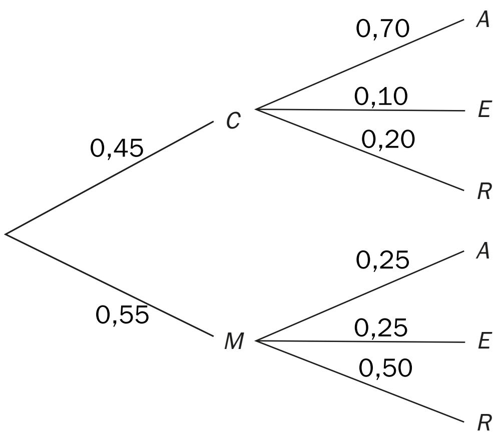
A = «videojuego de acción»

E = «videojuego de estrategia»

R = «videojuego de otras categorías»

Con los datos del enunciado podemos construir un diagrama de árbol que represente si se utiliza consola o móvil para jugar a los videojuegos y, después, si esto son de acción, estrategia u otras categorías.

Así:



a) La probabilidad de que un videojuego consumido en Galicia sea de acción es de $p(A)$ que lo obtenemos mediante el teorema de la probabilidad total o sumando las ramas primera y cuarta del árbol.

Luego,

$$p(A) = p(C \cap A) + p(M \cap A) = p(C) \cdot p\left(A|C\right) + p(M) \cdot p\left(A|M\right) = 0{,}45 \cdot 0{,}70 + 0{,}55 \cdot 0{,}25 =$$
$$= 0{,}315 + 0{,}1375 = 0{,}4525$$

El 45,25 % de los videojuegos son de acción.

b) Si una persona está jugando a un juego de estrategia, entonces la probabilidad de que sea a través del móvil, es $p(M|E)$ que lo calcularemos mediante el teorema de Bayes. Así,

$$p(M|E) = \frac{p(M \cap E)}{p(E)} = \frac{p(M) \cdot p(E|M)}{p(C) \cdot p(E|C) + p(M) \cdot p(E|M)} = \frac{0,55 \cdot 0,25}{0,45 \cdot 0,10 + 0,55 \cdot 0,25} =$$

$$= \frac{0,1375}{0,1825} = 0,7534 \text{ o } 75,34\ \%$$